

ある種のファイバー空間の変形と周期写像

(滋賀大教育, Max Planck Institute)

斎藤 政彦 (Masa-Hiko Saito)

1. 楕円曲面の局所変形は A. Kas の Thesis によって調べられ, その中で 1 次の無限小変形 (1^{st} order Infinitesimal deformation, 以下 1^{st} I.D.) が obstruction を持つ, 少なくとも倉西空間の次元が $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ よりも真に小さい例が発見された。その後, 幾つかの例が発見された (cf. Namba [4], p11, for references) が, Burns-Wahl [1] が, 曲面の中の (-2) -curve $E (\Leftrightarrow E \cong \mathbb{P}^1, N_E \cong \mathcal{O}_E(-2))$ の存在が, 曲面の 1^{st} order I.D. に 1 次元分, 寄与する事と示し, node のみをもつを持つ $\mathbb{P}^3$ の超曲面の minimal resolution の 1^{st} order Inf. Det に obstruction があるための必要十分条件を得た。さらに, A. Kas [3] は Burns-Wahl の結果を受けて, 曲面 X の (-2) -curve E に対応する 1^{st} order I.D. $\theta_E \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$ に対し local な計算ののち $[\theta_E, \theta_E] \in H^2(X, \mathcal{O}_X)$ (primary obstruction) を計算した。後はこれにより, 楕円曲面を含む,

(-2) curve を含むファイバー空間の構造をもつ曲面を計算し、obstructed な曲面が多く存在する事を示した。

一方、楕円曲面 X の 2^{nd} cohomology $H^2(X, \mathbb{C})$ の Hodge 構造を用いた Infinitesimal Torelli 定理は、[5] によって調べられたが、ほとんどの楕円曲面に対し、上の定理が成立するのに対し、幾つかの Kas の例の中に成立しない反例が見出された。この成立しない例は、曲線の Prym 多様体 (分岐をゆるした) の変形理論により説明される。これは、容易に高次元のファイバー空間の Infinitesimal Torelli の反例に拡張される。[6]

さてこの高次元の例は、ある意味で Kas の例の拡張になっていると思われる (上記の (-2)-curve E のかわりに、 $Y^{n-1} \subset X^n$ $Y \rightarrow S$ $\mathbb{P}^1$ bundle $N_{Y/X} \cong \mathcal{O}_Y(-2)$, $\mathcal{O}_Y(1)$ tautological bundle. なるものの存在を考え、これが $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ にどのように寄与するかはわかる。)

以下、この高次元の例の変形について調べた事をのべる。現在の所証明は完成していないが、この例は、1st order Inf deformation に obstruction を持つと思われる。さらに高次元の変形に際し、2次元の rational double point の simultaneous Resolution と違った現象が見られ、これは高次元の分類の際に singularity を許した mini^{mal} model を考えなければ

いけない事にも関係して興味深い。

2. さて, 以下考える例について述べておく。($n \geq 2$ とする)

$$\left\{ \begin{array}{l} B \subset \mathbb{P}^{n-1} : \text{非特異超曲面 (degree } B = 2d) \\ d \geq 2 \\ \pi_1: Z \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} : \text{double cover branched along } B \\ C : \text{非特異代数曲線 } g = \text{genus of } C \\ \mathcal{L} \in \text{Pic}(C), \deg \mathcal{L} = l \geq 0 \text{ s.t. } H^0(C, \mathcal{L}^2) \neq 0 \\ \delta = P_1 + \dots + P_2 l \in C \text{ s.t. } \mathcal{O}_C(\delta) \cong \mathcal{L}^2 \\ (P_i \neq P_j \text{ ; } (i \neq j) \text{ と仮定可}) \\ \pi_2: \tilde{C} \rightarrow C \text{ double cover branched at } \delta \\ \text{and s.t. } \pi_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1} \end{array} \right.$$

