

半線型楕円型作用素の変分固有値とその
臨界値との関係について.

都立大・理 柴田徹太郎 (Tetsutaro Shibata)

次の半線型固有値問題を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u + f(x, u) = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$): 有界領域, $\partial\Omega$: 滑らか,
 $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 滑らかで, $u \mapsto f(x, u)$ odd, i.
e. $f(x, -u) = -f(x, u)$ とする.

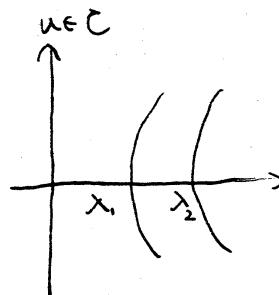
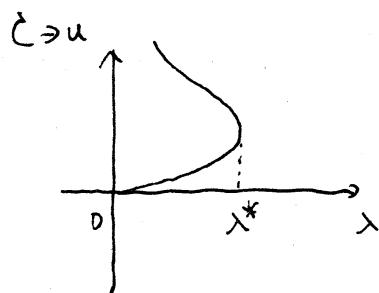
我々の目的は, (1) の Variational eigenvalue (変分固有値と呼ばれるもの) の定性的な性質を調べることである. (1) の変分固有値を調べることの意義は, 次の2つの理由による:

(i) bifurcation 理論との関係

(ii) 線型固有値問題の, mini-max 原理との関係

ii) について. 通常の分岐理論では, (方程式の type は
いろいろあるが)

例
$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{の分岐図}$$



$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{の分岐図}$$

のように, 関数空間としては連続関数の空間を採用し,
又, parameter としては, $\lambda \in \mathbb{R}$ を採用する。一方,
線型固有値問題は, L^2 空間で考えるのが自然である。
このことから, 我々の仕事は, 分岐理論で, L^2 空間を
関数空間にとり, parameter として, L^2 の norm をとる
ことに対応している。

iii) について. これは変分固有値の定義自身が, 線型
の mini-max 原理の一般化になっていることから, 線
型の場合の固有値について成り立つ性質を, 変分固有
値も持つかどうかという興味である。

1° 定義と主定理

$u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ に対し,

- $\varphi(u) := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \int dx \int_0^u f(x, s) ds$
- $\alpha > 0$ (L^2 -normalization parameter) に対し
 $M_\alpha := \{u \in \dot{W}^{1,2}(\Omega) ; \int u^2 = \alpha^2\}$
- $K \subset \dot{W}^{1,2}(\Omega)$; compact, $0 \notin K$, symmetric w.r. to the origin ($u \in K \Rightarrow -u \in K$) に対し、 K の genus を $\gamma(K)$ で表す:

$$\gamma(K) := \inf \{k \in \mathbb{N} ; \exists \tau : K \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\} ; \text{conti, odd} \}$$

Remark. ここでいう genus とは、いくつかの公理を満たす、index と呼ばれるものの具体的な関数のひとつで、order, category of the set, などを採用してもよい。

$$K_n(\alpha) := \{K \subset M_\alpha ; \gamma(K) = n\}$$

上記の記号の下で、変分固有値を定義する。

定義 $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha)) \in \mathbb{R} \times \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ が、(1) の変分固有値であるとは、これが (1) の解であり、さらに

$$2\varphi(u_n(\alpha)) = C_n(\alpha) := \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_{u \in K} 2\varphi(u)$$

$$\int u_n^2(\alpha) = \alpha^2$$

を満たすときをいう。

$$\text{このとき, } \lambda_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int |\nabla u_n(\alpha)|^2 + \int f(x, u_n(\alpha)) u_n(\alpha) \right]$$

