

光干渉計を用いた量子位相推定探索アルゴリズム

著者 大頭拓斗 author Takuto Ozu¹ 著者 森立平 author Ryuhei Mori²

¹ 東京工業大学情報理工学院

1 序論

量子位相推定は量子計量学や量子計算において非常に重要なアルゴリズムである。量子位相推定はユニタリ行列の未知の固有値を求めるアルゴリズムに対応し、素因数分解を高速に解く Shor のアルゴリズムや線型方程式を解く HHL アルゴリズムなどの量子アルゴリズムのサブルーチンとして用いられている。つまり量子位相推定を高い精度で行うことはこれらのアルゴリズムの精度向上につながる。

一般に量子位相推定において位相推定精度は、単一光子に位相シフトを適用した回数 N によって限界を与えられる。この推定プロセスを最適化することで平均二乗誤差の理論的限界が $\pi^2/N^2 + O(1/N^4)$ であることを示すことができる。この限界を Heisenberg Limit (HL) と呼ぶ。 $O(1/N^2)$ であるような平均二乗誤差を HL オーダーと呼ぶ。

しかし、実際に理論限界を達成することは非常に難しい。そこで Berry ら [1] は光干渉計を用いて実現可能な量子状態と測定を用いて平均二乗誤差が HL オーダーとなる手法を提案した。しかし Berry らの手法で得られる平均二乗誤差は HL オーダーであるものの、HL とは定数倍のギャップが存在する。この定数倍のギャップを小さくすることを目的として上野 [3] は Berry らの手法で用いられる量子状態を一般化し、より精度の高い位相推定を可能とするような入力状態を探索するアルゴリズムを提案した。しかし上野のアルゴリズムは効率があまり良くなく、 N が大きいと計算時間が急激に増大することが問題となっている。そこで本研究では、大きな N に対してより効率的に精度の高い入力状態の探索をするアルゴリズムを提案する。また、Berry ら、上野の先行研究において利用されていた推定精度の評価をする関数について一般化を行い、一般化された評価関数についての性質を考える。

本論文の構成を説明する。第 2 章では本研究で扱う光干渉計である Mach-Zehnder 干渉計、及びそれを用いた量子位相推定について説明する。第 3 章では位相推定を入力状態の準備、測定、位相推定値の決定の 3 つのプロセスに分割した後、位相推定精度の評価を定義することで、位相推定値の最適化、及び Mach-Zehnder 干渉計での実現性を問わない測定方法の最適化について考える。第 4 章では Mach-Zehnder 干渉計を用いて実現可能な入力状態、測定を用いた推定手法に関する先行研究、及びその中で最適な入力状態に関するアルゴリズムの先行研究を示す。そして第 5 章、第 6 章では本研究の成果を示す。まず第 5 章では先行研究 [3] で与えられたアルゴリズムに対して入力状態の探索方法、およびプログラムの計算時間のオーダーの改善を行った。改善したアルゴリズムを用いて 90 以下の N について探索した結果、 $N = 35, 42, 60, 75, 90$ において先行研究 [1] で提案された入力状態よりも良い精度を与える状態があることを示した。最後に第 7 章では第 3 章における位相推定精度のコス

ト関数の定義を一般化し、一般のコスト関数における最適な位相推定値および最適な測定を考えた。結果、一般のコスト関数のもとで、推定精度の評価は困難であることがわかった。

2 光干渉計を用いた量子位相推定

2.1 Mach-Zehnder 干渉計、光の干渉

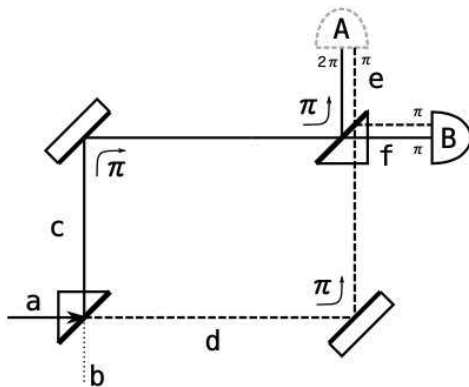


図 1: Mach-Zehnder 干渉計の光路 a から光が入射した際の概略図。三角形はビームスプリッター、長方形は反射鏡を表している。太線は各機器での反斜面。また、2つの光子検出器をそれぞれ検出器 A,B と呼ぶ。

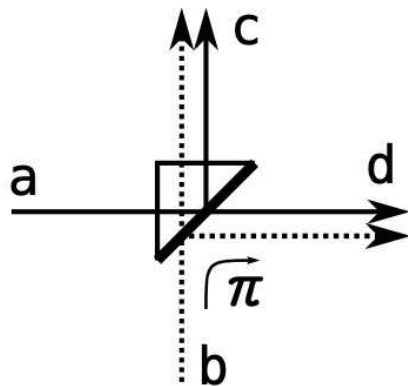


図 2: ビームスプリッターの概略図。光路 b から入射し表面で反射する光の位相は π 変化する。そのほかの光は変化しない。

光は波動性を持ち、複数の光は位相差によって強めあったり弱めあったりする。この現象を光の干渉と言う。そして、この光の干渉を発生させて様々な物理量を計測する機器を光干渉計と呼ぶ。本研究では特に Mach-Zehnder 干渉計を用いて実現可能な測定について考える。Mach-Zehnder 干渉計はビームスプリッター、反射鏡及び光子検出器から構成される。ビームスプリッターとは通過する光を等しい強さの反射光、透過光に分割するものである。また、光は屈折率の小さな媒質から大きな媒質に対して反射した際には位相が π 変化する。その逆では変化しない性質を持つ。

光路 a から光が入射した時を考えると、光路 c から光路 e を通る光は位相が 2π 変化する、その他の光は位相が π 変化する。この結果、光路 e,f では光の干渉が発生し光路 e では弱めあって消滅し、光路 f では強めあう。したがって光路 a から光が入射した際には常に検出器 B でのみ光が検出される。

