

幾何学的有限な Klein 群から作られる 多様体上の測地的流れのエルゴード性

山形大. 理. 仲田正躬
Nakada Masami

§1. 序.

三次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^3$, その一葉コンパクト化を $\hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ とする. $\hat{\mathbb{R}}^3$ における, 球面又は平面に関する, 反転の偶数個の合成をメービウス変換という. B^3 を $\mathbb{R}^3$ における原点中心の単位開球とする. B^3 を不変にするメービウス変換を具体的に表示するために四元数を用いる. そこで

$$x = t_1 + t_2 i + t_3 j + t_4 k$$

を四元数とする. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ と $z + t_3 j$ ($z = t_1 + t_2 i \in \mathbb{C}$: 複素数) とを同一視する. 従って, 上半空間 $\mathbb{H}^3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3; t_3 > 0\}$ と $\{z + tj; z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ とを同一視する. $x = t_1 + t_2 i + t_3 j + t_4 k$ に対して $\bar{x} = t_1 - t_2 i - t_3 j - t_4 k$, $|x|^2 = \sum_{k=1}^4 (t_k)^2 = x \bar{x}$ とする. 又 $x = t_1 + t_2 i + t_3 j \in \mathbb{H}^3$ に対して $z = t_1 + t_2 i = C(x)$, $t_2 = I(x)$, $t_3 =$

$J(x)$ とする. いま τ_1 を, 中心が $-2j$ 半径が 2 の球面に関する反転とし, τ_2 を, 平面 $J(x) = -1/2$ に関する反転とする. 従って τ_1, τ_2 は次で与えられる.

$$\begin{cases} \tau_1(x) = -2j + \{4(x+2j)/|x+2j|^2\} \\ \tau_2(x) = x - (2J(x) + 1)j. \end{cases}$$

γ を, B^3 を不変にするメービウス変換とすれば, $\bar{\gamma} = (\tau_2 \circ \tau_1)^{-1} \circ \gamma \circ (\tau_2 \circ \tau_1)$ は H^3 を不変にする. よって, $\bar{\gamma}(z+tj), z+tj \in H^3$ は次の式で与えられる.

$$(1.1) \quad \bar{\gamma}(z+tj) = \frac{a\bar{c}|z+tj|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d}}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2} + \frac{tj}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2},$$

ここで $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ で $ad - bc = 1$ (Ahlfors [1]).

定義 1. γ は B^3 を不変にするメービウス変換とする. このとき, γ が放物的変換とは, 表示式 (1.1) において $(a+d)^2 = 4$ となることをいう. 楕円変換とは $(a+d)^2 < 4$ となることをいい, その他のとき斜航変換といる.」

放物的変換は $S^2 \equiv \partial B^3$ へのみ唯一つの不動点をもつ.

定義 2. Γ をメービウス変換群の部分群とする. このとき, Γ が Klein 群とは次を満たすことをいう.

- i) 各元 $\gamma \in \Gamma$ は B^3 を不変にする.
- ii) Γ は B^3 に不連続に作用する.
- iii) Γ は S^2 のある開集合上に不連続に作用する.」

これより以後常に次を仮定する。すなわち、 Γ は Klein 群で放物的変換 γ_0 を含むとする。又 γ_0 の不動点を $z_0 \in S^2$ とする。さらに $x_0 \in \mathbb{R}^3$ は、すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma x_0 \neq 0$ なるものとする。

このとき次を満たすメービウス変換 α, β が存在する：

$$\begin{cases} \alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta(\infty) = z_0. \\ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1} \circ \gamma_0 \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)(x) = x + 1 \\ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1}(x_0) = x_0 + j, \quad x_0 > 0. \end{cases}$$

このことは次のようにして示される。まず $\alpha(j) = z_0$ となる直交変換 α をとる。次に、 $(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1)^{-1} \circ \gamma_0 \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1)(x) = x + \lambda_0$ となる $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ があるから、メービウス変換 β_1 を $\beta_1(x + tj) = \lambda_0 x + |\lambda_0| tj$ で定義する。さらに $(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta_1)^{-1}(x_0) = x_0 + t_0 j$ ($t_0 > 0$) とし、 β_2 を $\beta_2(x) = x + x_0$ で定義する。すると $\beta = \beta_1 \circ \beta_2$ とすれば、この α, β がもとめるものである。