で与えられる。

Remarks. (1) $f \equiv 0$, すなわち (1) が、線型固有値問題の場合, 上の定義は通常の, mini-max 原理と一致し,

$$(2) \begin{cases} \lambda_n(\alpha) = \lambda_n & \text{for } \forall \alpha > 0 \quad (\lambda_n: \text{第 } n \text{ 固有値}) \\ C_n(\alpha) = \alpha^2 \lambda_n = \alpha^2 \lambda_n(\alpha) \end{cases}$$

となる。(R. Chiappinelli, Boll. Uni. Math. Ital (6) 4-B (1985) 867-882)

本質的には,

$$\alpha^2 \lambda_n = \inf_{V \in V_n(\alpha)} \sup_{V \ni u} 2Q(u)$$

ここで, $V_n(\alpha) = \{ M_\alpha \cap X_n : X_n \subset W^{1,2}(\Omega), n\text{-次元部分空間} \}$

と, $\dim(M_\alpha \cap X_n) = n$ (Borsuk-Ulam の定理) を使う。

(ii) $\lambda_n(\alpha)$ は, α に対して一意的に定まるか, あるいは, α について連続かどうかは f の性質に依存する。

ここでの我々の目的は, (2) の関係も (1) の場合に一般化することにより, 上の Remark (ii) で述べたような, $\alpha > 0$ に対する $\lambda_n(\alpha)$ の性質を調べることで

ある。以下, $N=1$ を仮定する。

定理. (3) $dC_n(\alpha)/d\alpha = 2\alpha \lambda_n(\alpha)$

が, 次の場合に成り立つ。

(a) $f(\alpha, u) = f(u)$ (autonomous), さらに $f(u)/u \uparrow \infty$ as $u \uparrow \infty$.

この場合は, $\forall \alpha > 0$ に対し, $\lambda_n(\alpha)$ は一意的に定まる。

(b) f が autonomous とは限らない場合は次を仮定する。

- f は α, u について解析的。

- $f(\alpha, u)$ が $u > 0$ について単調増加で, $\exists a, b, R \geq 0$ が存在して,

$$|f(\alpha, u)| \leq a|u|^R + b$$

をみたす。

- $f(\alpha, u) > 0$ if $u > 0$

このとき, a.e. $\alpha > 0$ に対し, (3) をみたす $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ が存在する。

!

Remarks. (i) (a) の場合, $\lambda_n(\alpha)$ は α について連続であるが, (b) の場合は open problem である。さらに, $\lambda_n(\alpha)$ の一意性も未解決である。

(ii) (3) では, $C_n(\alpha)$ を いまなり α で微分していきが,

実は, $C_n(\alpha)$ が α の連続関数であることも自明ではない。

(iii) 過去の結果について。

この方面の仕事は少なく, 先の Remark で与えた, R. Chiappinelli の仕事¹⁾が最も新しい仕事である。そこで, 彼は, $|f(x, u)| \leq a|u| + b$ ($\exists a, b \geq 0$) の条件の下で, λ_n を, $-\Delta u = \lambda u$ in Ω , $u|_{\partial\Omega} = 0$ の第 n 固有値としたとき, $\forall \alpha > 0$ に対して,

$$|\lambda_n(\alpha) - \lambda_n| \leq 3\alpha + 5b|\Omega|^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1}$$

($|\Omega|$: Ω の体積)

を示した。これは,

$$\alpha^2 \lambda_n = \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_{u \in K} \int |\nabla u|^2$$

であることを利用して, $|\alpha^2 \lambda_n - C_n(\alpha)|$, $|C_n(\alpha) - \alpha^2 \lambda_n(\alpha)|$ を評価することにより得られた。