これを Σ 用意し, $Z \times \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times C$ なる 分岐被覆を考える。これは Galois 被覆であり, Galois 群は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である。 $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (diagonal) と考え, それに対応する多様体を $\bar{X}$ と書く。すなわち,

$$\bar{X} = Z \times \tilde{C} / \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$$

(τ_1, τ_2 は $Z, \tilde{C}$ の involution) .

$$\begin{array}{ccccc} & & Z \times \tilde{C} & & \\ & \swarrow & \downarrow u & \searrow & \\ \mathbb{P}^{n-1} \times \tilde{C} & & \bar{X} & & Z \times C \\ & \searrow & \downarrow v & \swarrow & \\ & & \mathbb{P}^{n-1} \times C & & \end{array}$$

また, $Z \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ の ramification locus をやはり $B \subset Z$ と書く. $B \times \delta \subset Z \times \tilde{C}$ が involution $\tau_1 \times \tau_2$ の fixed set であり, $u: Z \times \tilde{C} \rightarrow \bar{X}$ に付く像 $u(B \times \delta)$ に沿って $\bar{X}$ は 特異点を持つ. その特異点は局所的には $(A_1 \text{ 型}) \times (\text{smooth variety})$ の形としてゐる事に注意する. このような特異点と A_1 型とよぶ事にしよう. $u(B \times \delta) = \bar{B} \times \bar{\delta}$ と書く. $\bar{B} \times \bar{\delta}$ は $\bar{X}$ の中で余次元 2 である. この特異点集合にそつて $\square$ Blow up すると, 非特異な多様体 X と得る. 又 canonical 写像 $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow C$ は 自然に $f: X \rightarrow C$ へと拡張される.

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \bar{X} \\ f \downarrow & & \swarrow \bar{f} \\ C & & \end{array}$$

f のファイバーは, $p \in C - \delta \Rightarrow f^{-1}(p) = Z$, $p = p_i \in \delta \Rightarrow f^{-1}(p_i) = 2D_i + E_i$, $D_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $E_i = \pi^{-1}(\bar{B} \times \bar{p}_i)$, $\pi|_{E_i}: E_i \rightarrow B: \mathbb{P}^1$ -bundle $E_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-d)$ である. ($\mathcal{O}_B(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$, $\iota: B \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$)

$$N_{E_i \subset X} \cong \mathcal{O}_{E_i}(-2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-2).$$

3. 2で述べた X および $\bar{X}$ の変形 (normal) について述べる。 $\bar{X}$ は cyclic quotient singularity とも呼ばれ、 V -variety (Schenck, 佐武) である。 $\bar{X}$ の singular locus $\Sigma (= \bar{B} \times \bar{S})$ と書き $j: \bar{X} - \Sigma \hookrightarrow \bar{X}$ は埋め込みとすると

$$\textcircled{\text{H}}_{\text{X}} \quad \text{Z} \quad \textcircled{\text{H}}_{\text{X}-\text{Z}}$$

$$\Omega_X^p \cong \sigma^* \Omega_{X-\Sigma}^p \quad (p \geq 1)$$

と定義する。(Ω_F^p は普通の Kähler differential の定義と
違ふが, Ω_F^0 は通常のもので一致する。)

$\bar{X}$ の任意空間の Zariski tangent space は

$$\Pi_X' = E_{xt}^1(\bar{X}; \Omega_{\bar{X}}', \partial_{\bar{X}})$$

これより分かる。さて $T_x^{-1} \cong \text{Exc}_{\mathcal{O}_x}^1(\mathcal{Q}_{\bar{x}}, \mathcal{O}_{\bar{x}})$ (local exc.)

とある。よ、次の exact sequence がある。

$$0 \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathbb{H}_x) \rightarrow T_x' \rightarrow H^0(\bar{X}, T_x')$$

$$\rightarrow H^2(\bar{X}, \oplus_{\bar{X}}) \rightarrow$$

さて、§2の状況のもとで、次がわかる.