与えられた Klein 群 Γ に対して、Patterson [7] に従って S^2 上のボレル確率測度 μ を構成する。本報告書の主目的は次の等式を示すことである： z_0 が、いわゆる *cusped parabolic* な不動点であれば $\mu(\{z_0\}) = 0$ 。

このことを $\mathbb{H}^3$ を不変にする群 $(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1} \circ \Gamma \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)$ を用いて証明する。又この結果を応用して、幾何学的有限な Klein 群から作られる多様体上の測地的流れのエル

ゴード性を Hopf [5] に習って示す. ただし, この場合, 相空間の測度は通常のものとは異なるものを導入する ([8]).

§2. *cusped parabolic* な不動点.

さて, $\alpha, \tau_1, \tau_2, \beta$ は §1 で構成したものとし, さらに $\lambda_0, t_0 (> 0), z_0$ も §1 のものとする. そこで $T = \alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta$ とする. $\bar{\Gamma} = T^{-1} \circ \Gamma \circ T$ の各元 $\bar{\gamma} = T^{-1} \circ \gamma \circ T \in \bar{\Gamma}$ は $\mathbb{H}^3$ を不変にする. $\bar{\Gamma}_\infty = \{\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}; \bar{\gamma}\infty = \infty\}$ とする.

定義3. ([4]) 複素平面 $\mathbb{C}$ における空でない, 互いに素な n 個の半平面の和 U が $\bar{\Gamma}_\infty$ の *cusped region* とは, $\bar{\gamma}(U) = U$ ($\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}_\infty$) かつ $\bar{\gamma}(U) \cap U = \emptyset$ ($\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_\infty$) なることをいう. $\square$

T のつくりより, $\bar{\gamma}_0(x) = T^{-1} \circ \gamma_0 \circ T(x) = x+1$. 従って *cusped region* U は, ある $u_0 (> 0)$ に対して

$$U = \{z \in \mathbb{C}; |I(z)| > u_0\}$$

なる形である.

定義4. ([4]) 放物的変換 γ_0 の不動点 z_0 が *cusped parabolic* な不動点とは, $\bar{\Gamma}_\infty$ が *cusped region* をもつか, 又は階数2の自由アーベル群を含むことをいう. $\square$

さて

$$(2.1) \quad \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_\infty \bar{g}_0 \cup \bar{\Gamma}_\infty \bar{g}_1 \cup \bar{\Gamma}_\infty \bar{g}_2 \cup \dots$$

を Γ の右剰余類への分解とする. $\Gamma = \bigcup \bar{g}_0 = \text{id.}$ とする.

定理 1. $\xi_0 \in S^2$ が *cusped parabolic* な不動点とするとある代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$ に対して $|\bar{g}_m(t_0, j)| \leq K$ とする m は無関係な定数 K が存在する.』

§3. 予備的関数.

これを次で定義される $B^3 \times B^3$ 上の関数とする:

$$h(x, y) = \frac{|x - y|^3}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}.$$

t_0 を十分大なる数とし, $W = \{z + tj \in \mathbb{H}^3; |z| < 1/2, t > t_0\}$, $V = TW$ とする. t_0 は十分大なるので, $\forall x_0 \in V^c$ がすべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成立する. 以下 $x_1 \in V$ をとり固定する. x_1 の近傍 $N(x_1)$, $N'(x_1)$ を次のようにとる. すなわち $V \supset N(x_1) \supset (N'(x_1) \text{ の閉包 })$. そこで $y \in B^3 \cup S^2$ についての連続関数 $P(x_1, y)$ を次で定義する:

$$P(x_1, y) = \begin{cases} \frac{1 - |x_1|^3}{|x_1 - y|^3}, & y \in N(x_1)^c \cap (B^3 \cup S^2) \\ 0, & y \in N'(x_1). \end{cases}$$

$\forall x_0 \in N(x_1)^c$ がすべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成立するので $P(x_1, \gamma x_0) = (1 - |x_1|^3) |x_1 - \gamma x_0|^{-3}$. よって h 及び P の定義より

$$(3.1) \quad h(0, \gamma x_0)^{-1} P(x_1, \gamma x_0) = h(x_1, \gamma x_0)^{-1} |\gamma x_0|^{-3}.$$

$x \in B^3$ に対し $x^* = x/|x|^2$ とする.