2° 基本的な補題

この節では, 定理 (b) にあたる部分の証明に用いる補題を示すことにする。

補題 1° 定理の仮定の下で, $\forall \alpha > 0$ に対して, (1) の変分固有値が存在する。

Remark: 存在に関しては, 次元が一般でも, f の増大度に条件をつければ示すことができる。

証明の方針 次の手順で示せばよい。

$$(i) \quad M_\alpha \underset{\downarrow}{\sim} \underset{\text{diff.}}{S} := \left\{ u \in \dot{W}^{1,2}(\Omega) ; \int |\nabla u|^2 = 1 \right\}$$

$$u \mapsto \frac{u}{\|\nabla u\|} \in S$$

(ii) φ は M_α 上, 下に有界

(iii) φ は M_α 上, Palais-Smale 条件を満たす: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_\alpha$; $\{\varphi(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$: 有界, $\varphi'_\alpha(u_n) := \varphi'(u_n) - (\varphi'(u_n)u_n)u_n / \alpha^2 \rightarrow 0$ in $\dot{W}^{1,2}(\Omega)'$ が収束列を含む。これは Sobolev の埋蔵定理により示せる。

これらの条件は、容易に証明でき、(i)~(iii) の条件が成り立てば、Rabinowitz の定理 (Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in Eigenvalues of Nonlinear Problems, CIME Cremonese, Roma 1974 pp 141-195) により, $c_n(\alpha)$ が critical value であることが示される。

g. e. d.

補題 2 $c_n(\alpha)$ は, α の連続関数である。

証明の方針 $c_n(\alpha)/\alpha^2$ の連続性を示す。

$$c_n(\alpha)/\alpha^2 = \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_{u \in K} \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha s) / \alpha \, ds \right\}$$

であることを注意する。

直接示すのは難しいので背理法で示す。

$\exists \alpha_0 > 0, \exists \delta > 0, \alpha_k \rightarrow \alpha_0 \text{ as } k \rightarrow \infty \text{ s.t.}$

$$|C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 - C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2| > \delta$$

と仮定して、部分列をとる。

$$(i) \quad C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 > C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2$$

$$(ii) \quad C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 < C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2$$

となる無限部分列が少なくとも一つは存在する。簡単のため、(i)の場合のみを示そう。

$$0 < C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 - C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 = \inf_{K_n(1)} \sup_K \left\{ \int |\nabla u|^2 + \right.$$

$$\left. 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k ds \right\} - \inf_{K_n(1)} \sup_K \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 ds \right\} \quad (*)$$

$\varepsilon > 0$: 十分小さくとり、 $K_\varepsilon \in K_n(1)$ と。

$$C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 < \sup_{K_\varepsilon} \{ \dots \} < C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 + \varepsilon$$

ととり、このとき、簡単な計算により、

$$(*) \leq \inf_{K_n(1)} \sup_K \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k ds \right\}$$

$$- \sup_{K_\varepsilon} \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 ds \right\} + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{K_\varepsilon} \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k ds \right\} - \sup_{K_\varepsilon} \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2 \int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 ds \right\} + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{K_\varepsilon} \left| 2 \int dx \int_0^u (f(x, \alpha_k s)/\alpha_k - f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0) ds \right| + \varepsilon$$

$\therefore \varepsilon$ 、 $k \rightarrow \infty$ とすれば矛盾となる。 g. e. d.

Remark: $f(x, u)$ が $(u > 0)$ で単調増加関数であれば, $C_n(\alpha)$ は単調増加関数となる。実際 $\alpha > \alpha_0$ とすれば, $u = \alpha v$, $v \in M_1$ とし,

$$\begin{aligned} 2\varphi(u) &= \alpha^2 \int |\nabla v|^2 + 2 \int dx \int_0^{\alpha v} f(x, s) ds \\ &= \alpha^2 \int |\nabla v|^2 + 2 \int dx \int_0^{\alpha_0 v} \frac{\alpha}{\alpha_0} f(x, \frac{\alpha}{\alpha_0} t) dt \\ &\geq (\alpha/\alpha_0)^2 \cdot \alpha_0^2 \int |\nabla v|^2 + 2 \int dx \int_0^{\alpha_0 v} \frac{\alpha}{\alpha_0} f(x, t) dt \\ &\geq 2\varphi(\alpha_0 v) \end{aligned}$$

