

境界要素法における数値積分誤差補正法

日立製作所 エネルギー研究所

小泉 眞 (Makoto Koizumi)

1. まえがき

境界要素法で現れる特異積分を数値的に取り扱う方法については、これまで多くの方法が提案されてきた。その代表的なものとしては、ガウス・ルジャンドルの積分公式を用いるもの¹⁾、二重指数関数型数値積分公式を用いるもの²⁾³⁾、座標変換して、特異性を弱くしてから数値積分をするもの⁴⁾⁵⁾⁶⁾、積分区間を小区間に分割してから数値積分をするもの⁷⁾⁸⁾がある。しかしながら、これら従来の方法では、二次元では、かなりの効果をあげているが、三次元では計算時間がかかなり増大することが予想され必ずしも十分な効果をあげていない。そこで、ここでは別なアプローチを考える。即ち、積分誤差を評価し、これより数値積分結果を補正する。この考え方は一見奇妙である。実際、積分誤差は厳密な積分が実行できて初めて評価できるものであり、通常は誤差のオーダーしか分からない。しかし、支配方程式の特解が分かっている場合、間接的に積分誤差を評価でき積分誤差を補正できる。この考え方に基づく方法として、等ポテンシャル条件で対角項を求める方法⁹⁾や楕圓¹⁰⁾や木須¹¹⁾らの領域内の点での立体角の積分

誤差により内点の計算誤差を補正する方法がある。ここでは、これらをより一般化した方法について述べる。

2. 領域内部の物理量計算時の誤差評価と補正の原理

境界要素法では、境界上の値を求めた後、次式により内点 i のポテンシャル Φ_i を求める。

$$\Phi_i = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial n} \Phi^* - \Phi_b \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.1)$$

ポテンシャルの勾配の計算は重み関数を微分した次の式で計算する。

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\alpha} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial n} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_\alpha} - \Phi_b \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial n \partial x_\alpha} \right) d\Gamma \quad (x_i = x, y, z) \quad (2.2)$$

ここで、 Φ_b は境界上のポテンシャルである。上式の要素積分を数値的に行うと積分誤差を含むことになる。そこで、積分を数値的に行うと言う意味で、(2.1)式及び(2.2)式をそれぞれ次のように書き換える。

$$\Phi_i = \text{Num} \left\langle \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial n} \Phi^* - \Phi_b \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\rangle \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\alpha} = \text{Num} \left\langle \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_b}{\partial n} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_\alpha} - \Phi_b \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial n \partial x_\alpha} \right) d\Gamma \right\rangle \quad (x_i = x, y, z) \quad (2.4)$$

ここで、 $\text{Num} \langle \cdot \rangle$ は数値積分を示す。積分誤差の大部分は核関数 Φ^* 及び $\partial \Phi^* / \partial n$ の近似誤差から生じると考えられる。そこ

で、各積分点における Φ^* 及び $\partial \Phi^* / \partial n$ に対するそれぞれの近似誤差を E_m^q 及び E_m^p とすると (2.3), (2.4) 式は、ポテンシャルの真値 Φ_i^* を用いて、次のように表せる。

$$\Phi_i = \Phi_i^\tau + \sum_m E_m^q \frac{\partial \Phi_b^m}{\partial n} + \sum_m E_m^p \Phi_b^m \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\alpha} + \sum_m \frac{\partial E_m^q}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi_b^m}{\partial n} + \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha} \Phi_b^m \quad (2.6)$$

各積分点での境界値 Φ_b^m 及び $\partial \Phi_b^m / \partial n$ を点 i の周りで、テーラ

ー展開すると、

$$\Phi_b^m = \Phi_i^\tau + \sum_k \frac{1}{k!} (\delta r^m \cdot \nabla)^k \Phi_i^\tau \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_b^m}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial n} + \sum_k \frac{1}{k!} (\delta r^m \cdot \nabla)^k \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial n} \quad (2.8)$$

$$\delta r^m \cdot \nabla = \sum_\alpha (x_\alpha^m - x_{\alpha i}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

となる。ここで、 δr^m は点 i から境界上の積分点までの間の距離ベクトルを示す。これを (2.5), (2.6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Phi_i = \Phi_i^\tau + \sum_m E_m^p \Phi_i^\tau + \sum_k \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \sum_m E_m^q (\delta r^m \cdot \nabla)^{k-1} (n \cdot \nabla) \right. \\ \left. + \frac{1}{k!} \sum_m E_m^p (\delta r^m \cdot \nabla)^k \right\} \Phi_i^\tau \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\alpha} + \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha} \Phi_i^\tau + \sum_k \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \sum_m \frac{\partial E_m^q}{\partial x_\alpha} (\delta r^m \cdot \nabla)^{k-1} (n \cdot \nabla) \right.$$

$$+\frac{1}{k!} \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha} (\delta r^m \cdot \nabla)^k \} \Phi_i^\tau \quad (2.10)$$