2.2 重ね合わせ

次に単一光子が入射した時を考える。

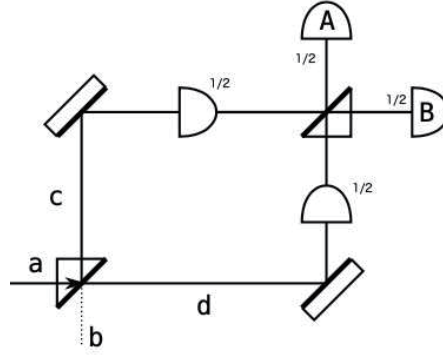


図 3: 光路 c,d で光子の検出を行う。この際各検出器で光子が検出される確率はすべて $\frac{1}{2}$ となっている。

まず、途中で検出を行わない場合では光の入射と同様に検出器 B でのみ光子は検出される。よって光路 e,f では干渉のような現象が発生していると考えられる。

一方で光路 c,d で検出を行うと。光子は確率 $1/2$ で光路 c,d のどちらか一方で検出され、二つ目のビームスプリッター通過後の検出器 A,B においても確率 $1/2$ でどちらか一方で検出される。この結果より、光子はビームスプリッター通過の際に確率 $1/2$ で光路を選択しており、これ以上分割のできない最小単位であると言える。以上の現象は光路 x に光子が存在する場合を $|1\rangle_x$ 、存在しない場合を $|0\rangle_x$ と表現し、ビームスプリッター通過後の状態を、光路 c に光子が存在する状態と光路 d に光子が存在する状態の重ね合わせ状態であると解釈できる。実際に、途中で検出を行わない場合の干渉計における状態の変化は

$$|1\rangle_a |0\rangle_b \xrightarrow{\text{BS1}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{mirror}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{BS2}} \frac{1}{2}(|1\rangle_e |0\rangle_f + e^{i\pi} |0\rangle_e |1\rangle_f + e^{i\pi} |1\rangle_e |0\rangle_f + e^{i\pi} |0\rangle_e |1\rangle_f) = e^{i\pi} |0\rangle_e |1\rangle_f \quad (3)$$

となり、検出器 B でのみ光子が検出されるという実験結果に等しくなる。

また、光路 c,d で光子の検出を行う場合においては確率 $|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi}|^2 = 1/2$ でどちらか一方の光路で検出され、その時状態は重ね合わせ状態から検出された光路に光子がある状態へと変化する。例えば光路 c で光子が検出されたとすると、

$$|1\rangle_a |0\rangle_b \xrightarrow{\text{BS1}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (4)$$

$$\xrightarrow{\text{mirror}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (5)$$

$$\xrightarrow{\text{測定}} e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d \quad (6)$$

$$\xrightarrow{\text{BS2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_e |0\rangle_f + e^{i\pi} |1\rangle_e |0\rangle_f) \quad (7)$$

となり、2つ目のビームスプリッター通過後は光路 e に光子が存在する状態と光路 f に光子

が存在する状態の重ね合わせ状態となり、確率 $1/2$ でどちらか一方の検出器で光子が検出されるという実験結果に等しくなっている。

2.3 位相シフト

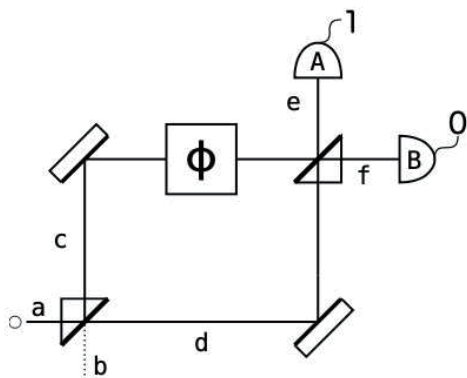


図 4: 光路 c 上に移送シフトを挿入する。

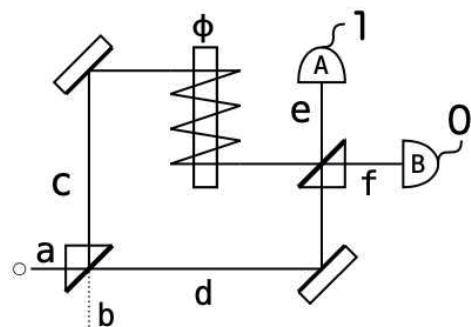


図 5: 位相シフトを複数回適用する。

次に、光路 c 上に位相シフトを挿入する。この位相シフトが位相を ϕ 変化させる場合、位相シフトによって光路 c に光子がある状態 $|1\rangle_c |0\rangle_d$ は $e^{i\phi} |1\rangle_c |0\rangle_d$ へと変化する。

この時、干渉計による状態の変化は

$$|1\rangle_a |0\rangle_b \xrightarrow{\text{BS1}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (8)$$

$$\xrightarrow{\text{mirror}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (9)$$

$$\xrightarrow{\text{位相シフト}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(\pi+\phi)} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (10)$$

$$\xrightarrow{\text{BS2}} \frac{1}{2} (e^{i\phi} |1\rangle_e |0\rangle_f - e^{i\phi} |0\rangle_e |1\rangle_f - |1\rangle_e |0\rangle_f - |0\rangle_e |1\rangle_f) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (e^{i\phi} - 1) |1\rangle_e |0\rangle_f - (e^{i\phi} + 1) |0\rangle_e |1\rangle_f \} \quad (12)$$

となり、この場合は確率的に検出器 A, B で光子が検出される。今後、検出器 A で光子が検出されることを『測定結果 1 を得る』、検出器 B で光子が検出されることを『測定結果 0 を得る』と呼ぶこととする。この時、測定結果 $u \in \{0, 1\}$ を得る確率 $P(u|\phi)$ は

$$P(u|\phi) = \left| \frac{1}{2} (e^{i\phi} + (-1)^u) \right|^2 \quad (13)$$

となる。

また、位相シフトを複数回かけた時を考える。 v 回のシフトを適用する場合 $|v\rangle \equiv e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d, |0\rangle \equiv$

$e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d$ と定めると

$$|1\rangle_a |0\rangle_b \xrightarrow{\text{BS1}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (14)$$

$$\xrightarrow{\text{mirror}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle + |0\rangle) \quad (15)$$

$$\xrightarrow{\text{位相シフト}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi\phi} |v\rangle + |0\rangle) \quad (16)$$