この結果を合わせ,

補題3° $dC_n(\alpha)/d\alpha$ は a.e. $\alpha > 0$ について, 存在する。

次に, 定理の(b)を示すときに必要な次の命題を用意する:

命題4° $\alpha_k \rightarrow \alpha$ as $k \rightarrow \infty$ とせよ。このとき, (部分列をとることにより)

$$\lambda_n(\alpha_k) \rightarrow \lambda_n(\alpha), \quad u_n(\alpha_k) \rightarrow u_n(\alpha)$$

となる列が存在する。

証明の方針 (i) $\alpha > 0$ をひとつ固定したとき, $\alpha_k \rightarrow \alpha$ の条件下で, $|\lambda_n(\alpha_k)| \leq \exists M < \infty$ を示す。実際, $\exists c_0 > 0$ s.t. $|\lambda_n(\alpha)| \leq c_0 C_n(\alpha)$ が簡単に示せるので, 補題2°により o.k. となる。

(ii) 必要ならば部分列を取り直して $\lambda_n(\alpha_k) \rightarrow \exists \lambda$ と

する。このとき, $v_n(\alpha_n) = \alpha_n u_n(\alpha_n) / \alpha_n \in M_\alpha$ とおくと, $(v_n(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は $E-S$ 条件を満たすことがわかる。よって, $\dot{W}^{1,2}(\Omega)$ で $v_n(\alpha_n)$ を収束する部分列をとり出すことができる; $v_n(\alpha_n) \rightarrow v \in M_\alpha$ as $n \rightarrow \infty$ 。このとき, $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ は, (i) の解である。ここで補題 2° により, $C_n(\alpha)$ の連続性を用いれば, 結局, $C_n(\alpha) = \lambda \varphi(v)$ が示される。これは, (λ, v) が変分固有値と, その対応する解であることを示している。

s. e. d.

3° 定理の証明

1° (a) の証明 (a) の部分は, H. Berestycki, J. Funct. Anal. 40 (1981), H. P. Heinz, J. Diff. eq. 62 (1986) の理論を組み合わせる。これにより, (i) のすべての解は, 変分固有値と, その対応する固有関数であることがわかる:

(i) (λ, u) を (i) の解とする。 u の内部の零点の数を $(k-1)$ 個 とすると,

$$\lambda_{k-1}[f(u)] < \lambda < \lambda_k[f(u)]$$

が成り立つ。これにより, (i) の解 (λ, u) のまわりで

陰関数定理を用いることができる。これを示すには、 $f(u)/u$ の単調性と、(1) の方程式を微分したものも考えればよい。そこで、 $f(x, u) = f(u)$ の仮定がきいてくる。

(iii) 比較定理 $(\lambda, u), (\mu, v)$ が (1) の解とする。

このとき $\lambda < \mu \iff |u| < |v|$ 。if u と v の零点の個数が一致。これを示すには、まず、 u と v の零点の位置がすべて一致することを用いて、

$B := u'v - uv'$ とおき、 t_0, t_1 を u の零点とすると、

$$B(t_1) - B(t_0) = 0 = (\mu - \lambda) \int_{t_0}^{t_1} uv \, dt + \int_{t_0}^{t_1} (f(t, u(t)) / u(t) - f(t, v(t)) / v(t)) u(t) v(t) \, dt$$

と f に対する仮定より主張を得る。

(iii) すべての解が変分固有値と、対応する変分固有関数であることをいうためには、 $\forall \alpha > 0$ に対して、

$(n-1)$ 個の内点・零点をもつ変分解が存在することを示せばよい。これは Heintz による。

(iv) (i) により、 $\lambda \mapsto u_\lambda$ は何回でも微分可能で、

$$dC_n(\alpha(\lambda))/d\lambda = dC_n(\alpha(\lambda))/d\alpha \cdot d\alpha/d\lambda$$