補題 1. $x, y \in B^3, r \in \Gamma$ に対し $h(rx, ry) = f(x, y, r) h(x, y)$. $\therefore \therefore$

$$f(x, y, r) = \begin{cases} (|a^*|^2 - 1) \{ |x - a^*| |y - a^*| \}^{-1}, & a = r^{-1}b \neq 0 \\ 1, & r^{-1}b = 0. \end{cases} \quad \square$$

次に $x, y \in H^3$ に対し $h_0(x, y)$ を次で定義する:

$$h_0(x, y) = \frac{|x - y|^3}{J(x) J(y)}.$$

補題 2. $x, y \in H^3$ に対し $h(Tx, Ty) = h_0(x, y) \cdot (|\lambda_0| |x + w_0| |y + w_0|)^{-1}$. $\therefore \therefore$ $w_0 = z_0 + (2/|\lambda_0|)j$. $\square$

$x'_1 = T^{-1}x_1$ とし, $y \in H^3 \cup \mathbb{C}$ についての連続関数 $P'_0(x'_1, y)$ を次で定義する:

$$P'_0(x'_1, y) = \begin{cases} J(x'_1) |x'_1 - y|^{-3}, & y \in (T^{-1}(N(x_1)))^c \cap (H^3 \cup \mathbb{C}) \\ 0, & y \in T^{-1}(N(x_1)). \end{cases}$$

さらに $P_0(x'_1, y)$ を次で定義する:

$$P_0(x'_1, y) = \begin{cases} P'_0(x'_1, y), & y \in H^3 \cup \mathbb{C} \\ J(x'_1), & y = \infty. \end{cases}$$

補題 3.

$$P(Tx'_1, Ty) = \begin{cases} \frac{|\lambda_0|^2 |x'_1 + w_0| |y + w_0|^3}{8} P_0(x'_1, y), & y \in (T^{-1}(N(x_1)))^c \cap (H^3 \cup \mathbb{C}) \\ \frac{|\lambda_0|^2 |x'_1 + w_0|}{8} P_0(x'_1, \infty), & y = \infty \end{cases} \quad \square$$

§ 4. 極限集合上の測度 μ .

Klein 群 Γ の極限集合を $\Lambda(\Gamma)$ とし, [7] のように $\Lambda(\Gamma)$ に集中した $B^3 \cup S^2$ 上のボレル確率測度を構成する.

そこで, テイリクレ級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} h(0, \gamma x_0)^{-\lambda}$$

の収束指数を δ とする. このとき次の二つの条件を満たす

$[0, \infty)$ 上の正の増加関数 k が存在する:

1) $\sum_{\gamma \in \Gamma} k(h(0, \gamma x_0)) h(0, \gamma x_0)^{-\lambda}$ の収束指数は δ であつて, この級数は $\lambda = \delta$ で発散する.

2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して ε' が存在して, $t > t', u \geq 1$ ならば $k(ut) \leq u^{\varepsilon'} k(t)$ である.

$\lambda > \delta$ に対して $M(\lambda) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} k(h(0, \gamma x_0)) h(0, \gamma x_0)^{-\lambda}$ とする. さらに $x \in B^3$ における単位テラック測度 δ_x に対して

$$\mu_\lambda \equiv \frac{1}{M(\lambda)} \sum_{\gamma \in \Gamma} k(h(0, \gamma x_0)) h(0, \gamma x_0)^{-\lambda} \delta_{\gamma x_0}$$

とする. このとき $\{\mu_\lambda\}_{\lambda > \delta}$ は $B^3 \cup S^2$ 上のボレル確率測度の族である. 従つて, 任意の列 $\{\lambda'_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda'_k \downarrow \delta$, に対して, 部分列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ があつて $\{\mu_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ は $B^3 \cup S^2$ 上のあるボレル確率測度 μ に弱収束する. μ は $\Lambda(\Gamma) \subset S^2$ に集中している ([7]).

$x_1 \in V$ に対して

$$F(x_1) \equiv \int_{B^3 \cup S^2} P(x_1, y)^\delta \mu(dy)$$

とする. 補題 3 により次を得る.