と表記できる。今後、位相シフト通過前の状態を入力状態と呼ぶ。

一般に Mach-Zehnder 干渉計を複数回使用する場合、 $|\bar{n}\rangle$ を入力状態のうち位相シフトにより $e^{in\phi}$ が作用している成分として定義する。例えば Mach-Zehnder 干渉計を 2 回使用し、位相シフトを k 回作用させる場合の入力状態は以下の様になる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle + |0\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle + |0\rangle) = \frac{1}{2}(|k\rangle \otimes |k\rangle + |k\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |k\rangle + |0\rangle \otimes |0\rangle) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2}(|2k\rangle + \sqrt{2}|\bar{k}\rangle + |\bar{0}\rangle) \quad (18)$$

また、位相を ϕ 変化させる位相シフトによる変換を U_ϕ で表す、すなわち $U_\phi |\bar{n}\rangle \equiv e^{in\phi} |\bar{n}\rangle$ と定義する。

2.4 光干渉計を用いた量子位相推定

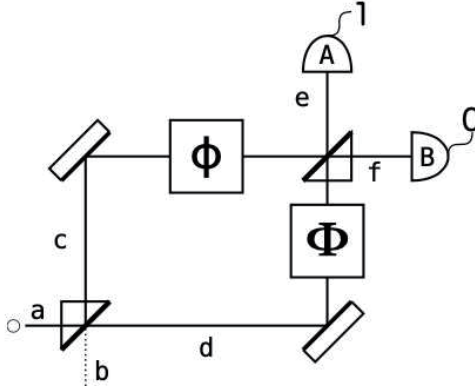


図 6: 光路 d 上に位相 Φ を任意に調整可能な位相シフトを挿入する

さらに、光路 d に透過する光の位相を Φ 変化させる位相シフトを挿入する。この位相 Φ

は任意に調整可能であるとする。この時、干渉計による状態変化は

$$|1\rangle_a |0\rangle_b \xrightarrow{\text{BS1}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (19)$$

$$\xrightarrow{\text{mirror}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i\pi} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (20)$$

$$\xrightarrow{\text{位相シフト}} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i(\pi+\phi)} |1\rangle_c |0\rangle_d + e^{i(\pi+\Phi)} |0\rangle_c |1\rangle_d) \quad (21)$$

$$\xrightarrow{\text{BS2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\{e^{i\phi}(|1\rangle_c |0\rangle_d - |0\rangle_e |1\rangle_f) - e^{i\Phi}(|1\rangle_e |0\rangle_f + |0\rangle_c |1\rangle_d)\} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2}\{(e^{i\phi} - e^{i\Phi}) |1\rangle_e |0\rangle_f - (e^{i\phi} + e^{i\Phi}) |0\rangle_e |1\rangle_f\} \quad (23)$$

となり、測定結果 $u \in \{0, 1\}$ を得る確率 $P(u|\phi)$ は

$$P(u|\phi) = \left| \frac{1}{2}(e^{i\phi} + (-1)^u e^{i\Phi}) \right|^2 = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^u \cos(\phi - \Phi)\} \quad (24)$$

となる。これは Φ に依存し、 Φ を調整させることで測定結果の確率分布を操作することができる。

以上の様に、位相シフトを挿入することで光子は検出器 A,B で確率的に検出される。光子の入射, 測定を繰り返し、その検出結果から光路 c における位相シフトによる位相の変化 ϕ を推定するアルゴリズムを量子位相推定と呼ぶ。

3 先行研究: 位相推定精度の限界

3.1 量子位相推定のプロセス

位相シフトの適用回数を N とすると、任意の入力状態は $|\bar{0}\rangle$ から $|\bar{N}\rangle$ の重ね合わせ状態

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^N \psi_k |\bar{k}\rangle, \quad \sum_{k=0}^N |\psi_k|^2 = 1, \psi_k \in \mathbb{C} \quad (25)$$

と表せる。

m 個の測定結果を $\vec{u}_m \in \{0, 1\}^m$ 、位相の推定値を $\tilde{\phi}(\vec{u}_m)$ とすると量子位相推定は入力状態の準備、測定、推定の 3つのプロセスに分割できる。

$$\text{入力状態 } |\psi\rangle \xrightarrow{\text{位相シフト}} \sum_{k=0}^N \psi_k e^{ik\phi} |\bar{k}\rangle \xrightarrow{\text{測定}} \vec{u}_m \xrightarrow{\text{推定}} \tilde{\phi}(\vec{u}_m) \quad (26)$$

本章では推定値の最適化を行い、最適な測定について説明する。

3.2 位相推定精度の評価

測定したい未知の位相を ϕ とする。この時、位相推定精度はコスト関数 $C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi)$ を用いて次の式で表される平均コスト $\langle C \rangle$ を用いて評価される。

$$\langle C \rangle = \sum_{\vec{u}_m} \int P(\phi, \vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi \quad (27)$$

ここでコスト関数は

$$C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) = 2 - 2 \cos(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi) = 4 \sin^2 \frac{\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi}{2} \quad (28)$$

を利用する。ここで $\delta\phi \equiv \tilde{\phi} - \phi$ が十分小さい時、(28) は二乗誤差に一致する。

3.3 最適な位相推定値

本節では位相推定値 $\tilde{\phi}(\vec{u}_m)$ を得られた結果 $\vec{u}_m$ に対して最適化する。最適な推定値は各 $\vec{u}_m$ に対して平均コスト $\langle C \rangle$ を最小化するものなので

$$\int P(\phi|\vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi \quad (29)$$

を最小化するものになる。よって解くべき式は (28) を用いて

$$\frac{d}{d\tilde{\phi}} \int P(\phi|\vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi = \frac{d}{d\tilde{\phi}} \int P(\phi|\vec{u}_m) 4 \sin^2 \frac{\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi}{2} d\phi \quad (30)$$

$$= \int P(\phi|\vec{u}_m) 2 \sin(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi) d\phi \quad (31)$$

$$= \frac{1}{i} \int P(\phi|\vec{u}_m) (e^{i(\tilde{\phi}-\phi)} - e^{-i(\tilde{\phi}-\phi)}) d\phi = 0 \quad (32)$$

以降、 $re^{i\theta} \equiv \int e^{i\phi} P(\phi|\vec{u}_m) d\phi$ とすると

$$\frac{d}{d\tilde{\phi}} \int P(\phi|\vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi = \frac{r}{i} (e^{i(\tilde{\phi}-\theta)} - e^{-i(\tilde{\phi}-\theta)}) \quad (33)$$

$$= 2r \sin(\tilde{\phi} - \theta) \quad (34)$$

と表され、 $\tilde{\phi} = \theta$ の時に最小値を取ることがわかる。つまり、測定結果に対して最適な位相の推定値は

$$\tilde{\phi} = \arg \int e^{i\phi} P(\phi|\vec{u}_m) d\phi = \arg \langle e^{i\phi} \rangle \quad (35)$$