命题 1. (1) $(d-n)(g+l-2) > 0$, $n \geq 3$ ならば
 $H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathbb{Q}_2) \oplus H^1(C, \mathbb{Q}_2(-g))$

$$(2) \quad n \equiv 3 \Rightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathbb{Q}_Z) \otimes H^1(C, \mathbb{Q}_C)$$

$$(3) \quad T_x^{-1} \cong \varepsilon_{x\bar{x}}^{-1}(\mathcal{Q}_{\bar{x}}^1, \mathcal{O}_{\bar{x}}) \cong \bigoplus_{B_i} \mathcal{O}_{B_i}(2d), \quad B_i = \bar{B} \times \bar{P}_i$$

(証明) $H^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = H^i(Z \times \tilde{C}, \mathcal{O}_{Z \times \tilde{C}})^{\langle 4 \times 12 \rangle}$ (cf. e.g. Fujiki [2])

より (1), (2) は 明らか. (3) は Fujiki [2], p125 に modify

すなわち, $T_X^1 \cong \bigoplus \left(\bigwedge^2 N_{B_i \subset \mathbb{C}P^n} \right)$ を得る. $N_{B_i \subset \mathbb{C}P^n} \cong \mathcal{O}_{B_i} \oplus \mathcal{O}_{B_i}(2d)$ より (3) を得る.

さて, $H^0(\bar{X}, T_X^1) = \bigoplus_{i=1}^{2\ell} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ の空間は $\bar{X}$ の singularity を smoothing する deformation を表す. これは, local には次の式で書ける. $B = \{F(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{n-1} \times \Delta_\epsilon$ ($\Delta_\epsilon = \{\epsilon, |\epsilon| < \epsilon\}$) の divisor を $x F(x_0, \dots, x_n) = 0$ で定める. この double cover $y^2 + x F(x_0, \dots, x_n) = 0$ と考えれば, singular set は $y = x = F(x_0, \dots, x_n) = 0$ である. 新たに $G(x_0, \dots, x_n)$ を $2d$ 次斉次式とし, 新たに変数 s を付け加え, $\mathbb{C}P^{n-1} \times \Delta_\epsilon \times \Delta_\epsilon$ 上の double cover $\mathcal{X} : y^2 + x F(x_0, \dots, x_n) + s G(x_0, \dots, x_n) = 0$ を考える. $G \in \text{Generic}$ に取り $s \neq 0$ を固定すると $\mathcal{X}_s$ は smooth である. しかし total space $\mathcal{X}$ は, $y = x = s = F = G = 0$ で singularity を持ち, さらに, $n \geq 3$ ならば, simultaneous resolution ではない. (この $G \in H^0(B, \mathcal{O}_B(2d))$ は存在しない.)

次に X の 1st order Infinitesimal deformation を考える. この時 $\bar{X}$ の 1st order I.D. のうち, $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ に対応する部分は, $\bar{X}$ の local trivial な変形に対応し X の変形を導く. 又 命題 1, (1) より

$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \oplus H^1(C, \mathcal{O}_C(-\delta))$ であり前者は Z の変形 $((d-n)(g+l-2) > 0, n \geq 3$ なる double cover とした変形(あり)) 後者は, C の変形と divisor δ の変形を表わす。これはすべて実際に実現されるから unobstructed な変形である。

さて $X \supset \bigcup_{i=1}^{2l} E_i = E$ なる例外集合に注目し, 次の2つの exact sequence

$$(2) \quad \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow H_E^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\log E) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \begin{matrix} N_E \\ \oplus_{i=1}^{2l} N_{E_i} \end{matrix} \rightarrow 0$$

命題 2. (1) $H_E^1(\mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$

$$(2) \quad H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$$

証明: $n=2$ の時の Burns-Wahl の証明([1], (1.3)) に従う。 $\pi: X \rightarrow \bar{X}$ に文し, $\pi^* \mathcal{O}_{\bar{X}} = \mathcal{O}_X$ なる事と $\bar{X}$ の normality から, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_X)$ が従う。

$$(2) \quad H_E^1(\mathcal{O}_X) = \varinjlim_m \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{mE}, X) \text{ と計算する。 (略)}$$

(注)

$n = \dim X = 2$ の時, E_i は, -2 curve $2l$ 個の disjoint な集合である。又 B_i は点の集りであるから, $H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus \mathbb{C}[E_i]$

$\cong \mathbb{C}^{2ld}$. (1) と合すると, 各 (-2) -curve が $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ に独立に寄与する。A. Kas [3] より, この時, $d \geq 2$, $g+d-1 \geq 1$ ならば, このような 1 つ 1 つの (-2) curve に対応する, 1st order def. は obstructed.