定理 2. $x_1 = Tx'_1$ とすると $F(Tx'_1) \geq K J(x'_1)^{2\delta} \mu(\{3_0\})$ である. ここで K は $x'_1 \in W$ に無関係な定数である.

次に, この定理の不等式とは逆向の不等式を導ぶ. そのために $F(x_1)$ を, [7] のように, 級数であらわす.

$\{\mu_{\delta_l}\}_{l=1}^{\infty}$ が μ に弱収束していること, 及び次の不等式:
 $|P(x_1, y)^{\delta} - P(x_1, y)^{\delta_l}| \leq K(x_1) |\delta - \delta_l|$, により

$$F(x_1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{B^3 \cup S^2} P(x_1, y)^{\delta_l} \mu_{\delta_l}(dy)$$

とある. μ_{δ_l} の定義及び (3.1) より

$$F(x_1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\delta_l)} \sum_{\gamma} k(h(0, \gamma x_0)) h(x_1, \gamma x_0)^{-\delta_l} |\gamma x_0|^{-3\delta_l}.$$

$y_0 = T^{-1}0$ とすれば

$$F(Tx'_1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\delta_l)} \sum_{\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}} k(h(Ty_0, T\bar{\gamma}(x_{0j}))) h(Tx'_1, T\bar{\gamma}(x_{0j}))^{-\delta_l} \cdot |T\bar{\gamma}(x_{0j})|^{-3\delta_l}.$$

これに補題 1 及び 2, さらに $\bar{\Gamma}$ の右剰余類への分解 (2.1) を適用すれば,

$$(4.1) \quad F(Tx'_1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\delta_l)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}_{\infty}} k(a(\bar{\gamma}, m) h_0(\bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(x_{0j}))) \cdot b(\bar{\gamma}, m, x'_1)^{\delta_l} h_0(\bar{\gamma}^{-1}(x'_1), \bar{g}_m(x_{0j}))^{-\delta_l} |T\bar{\gamma} \bar{g}_m(x_{0j})|^{-3\delta_l},$$

ここで

$$\begin{cases} a(\bar{\gamma}, m) = \frac{f(T\bar{\gamma}^{-1}(y_0), T\bar{g}_m(x_{0j}), T\bar{\gamma}T^{-1})}{|\lambda_0| |\bar{\gamma}^{-1}(y_0) + w_0| |\bar{g}_m(x_{0j}) + w_0|} \\ b(\bar{\gamma}, m, x'_1) = \left\{ \frac{f(T\bar{\gamma}^{-1}(x'_1), T\bar{g}_m(x_{0j}), T\bar{\gamma}T^{-1})}{|\lambda_0| |\bar{\gamma}^{-1}(x'_1) + w_0| |\bar{g}_m(x_{0j}) + w_0|} \right\}^{-1}. \end{cases}$$

上式の右辺の級数を $G(x'_1, \delta_l)$ とおき, 次の二つの節に

おいて, これを上から評価する.

§5. Γ_∞ が *cusped region* をもつとき.

$\bar{G}_0$ を $\bar{\gamma}_0 = T^{-1} \circ \gamma_0 \circ T$ によ, て生成される群とする. このとき $\Gamma_\infty = \bar{G}_0$ であるか, $\Gamma_\infty = \bar{G}_0 \cup \bar{G}_0 \bar{e}$ となる. ここで $\bar{e}$ は $\bar{e}(z+tj) = -z + a + tj$ なる x -ビロウス変換である ($a \in \mathbb{C}$). 従って $\Gamma_\infty = \bar{G}_0 \cup \bar{G}_0 \bar{e}$ の場合について, $G(x', \lambda_\ell)$ を上から評価すれば十分である. よ, て

$$(5.1) \quad G(x', \lambda_\ell) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ k(a(\bar{\gamma}_0^p, m) h_0(\gamma_0 - p, \bar{g}_m(x_{0j}))) \right. \\ \cdot b(\bar{\gamma}_0^p, m, x')^{\lambda_\ell} h_0(x' - p, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-\lambda_\ell} |T \bar{\gamma}_0^p \bar{g}_m(x_{0j})|^{-3\lambda_\ell} \\ + k(a(\bar{\gamma}_0^p \bar{e}, m) h_0(\bar{e}(\gamma_0 - p), \bar{g}_m(x_{0j}))) b(\bar{\gamma}_0^p \bar{e}, m, x')^{\lambda_\ell} \\ \cdot h_0(\bar{e}(x' - p), \bar{g}_m(x_{0j}))^{-\lambda_\ell} |T \bar{\gamma}_0^p \bar{e} \bar{g}_m(x_{0j})|^{-3\lambda_\ell} \left. \right\}.$$

以下の各節において, $\gamma \in \Gamma$, ℓ , $x' \in W$ は無関係な定数を K_n (n : 自然数) とかくことにする.