である。ここで期待値 $\langle \rangle$ は ϕ の $\vec{u}_m$ に対する事後分布上 $P(\phi|\vec{u}_m)$ でとられている。

また平均コストの値は

$$\langle C \rangle = \sum_{\vec{u}_m} \int P(\phi, \vec{u}_m) 2 \{1 - \cos(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi)\} d\phi \quad (36)$$

$$= 2 - \sum_{\vec{u}_m} P(\vec{u}_m) \int P(\phi|\vec{u}_m) (e^{i(\tilde{\phi}-\phi)} + e^{-i(\tilde{\phi}-\phi)}) d\phi \quad (37)$$

$$= 2 - \sum_{\vec{u}_m} P(\vec{u}_m) 2r \cos(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \theta) \quad (38)$$

と表されて、 $r = |\langle e^{i\phi} \rangle|$ であることをふまえて最適な $\tilde{\phi}$ を用いると

$$\langle C \rangle = 2 - 2 \sum_{\vec{u}_m} P(\vec{u}_m) |\langle e^{i\phi} \rangle| \quad (39)$$

$$= 2 \left(1 - E(|\langle e^{i\phi} \rangle|)\right) \quad (40)$$

となる。ここで期待値 E は $P(\vec{u}_m)$ 上でとる
 また ϕ の分布は未知で一様分布、つまり

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (41)$$

であるとすれば、ベイズの定理より

$$E(|\langle e^{i\phi} \rangle|) = \sum_{\vec{u}_m} P(\vec{u}_m) \left| \int e^{i\phi} P(\phi|\vec{u}_m) d\phi \right| \quad (42)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} \left| P(\vec{u}_m) \int e^{i\phi} P(\phi|\vec{u}_m) d\phi \right| \quad (43)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} \left| P(\phi) \int e^{i\phi} P(\vec{u}_m|\phi) d\phi \right| \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{u}_m} \left| \int e^{i\phi} P(\vec{u}_m|\phi) d\phi \right| \quad (45)$$

である。以上より平均コストは $\mu \equiv E(|\langle e^{i\phi} \rangle|)$ として

$$\langle C \rangle = 2(1 - \mu) \quad (46)$$

と表される。以降、測定結果に対する推定値は最適であり、 ϕ の分布は一様分布であるとする。

3.4 最適な測定

次に最適な測定方法について考える。入力状態は (25) で表される。また、測定結果 $\vec{u}_m$ を得る測定の POVM を $P_{\vec{u}_m}$, $\sum_{\vec{u}_m} P_{\vec{u}_m} = 1$ と表せて、この時位相が ϕ である時に測定結果 $\vec{u}_m$ を得る条件付き確率は

$$P(\vec{u}_m|\phi) = \langle \psi | U_\phi^\dagger P_{\vec{u}_m} U_\phi | \psi \rangle \quad (47)$$

と表される。測定を最適にすることでコストを最小にしたいので μ を最大にすればよく

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{u}_m} \left| \int e^{i\phi} \langle \psi | U_\phi^\dagger P_{\vec{u}_m} U_\phi | \psi \rangle d\phi \right| \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{u}_m} \left| \int e^{i\phi} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \langle \vec{l} | \psi_l^* e^{-il\phi} P_{\vec{u}_m} e^{ik\phi} \psi_k | \vec{k} \rangle d\phi \right| \quad (49)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1}^* \psi_k \langle \vec{k+1} | P_{\vec{u}_m} | \vec{k} \rangle \right| \quad (50)$$

$$\leq \sum_{\vec{u}_m} \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_{k+1}^* \psi_k \langle \vec{k+1} | P_{\vec{u}_m} | \vec{k} \rangle| \quad (51)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_{k+1}^* \psi_k| \sum_{\vec{u}_m} |\langle \vec{k+1} | P_{\vec{u}_m} | \vec{k} \rangle| \quad (52)$$

と評価でき、等号は各 $\vec{u}_m$ に対し全ての k で $\psi_{k+1}^* \psi_k \langle k+1 | P_{\vec{u}_m} | k \rangle$ の主角が等しいときに成立する。

また、POVM $P_{\vec{u}_m}$ は半正定値行列なので $P_{\vec{u}_m} = \sqrt{P_{\vec{u}_m}^\dagger} \sqrt{P_{\vec{u}_m}}$ と分解できて、コーシーシュワルツの不等式より

$$\sum_{\vec{u}_m} |\langle k+1 | P_{\vec{u}_m} | k \rangle| = \sum_{\vec{u}_m} \sqrt{\langle k | \sqrt{P_{\vec{u}_m}^\dagger} \sqrt{P_{\vec{u}_m}} | k+1 \rangle \langle k+1 | \sqrt{P_{\vec{u}_m}^\dagger} \sqrt{P_{\vec{u}_m}} | k \rangle} \quad (53)$$

$$\leq \sum_{\vec{u}_m} \sqrt{\langle k+1 | P_{\vec{u}_m} | k+1 \rangle} \sqrt{\langle k | P_{\vec{u}_m} | k \rangle} \quad (54)$$

$$\leq \sqrt{\sum_{\vec{u}_m} \langle k+1 | P_{\vec{u}_m} | k+1 \rangle} \sqrt{\sum_{\vec{u}_m} \langle k | P_{\vec{u}_m} | k \rangle} \quad (55)$$

$$= \sqrt{\langle k+1 | I | k+1 \rangle \langle k | I | k \rangle} = 1 \quad (56)$$

が得られる。ここで各 $\vec{u}_m$ に対し全ての k で $\sqrt{P_{\vec{u}_m}} | k+1 \rangle = \alpha_{\vec{u}_m} \sqrt{P_{\vec{u}_m}} | k \rangle$ が成立する $\alpha_{\vec{u}_m} \in \mathbb{C}$ が存在するとき1つ目の等号が成立し、 $\langle k+1 | P_{\vec{u}_m} | k+1 \rangle = \beta \langle k | P_{\vec{u}_m} | k \rangle$ が成立する $\beta \in \mathbb{R}$ が存在するとき2つ目の等号が成立する。