となる。上式は次のように書き直せる。

$$\Phi_i = \Phi_i^\tau + \varepsilon_0 \Phi_i^\tau + \sum_\alpha \varepsilon_1^\alpha \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} \varepsilon_2^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi_i^\tau}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_\alpha} \Phi_i^\tau + \sum_\beta \frac{\partial \varepsilon_1^\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\beta} + \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial \varepsilon_2^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 \Phi_i^\tau}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \dots \quad (2.12)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sum_m E_m^p, \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_\alpha} = \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha}, \quad \varepsilon_1^\alpha = \sum_m E_m^q n_\alpha + \sum_m E_m^p (x_\alpha^m - x_{\alpha i}) \\ \frac{\partial \varepsilon_1^\beta}{\partial x_\alpha} &= \sum_m \frac{\partial E_m^q}{\partial x_\alpha} n_\beta + \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha} (x_\beta^m - x_{\beta i}) \\ \varepsilon_2^{\alpha\beta} &= \sum_m E_m^q (x_\beta^m - x_{\beta i}) n_\alpha + (1 - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}) \sum_m E_m^p (x_\beta^m - x_{\beta i}) (x_\alpha^m - x_{\alpha i}) \end{aligned}$$

である。又、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーの δ である。上式において、 E_m^q 、 E_m^p は境界値に依存しない。従って、これらの和である ε_0 、 $\varepsilon_1 \dots$ 、は解析領域の形状、境界要素の分割及び数値積分の方法には依存するが、境界値に依存しない。即ち、解析領域の形状、境界要素の分割及び数値積分の方法などが決定されれば、(2.11)、(2.12)式の係数 ε_0 、 $\varepsilon_1 \dots$ 、を求めることができる。又、これらの値が求まれば、(2.11)、(2.12)式を解くことにより、積分誤差を求めかつ積分誤差を補正することができる。(2.11)、(2.12)

式の係数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ は既知の調和関数を用いることにより決定できる。即ち、既知の調和関数そのものの値と数値積分結果を比較することにより求めることができる。また、テーラー展開の打ち切り次数に応じた回数ポテンシャルの微分値の誤差を補正できる。既知の調和関数はテーラー展開の次数に応じて次のように選ぶ。

(a) テーラー展開の0次の項で打ち切る場合

0次の項に対応する調和関数は

$$\Phi = 1 \quad (2.13)$$

である。これを用いて、(2.11)式の係数 ε_0 が計算できる。

$$\varepsilon_0 = \sum_m E_m^{p=-1} \text{Num} \left\langle \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma \right\rangle \quad (2.14)$$

これを用いたポテンシャルの誤差補正式は(2.11)式より、次のようになる。

$$\Phi_i^{\tau} = \frac{\Phi_i}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.15)$$

この0次で打ち切る場合は楕圓らの立体角に依存する係数 C_i の積分誤差を用いて補正する方法と等価である。

(b) テーラー展開の1次の項で打ち切る場合

1次の項に対応する調和関数は

$$\Phi = (x_{\alpha} - x_{\alpha i}) \quad (x_{\alpha} = x, y, z) \quad (2.14)$$

である。このときの(2.11)式の係数 ε_i^a は次の通り。

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^a &= \sum_m E_m^q n_a + \sum_m E_m^p (x_a^m - x_{a i}) \\ &= \text{Num} \langle \int_{\Gamma} \{ \Phi^* n_a - \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} (x_a^m - x_{a i}) \} d\Gamma \rangle \quad (2.16)\end{aligned}$$

1 次の項まで展開する場合は、一回の微分係数が必要となる。この場合は、以上の係数の他に、(2.12)式の各係数の微分値を次式により計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_a} &= \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_a} = \text{Num} \langle - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_a \partial n} d\Gamma \rangle \quad (2.18) \\ \frac{\partial \varepsilon_1^\beta}{\partial x_a} &= \sum_m \frac{\partial E_m^q}{\partial x_a} n_\beta + \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_a} (x_\beta^m - x_{\beta i}) \\ &= \text{Num} \langle \int_{\Gamma} \{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_a} n_\beta - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_a \partial n} (x_\beta^m - x_{\beta i}) \} d\Gamma \rangle - \delta_{a\beta} \quad (2.19)\end{aligned}$$