定理1を用いて次が示される.

補題4. 右剰余類分解 (2.1) において, 適当な代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$ をとれば次の不等式が成立する.

- i) $a(\bar{\gamma}_0^p, m) \leq 1/4 J(\gamma_0)$, $a(\bar{\gamma}_0^p \bar{e}, m) \leq 1/4 J(\gamma_0)$,
- ii) $b(\bar{\gamma}_0^p, m, x')^{\lambda_\ell} + b(\bar{\gamma}_0^p \bar{e}, m, x')^{\lambda_\ell} \leq K_1 J(x')^{\lambda_\ell} (p^2 + 1)^{\lambda_\ell/2}$,
- iii) $\left. \begin{array}{l} h_0(\gamma_0 - p, \bar{g}_m(x_{0j})) \\ h_0(\bar{e}(\gamma_0 - p), \bar{g}_m(x_{0j})) \end{array} \right\} \leq K_2 h_0(\gamma_0, \bar{g}_m(x_{0j})) (p^2 + 1)^{3/2}$,

$$\text{iv) } \left. \begin{aligned} & h_0(x'_1 - p, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2} \\ & h_0(\bar{c}(x'_1 - p), \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2} \end{aligned} \right\} \leq K_3 T(x'_1)^{A_2} h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2} \cdot (T(x'_1)^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}A_2}$$

この補題の不等式を (5.1) 式に代入して,

$$G(x'_1, A_2) \leq K_4 T(x'_1)^{2A_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k(K_5 (p^2+1)^{\frac{3}{2}} h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))) \cdot h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2} (T(x'_1)^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}A_2} (p^2+1)^{A_2/2}.$$

さらに, 正の増加関数 k の性質 2) により次を得る.

$$G(x'_1, A_2) \leq K_6 T(x'_1)^{2A_2} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2} \cdot \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p^2+1)^{\frac{A_2+3\varepsilon}{2}} (T(x'_1)^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}A_2} \right\},$$

ここで, $\varepsilon > 0$ は十分小さな固定正の実数である. $\varepsilon = 3\varepsilon$ (2)

により, $\delta > 1/2$ である. 又 $A_2 > \delta$ であるから, 積分

$$\int_0^{\infty} (t^2+1)^{-A_2 + \frac{3}{2}\varepsilon} dt$$

は収束する. よって級数

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} (p^2+1)^{\frac{A_2+3\varepsilon}{2}} (T(x'_1)^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}A_2}$$

は $K_7 T(x'_1)^{1+3\varepsilon-2A_2}$ により上から抑えられる. 従って

$$G(x'_1, A_2) \leq K_8 T(x'_1)^{1+3\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2}.$$

定理 3. $\bar{P}_{\infty}$ が mapped region をもてば, $x'_1 \in W$ に対して

$$F(Tx'_1) \leq K_9 T(x'_1).$$

(証明) 関数 k の性質 2) により, $g_m = T \circ \bar{g}_m \circ T^{-1}$ とすれば

$$k(h_{10}, g_m(x_0)) h_{10}, g_m(x_0))^{-A_2} \geq K_{10} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(x_{0j}))^{-A_2}.$$

$$\text{よって (4.1) より} \quad F(Tx'_1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{M(A_2)} G(x'_1, A_2)$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_8 J(x'_1)^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\Delta_\ell} \\
&\leq K_8 K_{10}^{-1} J(x'_1)^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\Delta_\ell} \\
&\leq K_8 K_{10}^{-1} J(x'_1)^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} M(\Delta_\ell) = K_8 K_{10}^{-1} J(x'_1)^{1+3\varepsilon}.
\end{aligned}$$

∴ $\varepsilon \downarrow 0$ として, 求める不等式を得る. $\square$

§ 6. $\bar{\Gamma}_\infty$ が階数 2 の自由アーベル群を含むとき.