以上全ての条件を満たす POVM $P_{\vec{u}_m}$ によって μ は最大値

$$\sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| |\psi_k| \quad (57)$$

をとり、平均コストは

$$\langle C \rangle = 2 \left(1 - \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| |\psi_k| \right) \quad (58)$$

となる。このように平均コストの最小値を与える測定は canonical 測定と呼ばれる。

また先行研究 [3] において canonical 測定に対し、最適な入力状態を選んだ際の平均コストは位相シフトをする回数 N を用いて $4 \sin^2 \frac{\pi}{2(N+2)}$ であることが示されている。これは理論的限界であり、この限界を Heisenberg Limit と呼ぶ。また $\langle C \rangle = O(1/N^2)$ となるときに $\langle C \rangle$ は HL オーダーであるという。

4 先行研究: Mach-Zehnder 干渉計で実現できる一般的な量子位相推定

4.1 適応的測定

一般的に canonical 測定を Mach-Zehnder 干渉計を用いて行うことはできない。(24) より Mach-Zehnder 干渉計における測定結果は自由に調整可能な位相 Φ によって確率的に得られる。よってこの位相 Φ を過去の測定結果に基づいて最終的なコストを小さくするように決定し測定を行う。このような測定は適応的測定と呼ばれ、自由に調整可能な位相 Φ をフィードバック位相と呼ぶ。

適応的測定における平均コストの計算を簡単とするため位相が ϕ であるときに k 個の測定結果を得る条件付き確率 $P(\vec{u}_k|\phi)$ を ϕ の関数とする。この時 $P(\vec{u}_k|\phi)$ は周期 2π の関数であるから

$$P(\vec{u}_k|\phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j(\vec{u}_k) e^{ij\phi} \quad (59)$$

とフーリエ級数展開できる。

この時 $P(\vec{u}_k|\phi)$ は確率分布なので実数であるから $p_{-j}(\vec{u}_k) = p_j(\vec{u}_k)^*$ が成立する。この時(45)は

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{u}_m} \left| \int \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j(\vec{u}_m) e^{i(1+j)\phi} d\phi \right| \quad (60)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} |p_{-1}(\vec{u}_m)| \quad (61)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} |p_1(\vec{u}_m)| \quad (62)$$

となる。

ここで、各測定は独立であるので k 回目の測定におけるフィードバック位相を Φ_k 、位相シフトを作用させる回数を n_k とすると(24)より

$$P(\vec{u}_k|\phi) = P(u_k|\phi) P(\vec{u}_{k-1}|\phi) \quad (63)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{u_k}}{4} e^{-i\Phi_k} e^{in_k\phi} + \frac{(-1)^{u_k}}{4} e^{i\Phi_k} e^{-in_k\phi} \right\} P(\vec{u}_{k-1}|\phi) \quad (64)$$

と表され、 $p_j(\vec{u}_k)$ の k に関する以下の漸化式を得る。

$$p_j(\vec{u}_k) = \frac{1}{2} p_j(\vec{u}_{k-1}) + \frac{(-1)^{u_k}}{4} e^{-i\Phi_k} p_{j-n_k}(\vec{u}_{k-1}) + \frac{(-1)^{u_k}}{4} e^{i\Phi_k} p_{j+n_k}(\vec{u}_{k-1}) \quad (65)$$

$$p_0(\vec{u}_1) = \frac{1}{2} \quad (66)$$

$$p_{n_1}(\vec{u}_1) = \frac{(-1)^{u_1}}{4} e^{-i\Phi_1} \quad (67)$$

$$p_{-n_1}(\vec{u}_1) = \frac{(-1)^{u_1}}{4} e^{i\Phi_1} \quad (68)$$

4.2 適応的測定におけるよい入力状態

先行研究[1]では、Mach-Zehnder 干渉計を用いて実現可能な入力状態と適応的測定を用いることで HL を達成する手法を数値計算より示している。

経験的事実 1 (Berry et al. 2009 [1]) 単一光子に対し 2^k 回位相シフトをかけたものを M 回ずつ行うとする、つまり入力状態

$$|\psi\rangle = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^s (|2^{s-1}\rangle + |0\rangle) \otimes \cdots \otimes (|2^1\rangle + |0\rangle) \otimes (|2^0\rangle + |0\rangle) \right)^{\otimes M} \quad (69)$$

に対し、フィードバック位相を $\Phi_k = \max \sum_{u_k=0}^1 |p_{n_k}(\vec{u}_k)|$ として適応的測定を行なって得られる平均コストは $N = M(2^s - 1)$ として

$$\langle C \rangle = \begin{cases} O(1/N) & (M = 1, 2) \\ O(1/N^{3/2}) & (M = 3) \\ O(1/N^2) & (M = 4, 5, 6) \end{cases} \quad (70)$$

となる。

また、先行研究 [3] においてより一般の入力状態の平均コストの計算手法が提案されている。

ϕ を一様分布としているため $\Phi_1 = 0$ とし、フィードバック位相 Φ_k の決定方法は $P(\vec{u}_k|\phi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j(\vec{u}_k) e^{ij\phi}$ の $p_j(\vec{u}_k)$ が 0 とならない j のうち最小の自然数を v_k として、 $|p_{v_k}|$ を最大化するように取る。つまり

$$v_k \equiv \min \left\{ f \left(\left| \sum_{i=1}^k s_i n_i \right| \right) \mid s_i \in \{-1, 0, 1\} \right\} \quad (71)$$

$$f(x) \equiv \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases} \quad (72)$$

とする。

この時、分割は $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ の大小関係を持つとする。ここで分割が 2 の冪乗からなる場合、 $v_k = n_k$ となり、経験的事実 1 におけるフィードバック位相の定め方に等しくなっている。以上の定め方に従った適応的測定から得られる一般の入力状態の平均コストを計算するアルゴリズムは以下となる。

Algorithm 1 適応的測定から得られる平均コストを計算するアルゴリズム [3]

Require: N の m 分割 $[n_1, n_2, \dots, n_m]$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$)