一方、 $\alpha(\lambda)$ に対応する $u_\alpha(\alpha(\lambda))$ を u_λ と書くと、

$$C_n(\alpha(\lambda)) = \int |\nabla u_\lambda|^2 + 2 \int dx \int_0^{u_\lambda} f(s) \, ds.$$

従って、

$$dC_n(\alpha u)/d\lambda = \int (-\Delta u' \cdot u - \Delta u \cdot u') + 2 \int f(u) u' dx \quad *$$

$$\therefore \because -\Delta u + f(u) = \lambda u \quad \dots (*)$$

両辺を λ で微分して,

$$-\Delta u' + f'(u) u' = u + \lambda u.$$

従って,

$$\begin{aligned} * &= \int (u + \lambda u' - f'(u) u') u + \int (\lambda u - f(u)) u' \\ &\quad + 2 \int f(u) u' dx \\ &= \alpha^2(\lambda) + 2\lambda \int u u' + \int f(u) u' dx - \int f'(u) u u' \end{aligned}$$

$\therefore \because (*)$ の両辺に u' を掛け x を積分すれば,

$$\int -\Delta u u' + \int f(u) u' = \lambda \int u u'$$

$$\int u (-\Delta u') + \int f(u) u' = \lambda \int u u'$$

$$\int u (u + \lambda u' - f'(u) u') + \int f(u) u' = \lambda \int u u'$$

従って,

$$\alpha^2(\lambda) - \int f'(u) u' u + \int f(u) u' = 0$$

$$\text{一方,} \quad \alpha^2(\lambda) = \int u^2$$

$$\text{従って,} \quad 2\alpha(\lambda) \frac{d\alpha}{d\lambda} = 2 \int u u'$$

(iii) より $d\alpha/d\lambda \neq 0$ 従って,

$$dC_n(\alpha u)/d\alpha = 2\alpha(\lambda) \lambda \quad \text{p.e.d.}$$

2° (b) の証明 $\alpha > 0$: fix. α の α による,

$C_n(\alpha)$ は微分可能とす。

命題 4° により, $(\lambda_n(\alpha_k), u_n(\alpha_k)) \rightarrow (\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$

$\alpha_k \rightarrow \alpha$ as $k \rightarrow \infty$, $\alpha_k \neq \alpha$ とする列を選び, $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ において展開することを考える。

(i) $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ が線型化作用素が退化していない場合は (a) と同様にして,

$$dC_n(\alpha(\lambda))/d\alpha \cdot d\alpha(\lambda)/d\lambda = 2\alpha(\lambda)\lambda \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}$$

となる。ここで, $d\alpha(\lambda_0)/d\lambda_0 = 0$ の場合は, 両辺をさらに微分することにより, 初めて $d^k\alpha(\lambda_0)/d\lambda_0^k \neq 0$ になるまで微分すればよい。このような k は, 仮定と $\alpha_k \neq \alpha$ と, ことにより存在する。

(ii) $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ が線型化作用素が退化している場合は, Rabinowitz の "bifurcation from simple eigenvalue" により, $|\alpha| \ll 1$ を parameter として,

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \lambda_n(\alpha_k), \quad \lambda_0 = \lambda_n(\alpha), \quad u_0 = u_n(\alpha).$$

$$u = u(\alpha) = u_n(\alpha_k) = u_0 + \alpha \phi + \alpha^2 \xi_1 + \dots$$

ここで ϕ は, $\int \phi^2 = 1$ をみたす,

$$\begin{cases} -\Delta \phi + f(u_0) \phi = \lambda_0 \phi & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解。このときも, (i) と同様にして, 計算することにより,

$$dC_n(\alpha(\alpha))/d\alpha \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha} = 2\alpha \lambda(\alpha) \frac{d\alpha}{d\alpha}$$

を得る。

同様に, $d^2\alpha/ds^2 \neq 0$ となる R を求めればよい。

g.e.d.