$\bar{G}_0$ を階数 2 の自由アーベル群とする. $\bar{G}_0$ の各元 $\bar{\gamma}$ は $\bar{\gamma}(x) = x + p + qj$ の形である. p, q は整数, $j \in \mathbb{C}$ で $I(j) \neq 0$. 次に $\bar{\Gamma}_\infty$ を右剰余類に分解して $\bar{\Gamma}_\infty = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bar{G}_0 \bar{e}_n$ とする. ∴ $\bar{e}_0 = \text{id}$, $\bar{e}_n$ ($n=1, 2, \dots, N-1$) は楕円的変換である. (4.1) 式に δ)

$$\begin{aligned}
(6.1) \quad G(x'_1, \Delta_\ell) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\bar{\gamma} \in \bar{G}_0} k(a(\bar{\gamma} \bar{e}_n, m) h_0(\bar{e}_n^{-1} \bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(t_{0j}))) \\
&\quad \cdot b(\bar{\gamma} \bar{e}_n, m, x'_1)^{\Delta_\ell} h_0(\bar{e}_n^{-1} \bar{\gamma}^{-1}(x'_1), \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\Delta_\ell} |T \bar{\gamma} \bar{e}_n \bar{g}_m(t_{0j})|^{-3\Delta_\ell}.
\end{aligned}$$

補題 5. 右剰余類分解 (2.1) において適当な代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$, 及び $\bar{G}_0 \ni \bar{\gamma}(x) = x + p + qj$ に対して次が成立する.

- i) $a(\bar{\gamma} \bar{e}_n, m) \leq 1/4 J(y_0),$
- ii) $b(\bar{\gamma} \bar{e}_n, m, x'_1)^{\Delta_\ell} \leq K_1 J(x'_1)^{\Delta_\ell} (p^2 + q^2 + 1)^{\Delta_\ell/2},$
- iii) $h_0(\bar{e}_n^{-1} \bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(t_{0j})) \leq K_2 h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j})) (p^2 + q^2 + 1)^{3/2},$
- iv) $h_0(\bar{e}_n^{-1} \bar{\gamma}^{-1}(x'_1), \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\Delta_\ell} \leq K_3 J(x'_1)^{\Delta_\ell} h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\Delta_\ell} \cdot (J(x'_1)^2 + p^2 + q^2)^{-3\Delta_\ell/2}$ $\square$

この不等式を (6.1) 式に代入して

$$G(x', \lambda_2) \leq K_4 T(x')^{2\lambda_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} k(K_5 h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))) (p^2 + q^2 + 1)^{3/2} \\ \cdot (p^2 + q^2 + 1)^{\lambda_2/2} h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\lambda_2} (T(x')^2 + p^2 + q^2)^{-3\lambda_2/2}.$$

k の性質 2) によりこの不等式は次のように変形される.

$$G(x', \lambda_2) \leq K_6 T(x')^{2\lambda_2} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\lambda_2} \\ \cdot \left\{ \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{\lambda_2 + 3\varepsilon}{2}} (T(x')^2 + p^2 + q^2)^{-3\lambda_2/2} \right\}.$$

ここで $\varepsilon > 0$ は十分小さな数である. [2] により $\delta > 1$ であり, 又 $\lambda_2 > \delta$ であるから, 積分

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{(t_1)^2 + (t_2)^2 + 1\}^{-\lambda_2 + \frac{3}{2}\varepsilon} dt_1 dt_2$$

は収束する. よって級数

$$\sum_{p, q=-\infty}^{\infty} (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{\lambda_2 + 3\varepsilon}{2}} (T(x')^2 + p^2 + q^2)^{-3\lambda_2/2}$$

は $K_7 T(x')^{2+3\varepsilon-2\lambda_2}$ により上から抑えられる. ゆえに

$$G(x', \lambda_2) \leq K_8 T(x')^{2+3\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))) h_0(y_0, \bar{g}_m(t_{0j}))^{-\lambda_2}.$$

従って, 定理 3 と同様にして次が示される.

定理 4. Γ_{∞} が階数 2 の自由アベル群を含めば,

$$x'_i \in W \text{ に対して } F(Tx'_i) \leq K_9 T(x'_i)^2 \quad \square$$

定理 2, 3 及び 4 を用いて次が示される.