Ensure: 平均コスト $\langle C \rangle$

```

 $\mu \leftarrow 0$ 
for  $u_1 u_2 \dots u_m \in \{0, 1\}^m$  do
     $v_1 \leftarrow n_1$ 
     $\Phi_1 \leftarrow 0$ 
     $p_0 \leftarrow \frac{1}{2}$ 
     $p_{n_1} \leftarrow \frac{(-1)^{u_1}}{4} e^{-i\Phi_1}$ 
    for  $j = 2 \text{ to } m$  do
         $v_j \leftarrow \min \left\{ f \left( \left| \sum_{i=1}^j s_i n_i \right| \right) \mid s_i \in \{-1, 0, 1\} \right\}$ 
         $\Phi_j \leftarrow \arg \max_{x \in [0, 2\pi)} \sum_{u \in \{0, 1\}} \left| \frac{1}{2} p_{v_j} + \frac{(-1)^u}{4} e^{-ix} p_{v_j - n_j} + \frac{(-1)^u}{4} e^{ix} p_{v_j + n_j} \right|$ 
        for all  $k$  do
             $p_k \leftarrow \frac{1}{2} p_k + \frac{(-1)^{u_j}}{4} e^{-i\Phi_j} p_{k - n_k} + \frac{(-1)^{u_j}}{4} e^{i\Phi_j} p_{k + n_j}$ 
        end for
    end for
     $\mu \leftarrow \mu + |p_1|$ 
end for
 $\langle C \rangle \leftarrow 2(1 - \mu)$ 
return  $\langle C \rangle$ 

```

先行研究 [3] では Algorithm 1 を用いて $N = 18, 28$ のときにおいて経験的事実 1 よりも良い分割が存在することが数値実験により示されている。

しかし上野のアルゴリズムは効率があまり良くなく、 N が大きいと計算時間が急激に増大することが問題となっており、 $N = 22$ 以下および $N = 28$ においてのみ探索されていた。この原因としてフィードバック位相 Φ_j の計算回数が分割の要素数に応じて大きくなることが挙げられる。その計算回数は N の m 分割として $(m-1)2^m$ 回つまり計算時間は $O(m2^m)$ になっている。

5 本研究の結果: より効率的な入力状態の探索

5.1 本研究の手法

本研究では、大きな N に対してより効率的に精度の高い入力状態の探索をするアルゴリズムを提案する。本節では本研究におけるアルゴリズムの手法について説明する。

5.1.1 分割の探索方法

- Beam-Search

先行研究では位相シフトする回数 N に対し全探索を行っていたが、ここではあるシフトする回数 N に対する最適な分割を見つけた際に $N+1$ における最適な分割との

関連を考える。まず、先の Algorithm 1 を用いた際に N が 10 以上 18 以下に対する最適な分割を表 1 に示す。

表 1: $N \in [10, 18]$ における最適な分割

N	分割
10	$\{2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$
11	$\{2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$
12	$\{2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$
13	$\{2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$
14	$\{2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$
15	$\{2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$
16	$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$
17	$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$
18	$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$

表 1 から N が $N + 1$ に増えた際には分割に 1 を追加するか分割のある値に 1 加算した分割になるのではないかと推測し、この法則に基づき上位 10 個の分割に対して Beam-Search を用いることで $N = 28$ までの分割に対し最適な分割を探索しようと試みた。しかし実際には $N = 23$ の際に上位 10 個の分割全てが 2 と 1 からなるのに対し $N = 24$ で最適な分割は $\{4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$ となっていた。

この結果は、フィードバック位相の決定方法が $p_{v_k}(\vec{u}_k)$ を最大化するよう定められており、この時共役である $|p_{-v_k}(\vec{u}_k)|$ も共に最大化され、単に $p_1(\vec{u}_k)$ を最大化することよりも最終的な $p_1(\vec{u}_m)$ への寄与が大きくなっている。しかし 1 加算では 3 が 1 つだけでできてしまうことになり v_2 以降が全て 1 になってしまうことにより $p_1(\vec{u}_m)$ への寄与が少なくなり平均コストの値が高くなっていると考えられる。

● 全探索における枝刈り

次に N に対して全分割を探索するのではなく計算しない分割の枝刈りを考える。まず、上野のアルゴリズムにおけるフィードバック位相の定め方は Berry らの手法を一般化したものとなっていたがこれは 2 の冪乗の数からなる分割に対して良い結果を与えるものとなっており、そのような分割に対しては Berry らの手法と等しくなっていた。よって探索する分割は 2 の冪乗の数からなる分割に限り、フィードバック位相の定め方は Berry らの手法に等しいものを扱った。

また、実現不可能であるが理論上最適な canonical 測定を行った場合のコストと実現可能な適応的測定におけるコストについて、既知の分割における適応的測定のコストが今から計算する分割における canonical 測定のコストよりも小さいのならばその分割に対し適応的測定を行う必要はない。しかし、canonical 測定における平均コストと適応的測定における平均コストには大きな隔たりがあり、単純な比較では十分な枝刈りを行うことができなかった。

ここで適応的測定を行う必要があるものの中で適応的測定と canonical 測定のコストの比を考えたところ、その値は最低でも 1.19 倍程度。特に自らの研究内で得られた

現状最適な分割はその比が少なくとも 1.4 倍以上になっていた。この結果に基づき、canonical 測定におけるコストの 1.35 倍が既知の適応的測定のコストを超えている分割に対しては計算を行わないという枝刈りを行うこととした。

前者の Beam-Search に対しては良い結果を得ることが出来なかったため、今後後者の全探索における枝刈りのみ利用して考えるものとする。

5.1.2 アルゴリズムの改善

またアルゴリズムそのものの改善を考える。Algorithm 1 の計算時間は分割数 m に対してフィードバック位相の計算回数から $O(m2^m)$ の計算時間となっている。しかし実際には 2^m 通りの測定結果全てに対して計算する必要はなく、測定結果の内 $u_1, u_2, \dots, u_k$ が等しいならばその結果から導き出すフィードバック位相 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k+1}$ は等しいものになっている。よって再帰的にフィードバック位相を計算することで計算回数を 2^m 回、つまり計算時間を $O(2^m)$ へとオーダーの改善を行なった。

