

Euler Products for Multiple Zeta Functions

東工大・理 黒川信重 (Nobushige Kurikawa)

多重ゼータ関数の「オイラー積表示」を多重双曲正弦関数の場合に述べる。

r 個のゼータ関数 $Z_i(s)$ ($i=1, \dots, r$) が有理型関数で

$$Z_i(s) = \prod_{p \in \mathbb{C}} (s-p)^{m_i(p)}$$

と重複度関数 $m_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ により表示される

とき (ここでは, $\exp(\text{多項式})$ の因子は無視する)

多重ゼータ関数 $Z_1(s) \otimes \dots \otimes Z_r(s)$ を

$$Z_1(s) \otimes \dots \otimes Z_r(s) = \prod_{p_i \in \mathbb{C}} (s - (p_1 + \dots + p_r))^{m(p_1, \dots, p_r)}$$

$$m(p_1, \dots, p_r) = m_1(p_1) \dots m_r(p_r) \times \begin{cases} 1 & \dots \text{すべての } \operatorname{Im}(p_i) \geq 0 \\ (-1)^{r-1} & \dots \text{すべての } \operatorname{Im}(p_i) < 0 \\ 0 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

により定義する。さらに $Z_i(s)$ は関数等式とオイラー積表示

$$Z_i(s) = \prod_p H_p^i(N(p)^{-s})$$

をもつとする。ただし, $H_p^i(T) \in 1 + T \mathbb{C}[[T]]$ とする。
このとき, 明示公式 (跡公式)

$$\sum_p M_i(p) = \sum_p W_i(p)$$

が成立する。したがって, 多重明示公式

$$\sum_{p_1 \rightarrow p_r} M(p_1 \rightarrow p_r) = \sum_{p_1 \rightarrow p_r} W(p_1 \rightarrow p_r)$$

が成立する。よって, W が上記の多重セータ関数

$Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s)$ を与えるように選んで, M が
簡単な関数になっていけば オイラー積表示

$$Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s) = \prod_{p_1 \rightarrow p_r} H_{p_1 \rightarrow p_r}(N(p_1)^{-s}, \dots, N(p_r)^{-s})$$

$$H_{p_1 \rightarrow p_r}(T_1, \dots, T_r) \in 1 + (T_1, \dots, T_r) \mathbb{C}[[T_1, \dots, T_r]]$$

をもつ。実際, 形式的には, これは成立する。ここで
重要な事は $Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s)$ の定義における $m(p_1 \rightarrow p_r)$
の符号条件であり, これを取り換えると, 一般には うまく
いかない。($H_{p_1 \rightarrow p_r}(T_1, \dots, T_r)$ が 上記 の よう には 取 れ ない)

さて、簡単な実例を多重双曲正弦関数の場合に
2つ述べる。ただし、 $\exp(\text{多項式})$ の項は無視してい
ることに注意。これを $\cong$ で示す。

定理1 $M > 1$ のとき $r = 2, 3, \dots$ に対して

$$(1 - M^{-s})^{\otimes r} = \underbrace{(1 - M^{-s}) \otimes \dots \otimes (1 - M^{-s})}_{r \text{ 個}}$$

$$\cong \exp \left(- \sum_{k=1}^r \frac{1}{(2\pi i)^{k-1}} h_r^{(k-1)} \left(\frac{s \cdot \log M}{2\pi i} \right) \text{Li}_k(M^{-s}) \right).$$

ここで、 $\text{Re}(s) > 0$,

$$h_r(T) = \frac{(T+r-1) \dots (T+1)}{(r-1)!},$$

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \quad \text{は } k\text{-次対数関数。}$$

一般の $(1 - M_1^{-s}) \otimes \dots \otimes (1 - M_r^{-s})$ の表示は簡単では
ないが $r=2$ のときは次が成立する。

定理2 $M, N > 1$ に対して $\frac{\log M}{\log N}$ が無理数で

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \left\| m \frac{\log M}{\log N} \right\|^{1/m} \geq 1 \quad \text{をみたすとする。}$$

このとき $\operatorname{Re}(s) > 0$ において

$$\begin{aligned} (1-M^{-s}) \otimes (1-N^{-s}) \cong \exp \left(\frac{1}{2i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cot \left(\pi m \frac{\log M}{\log N} \right) M^{-ms} \right. \\ \left. + \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cot \left(\pi n \frac{\log N}{\log M} \right) N^{-ns} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log(1-M^{-s}) + \frac{1}{2} \log(1-N^{-s}) \right). \end{aligned}$$

このような M, N の例は 次の 2 つが 代表的な応用がある:

① $\frac{\log M}{\log N} = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$ となる 代数的数 α, β がある。

② $\frac{\log M}{\log N}$ が 代数的数。

(ただし, ともに $\frac{\log M}{\log N}$ は 無理数 とする.)

なお, 定理 2 の $(1-M^{-s}) \otimes (1-N^{-s})$ は 実質的に Shintani [4] によって 導入された。 $M=N$ のときは Hölder (1886) が 起源 である。 Hölder, Shintani とともに この関数を F と表示している。

また, 定理 1 は 階数 1 の セルバーグ ゼータ関数の ガンマ因子 の 計算 に 応用 があり, ガンマ因子は

Barnes の多重ガンマ関数の種になることがわかる。
 これは リーマン 面 の セルバーグゼータ関数のガンマ因子
 の計算 (Vignéras [5] と Cartier-Voros [1]) の拡張
 になっている。これらの結果およびその他の応用
 については 論文 [2] [3] を参照下さい。

文 献

- [1] P. Cartier and A. Voros : "Une nouvelle interprétation
 de la formule des traces de Selberg" C.R. Acad. Sci. Paris
307 (1988) 143-148.
- [2] N. Kurokawa : "Multiple zeta functions: an example"
 1990 preprint = Proc. "Zeta Functions in Geometry" (1990年8月東京).
- [3] N. Kurokawa : "Multiple sine functions and Selberg zeta
 functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) March, 61-64.
- [4] T. Shintani : "On a Kronecker limit formula for
 real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167-199.
- [5] M.-F. Vignéras : "L'équation fonctionnelle de la
 fonction zêta de Selberg du groupe modulaire
 $PSL(2, \mathbb{Z})$ " Astérisque 61 (1979) 235-249.