定理 5. $\xi_0 \in S^2$ が cusped parabolic は不動点であれば,

$$\mu(\{\xi_0\}) = 0 \quad \text{である.} \quad \square$$

§7. 幾何学的有限な Klein 群とエルゴード性.

B^3 に リーマン計量

$$d\lambda^2 = 4(1-|x|^2)^{-2} \sum_{k=1}^3 (dx_k)^2$$

を入れる ($x = (x_1, x_2, x_3) \in B^3$). この計量による二点 $x, y \in B^3$ の距離を $d(x, y)$ とかくことにする. Γ を Klein 群, x_0 を §1 のものとして, テイリクレ級数 $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp -\lambda(x_0, \gamma x_0)$ を考える. 関数 k を §2 のものとする

$$L(\lambda) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} k(\exp(x_0, \gamma x_0)) \exp -\lambda(x_0, \gamma x_0)$$

の収束指数は δ (§2 にあける δ) で, かつこの級数は $\lambda = \delta$ で発散する. $\lambda = \delta$, $\lambda > \delta$ に対して

$$\nu_\lambda \equiv \frac{1}{L(\lambda)} \sum_{\gamma \in \Gamma} k(\exp(0, \gamma x_0)) \{ \exp -\lambda(0, \gamma x_0) \} \delta_{\gamma x_0}$$

とすると, $\{\nu_\lambda(B^3 \cup S^2)\}_{\lambda \geq \delta}$ は有界集合となる. よって

§4 と同様に, 適当な数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ に対して $\{\nu_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ は $B^3 \cup S^2$ 上のボレル測度 ν に弱収束する. $\nu(B^3 \cup S^2) < \infty$ であり, ν は $\Lambda(\Gamma)$ に集まっている.

定理 6. 定理 5 と同じ仮定のもとで, 次が成立する.

$$\nu(\{\xi_0\}) = 0$$

□

さて, $T_1(B^3)$ を B^3 上の単位接ベクトルバンドルとする.

$(x, u) \in T_1(B^3)$ ($x \in B^3$), $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\gamma(x, u) = (\gamma x, (\gamma_*)_x(u))$$

とある. これにより Γ は $T_1(B^3)$ に不連続に作用する. $\lambda = \delta$

$\Omega \equiv T_1(B^3)/\Gamma$, $\pi: T_1(B^3) \rightarrow \Omega$ と自然な射影とする.

Δ を $S^2 \times S^2$ の対角線集合とする. $(\xi, \eta) \in S^2 \times S^2 - \Delta$, $\gamma \in \Gamma$

の上の流れ Φ_t はエルゴード的である。□

定義 6. Klein 群 Γ が幾何学的有限であるとは, Γ の
テリクレ基本多面体が有限個の面よりなることをいう。□

Γ を幾何学的有限な Klein 群とすると Beardon-Maskit
[4] により $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma) \cup \Lambda_a(\Gamma)$. 一方 $\# \Lambda_c(\Gamma) \leq 5$. 従って
定理 6 より $\nu(\Lambda(\Gamma)) = \nu(\Lambda_a(\Gamma))$. ゆえに定理 7 より

系. Γ を幾何学的有限な Klein 群とすると, $(\pi(\mathbb{B}^3)/\Gamma,$
 $\beta(\pi(\mathbb{B}^3)/\Gamma), m)$ 上の流れ Φ_t はエルゴード的である。□

参 考 文 献

- [1]. L. V. Ahlfors, Möbius transformations in several dimensions, Univ. of Minnesota, 1981.
- [2]. A. F. Beardon, The exponent of convergence of Poincaré series, Proc. London Math. Soc., 18 (1968) 461-483.
- [3]. A. F. Beardon, The geometry of discrete groups, Discrete groups and automorphic functions, Acad. Press, 1977.
- [4] A. F. Beardon - B. Maskit, Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra,

Acta Math., 132 (1974) 1-12.

- [5]. E. Hopf, Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature, Bull. of the American Math. Soc., 77 (1971) 863-877.
- [6]. M. Nakada, A theorem on geometrically finite Kleinian groups, to appear.
- [7]. S. J. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math., 136 (1976) 241-273.
- [8]. D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. I. H. E. S., 50 (1979) 171-202.