改善を行い与えられた分割に対し再帰的に適応的測定から得られる平均コストを計算するアルゴリズムを次頁の Algorithm 2 に示す。

ここで $p_0(\vec{u}_0) = 1, p_n(\vec{u}_0) = 0 (n \neq 0)$ とすることで (65), (66), (67), (68) の漸化式と等しいものを与えている。また、 $\Phi_1 = \arg \max_{x \in [0, 2\pi)} \left| \sum_{u \in \{0,1\}} \frac{1}{2} p_{n_1} + \frac{(-1)^u}{4} e^{-ix} p_0 + \frac{(-1)^u}{4} e^{ix} p_{2n_1} \right|$ は任意の値で達成される。 ϕ は一様分布なので計算の簡単のため $\Phi_1 = 0$ とした。

5.2 数値計算結果

Algorithm 2 を用いて $N \leq 90$ における精度の良い入力状態を求めた。Berry らの手法では特殊な N に対してのみ手法が提案されていたが本研究のアルゴリズムでは任意の N に対して精度の良い入力状態を求めることが出来た。結果を図 7 に示す。

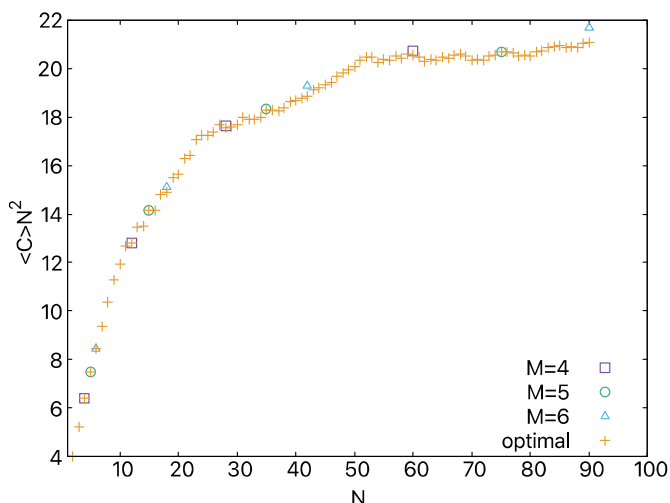


図 7: 今回求めた分割。任意の $N \leq 90$ に対して分割を求めた。

Algorithm 2 再帰的に適応的測定から得られる平均コストを計算するアルゴリズム

Require: N の m 分割 $[n_1, n_2, \dots, n_m]$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$)

Ensure: 平均コスト $\langle C \rangle$

```

 $\mu \leftarrow 0$ 
 $p_0 \leftarrow 1$ 
 $j \leftarrow 1$ 
function  $F(j, p_0, p_1, \dots, p_N, \mu)$ 
  if  $j = m + 1$  then
    return  $\mu + |p_1|$ 
  end if
  if  $j = 1$  then
     $\Phi_j \leftarrow 0$ 
  else
     $\Phi_j \leftarrow \arg \max_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{u \in \{0, 1\}} |\frac{1}{2}p_{n_j} + \frac{(-1)^u}{4}e^{-ix}p_0 + \frac{(-1)^u}{4}e^{ix}p_{2n_j}|$ 
  end if
  for  $u \in \{0, 1\}$  do
     $k = 0$ 
    while  $k \leq N$  do
       $p_k \leftarrow \frac{1}{2}p_k + \frac{(-1)^{u_j}}{4}e^{-i\Phi_j}p_{k-n_k} + \frac{(-1)^{u_j}}{4}e^{i\Phi_j}p_{k+n_j}$ 
       $k \leftarrow k + n_j$ 
    end while
     $\mu \leftarrow F(j + 1, p_0, p_1, \dots, p_N, \mu)$ 
  end for
  return  $\mu$ 
end function
 $\langle C \rangle \leftarrow 2(1 - \mu)$ 
return  $\langle C \rangle$ 

```

また、 $N = 35, 42, 60, 75, 90$ において、先行研究で提案されたものよりもよい分割を発見することができた。この結果を表 2 に示す。Berry らの先行研究において HL オーダーを達成する中でも最も定数倍ギャップの小さい $M = 5$ においても、僅かながら改善することができた [1]。

表 2: 上段:Berry らによって提案されていた分割, 下段:本研究により見つかった分割

N	M	分割	$\langle C \rangle N^2$
35	5	$\{4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	18.1120435249
		$\{4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	18.0675232523
42	6	$\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	19.1283984930
		$\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	18.7000818835
60	4	$\{8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$	20.6363833447
		$\{8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1\}$	20.4743118574
75	5	$\{8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	20.6317720008
		$\{8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$	20.6176843064
90	6	$\{8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	21.6299778748
		$\{8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	21.0279961464

6 本研究: コスト関数の一般化

6.1 コスト関数の定義

先行研究 [1][3] ではコスト関数を (28) で定めたものを利用していった。しかし実際には他のコスト関数を考えることができる。 $\delta\phi \equiv \tilde{\phi} - \phi$ としてコスト関数 $C(\delta\phi)$ が満たすべき条件は周期 2π で周期的であること、 $\delta\phi = 0$ において最小値 0 を取ること、 $\delta\phi = \pi$ で最大値 $C_{\max}$ を取ること、 $\delta\phi$ に対し偶関数であること、 $\delta\phi \in (0, \pi)$ で単調増加することである [2]。まず、偶関数かつ周期が 2π であることからフーリエ級数展開出来て

$$C(\delta\phi) = \sum_{n \geq 0} c_n \cos(n\delta\phi) \quad (73)$$

と表せる。この時、コスト関数が満たさなければいけない必要条件として

$$\sum_{n \geq 0} c_n = 0, \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_n = C_{\max}, \quad \sum_{n \geq 1} -n^2 c_n \geq 0, \quad \sum_{n \geq 1} -n^2 (-1)^n c_n \leq 0 \quad (74)$$

が存在する [2]。ここで $\sum_{n \geq 1} -n^2 c_n$ はコスト関数の 2 階微分の $\delta\phi = 0$ における値、 $\sum_{n \geq 1} -n^2 (-1)^n c_n$ は $\delta\phi = \pi$ における値になっている。

$c_0 = 2, c_1 = -2$ とすると条件を満たし、(28) に一致する。この時 $\sum_{n \geq 1} -n^2 c_n = 2$ となっており、 $\delta\phi = 0$ 近傍において二乗誤差に等しくなっている。