(3) の exact sequence より得る。

命題 3.

$$(1) \quad 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-\log E)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(E, N_E) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad H^1(E, N_E) \cong \bigoplus_{i=1}^{2g} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$$

(証明) (2): 命題 2, (2) の証明の途中で, $H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong H^1(E, N_E)$ を得る。よって (2) を得る。(1) は (3) の exact sequence と $H^0(E, N_E) \cong H^0(E, \mathcal{O}_E(-2)) = 0$ 及び, $H_E^1(\mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$ から逆に $H^1(\mathcal{O}_X) \twoheadrightarrow H^1(E, N_E)$ が成り立たなければならない。($H^1(E, N_E)$ は $E \subset X$ を変形して消してゆく変形に対応する。)

4. 上の命題 3 における, $H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong H^1(E, N_E)$ を, X の変形の $\overset{\text{Eis}}{\vee}$ local contribution と呼ぶ。(Burns-Wahl [1]) さて, ここで注目して欲しいのは, $\bar{X}$ の変形の時の local

contribution $H^0(\bar{X}, T_X') \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ に代して

$H^1(\mathcal{O}_X) \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ と $\mathcal{O}_{B_i}(2d) \rightarrow \mathcal{O}_{B_i}(d)$ に置き代

えている点である。これは次の事実に対応する。前と同様に

$y^2 + tF(x_0, \dots, x_n) = 0$ の変形を考えるが、今度は $\phi(x_0, \dots, x_n)$

という d 次齊次式 と取り、 $\bar{X}: y^2 + tF + s^2\phi^2 = 0$ なる

double cover を考える。 $\bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times \Delta_t \times \Delta_s$ すると

$\bar{X}$ は $y = t = F = s = 0$ と $y = t = F = \phi = 0$ に分けて、

small resolution を許す singularity を持つ。結果的に

$X \rightarrow \bar{X}$ なる resolution が存在し、 $X \rightarrow \Delta_s$ は、

$g^1(0)$ の smooth な変形になっている。この family

の様子が $\phi \in H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ に対する smoothing の状況を表し

ている。

さて、このようにして $H^1(\mathcal{O}_X)$ の local contribution は

$f: X \rightarrow C$ の singular fiber の近傍で実現される事が、わか

ったが、 X 上で global にこの local contribution にあたる

部分の変形が実現されるかは別の問題である。

予想 $g(C) \geq 1$ ならば、local contribution は obstructed である。

これが言えれば、 X は obstructed なる 1st order I.D

を持つ例となる。

5. 終りに。上のファイバー空間 $\pi: X \rightarrow C$ の周期写像については [6] を見よ。

References

- [1] D.M. Burns, J.M. Wahl; Local Contributions of Global Deformations of Surfaces; Inv. Math. 26, 67-88 (1974)
- [2] A. Fujiki; On Primitve Symplectic Compact Kähler V-manifolds of dim. Four; Classification of Alg. and Analy. Manifold; Progress in Math. Vol 39. 71-250, 1982
- [3] A. Kas; Ordinary double points and obstructed surfaces; Topology, Vol 16, 51-64, 1977
- [4] M. Namba; Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann surfaces; Lec. Note in Math. 767,
- [5] M.-H. Saito; On the infinitesimal Torelli problem of elliptic surfaces; J. of Math, Kyoto Univ. 23-3, 441-460, 1983
- [6] ———; Differentials of Prym maps and counterexamples of the infinitesimal Torelli theorem. preprint.