7 一般のコスト関数に対する最適な位相推定値、および最適な測定

次にコスト関数が (73) で表される際の最適な位相推定値を考える。まず、平均コストの値は (27) に ϕ が一様分布であることを用いて

$$\langle C \rangle = \sum_{\vec{u}_m} \frac{1}{2\pi} \int P(\vec{u}_m|\phi) \sum_{n \geq 0} c_n \cos n(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi) d\phi \quad (75)$$

$$= \sum_{\vec{u}_m} \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{4\pi} \int P(\vec{u}_m|\phi) (e^{in(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi)} + e^{-in(\tilde{\phi}(\vec{u}_m) - \phi)}) d\phi \quad (76)$$

となる。ここで

$$\sum_{\vec{u}_m} \frac{1}{2\pi} \int P(\vec{u}_m|\phi) d\phi = 1 \quad (77)$$

$$(78)$$

であり、(59) より

$$\int P(\vec{u}_m|\phi) e^{in\phi} d\phi = 2\pi p_{-n}(\vec{u}_m) \quad (79)$$

なので $p_n(\vec{u}_m) \equiv r_n(\vec{u}_m) e^{i\theta_n(\vec{u}_m)}$ ($n \geq 1$) とすると

$$r_n = |\langle e^{in\phi} \rangle| \quad (80)$$

$$\theta_n = \arg \langle e^{in\phi} \rangle \quad (81)$$

であり、平均コストは

$$\langle C \rangle = c_0 + \sum_{\vec{u}_m} \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{2} \left(e^{in\tilde{\phi}(\vec{u}_m)} p_n(\vec{u}_m) + e^{-in\tilde{\phi}(\vec{u}_m)} p_{-n}(\vec{u}_m) \right) \quad (82)$$

$$= c_0 + \sum_{\vec{u}_m} \sum_{n \geq 1} c_n r_n(\vec{u}_m) \cos \left(n\tilde{\phi}(\vec{u}_m) + \theta_n(\vec{u}_m) \right) \quad (83)$$

と表せる。

この時測定結果 $\vec{u}_m$ に対して最適な位相推定値は

$$\min_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{n \geq 1} c_n r_n(\vec{u}_m) \cos(n\tilde{\phi}(\vec{u}_m) + \theta_n(\vec{u}_m)) \quad (84)$$

を達成する x となる。しかし、 $n \geq 1$ において $c_n \neq 0$ となる項が複数ある時 $\tilde{\phi}$ の値を θ_n, r_n, c_n を用いて表すことは非常に困難である。例えば $c_0 = 1, c_1 = -\frac{4}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$ とすると全ての条件を満たした上で $\delta\phi = 0$ 近傍において四乗誤差となるようなコスト関数を与えることができるがこの時

$$\frac{d}{d\tilde{\phi}} \int P(\phi|\vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi = \frac{4r_1}{3} \sin(\tilde{\phi} + \theta_1) - \frac{2r_2}{3} \sin(2\tilde{\phi} + \theta_2) \quad (85)$$

となり、 $\frac{d}{d\tilde{\phi}} \int P(\phi|\vec{u}_m) C(\tilde{\phi}(\vec{u}_m), \phi) d\phi = 0$ の解を $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ を用いて表すことは出来ない。

このことから既存のコスト関数における μ に値するものを置くことが出来ず、canonical 測定におけるコストの算出においても $\tilde{\phi}$ が残り実際の値を計算できないこととなる。

そのほかに $c_0 = \frac{5}{4}, c_1 = -1, c_2 = -\frac{1}{4}$ とすることで $\delta\phi = 0$ 近傍で二乗誤差、 $\delta\phi = \pi$ 近傍で 4 次関数的になるものや、 $c_0 = \frac{18}{13}, c_1 = -\frac{17}{13}, c_2 = -\frac{1}{13}$ とすることで $\delta\phi = 0$ 近傍で二乗誤差、 $\delta\phi = \pi$ 近傍で 2 次関数的になるコスト関数を与えることができるが、これらに関しても同様のことが成り立つ。

また、 $n \geq 1$ において $c_n \neq 0$ となる項が一つの場合、コスト関数の周期は $\frac{2\pi}{n}$ となり、 c_0, c_1 のみが非零の値を持たなければならない。しかしこれは既存のコスト関数の定数倍となってしまう。

以上のことから、既存のコスト関数よりもよいコスト関数を与えることは困難であると考えられる。

8 結論

8.1 まとめ

より大きな N に対し効率的に平均コストを計算するアルゴリズムを提案した。そのアルゴリズムを用いることで $N \leq 90$ において効率的に適応的測定におけるよい入力状態を求めた。結果 $N = 35, 42, 60, 75, 90$ において先行研究 [1] で提案された分割よりも小さな平均コストを与える分割が存在することを示した。

また、コスト関数の一般化を先行研究 [2] の条件に基づき行った。その条件を満たす他のコスト関数の例を挙げたが、それらは最適な測定を行った際の平均コストの値や最適な位相推定値を計算することが困難であり従来のコスト関数よりもよいものを与えることは困難であるとわかった。

8.2 今後の課題

Algorithm 2 は分割の要素数 m に対して指数的に計算時間がかかるものとなっている。よって分割の要素数に対して制限を加えることで大きな N に対しても効率的に計算をすることができることとなる。この分割の要素数に対して制限を適切に与え、探索アルゴリズムを効率化することは今後の課題である。

また、フィードバック位相の定め方は任意の分割に対し良いものではない。各測定結果の最終的な $p_1(\vec{u}_m)$ に対しての影響を重み w_n として $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n p_n(\vec{u}_k)|$ の値を最大化するようにフィードバック位相を定めることなどが考えられ、これを効率的に計算するようなアルゴリズムの構築も課題となる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、森研究室及び国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所に多くの支援をいただきました。御礼申し上げます。

参考文献

- [1] D. W. Berry, B. L. Higgins, S. D. Bartlett, M. W. Mitchell, G. J. Pryde, and H. M. Wiseman. How to perform the most accurate possible phase measurements, *Phys. Rev. A*, 80:052114, Nov. 2009.
- [2] R. Demkowicz-Dobrzanski, M. Jarzyna, and J. Kolodynski. Quantum limits in optical interferometry, *Progress in Optics*, vol. 60, pages 345–435. Elsevier, 2015.
- [3] 上野康平, 光干渉計を用いた一般的な量子位相推定, 学士論文, 東京工業大学, Mar. 2019.