(2.11)、(2.12)式を一次の項で打ち切って以上の係数を代入した次式を解くことにより、ポテンシャルとその勾配の積分誤差を補正することができる。

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \Phi_i^\tau + \varepsilon_0 \Phi_i^\tau + \sum_a \varepsilon_1^a \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_a} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_a} &= \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_a} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_a} \Phi_i^\tau + \sum_\beta \frac{\partial \varepsilon_1^\beta}{\partial x_a} \frac{\partial \Phi_i^\tau}{\partial x_\beta} \quad (2.20)\end{aligned}$$

2 次以上についても原理的に求めることはできるがここでは省略

する。

3. 要素マトリックス計算時への適用

解析領域内部の計算法の精度を上げても、境界上の値に誤差があれば、計算精度はそれ以上に向上しない。境界値を計算する場合の計算精度は、解析領域内部の値を計算する場合と同様に、積分核の特異性の強さに依存する。特に、薄板のように、隣接する接点間の距離が短い場合に作成されたマトリックスの精度が悪くなり、問題となる。

境界要素法では、(2.1)式において、点 i を境界上に置き離散化した次の方程式を解くことにより境界上でのポテンシャル Φ 及びフラックス $\partial \Phi / \partial n$ を求める。

$$[H_{ij}]\{\Phi_j\} - [G_{ij}]\left\{\frac{\partial \Phi_j}{\partial n}\right\} = 0 \quad (3.1)$$

ここで、

$$H_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{j \in \Delta \Gamma_m} \int_{\Delta \Gamma_m} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \Psi_j d\Gamma \quad (3.2)$$

$$G_{ij} = \sum_{j \in \Delta \Gamma_m} \int_{\Delta \Gamma_m} \Phi^* \Psi_j d\Gamma \quad (3.3)$$

Ψ_j は、要素内の物理量を補間する形状関数である。また、 C_i は立体角に依存する定数で点 i が滑らかな境界上にあるときは $1/2$ をとる。上記の積分には、通常数値積分が用いられる。しかし、

数値積分には誤差が伴う。この積分誤差を求めるため、前節の場合と同様に、既知の調和関数を用いる。Φが既知の調和関数であれば、Φは(3.1)式を満たすはずである。従って(3.1)式が満たされない場合、それは誤差を表していると考えられる。即ち、既知の調和関数を用いることにより誤差の評価ができる。誤差の要因としては、数値積分の誤差、物体形状を要素分割する際の形状近似に伴う誤差、及び、要素内の物理量を補間する形状関数の近似誤差がある。積分誤差を評価する場合、後の二つのモデル化に伴う誤差が現れないようにする必要がある。多くの境界要素法では、物体の形状を三角形や、四辺形などの要素を用いて多面体で近似している。また、要素内の形状関数には、一次や、二次の多項式を用いている。そこで、これらの近似に伴う誤差を生じないようにするため、次の調和関数を積分誤差の評価に用いる。

$$\Phi = 1 \quad (3.4)$$

$$\Phi = x_{\alpha} - x_{\alpha i} \quad (x_{\alpha} = x, y, z) \quad (3.5)$$

x_{α} は添字 α の1, 2, 3に応じて、 x, y, z の座標を表す。(3.4)式、(3.5)式を(3.1)式に代入すると次式を得る。

$$C_i + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} (x_{\alpha} - x_{\alpha i}) - \Phi^* n_{\alpha} \right\} d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

上式を離散化すると次式を得る。

$$[H_{ij}]\{1\}=\{\varepsilon_i^0\} \quad (3.8)$$

$$[H_{ij}]\{x_{\alpha j}-x_{\alpha i}\}-[G_{ij}]\{n_{\alpha}\}=\{\varepsilon_i^1\} \quad (3.9)$$

ここで、 ε は、離散化の際の数値積分に伴う誤差である。次に、(3.8)式、(3.9)式により導出された誤差を用いて、マトリックスを補正する方法について、二通り述べる。第1の方法はマトリックスの対角成分を補正する方法で、第2の方法は対角成分以外を補正する方法である。

(a) 第1の方法

従来、Hマトリックスの対角項は、物体が等ポテンシャルのときに湧きだしが無いと言う条件、即ち(3.6)式を満たすように次式から計算していた。

$$H_{ij} = - \sum_{i \neq j} H_{ij} \quad (3.10)$$

上式と(3.8)式を比較すると

$$H_{ii} = H_{ii}^0 - \varepsilon_i \quad (3.11)$$

となる。即ち(3.10)式はHマトリックスの対角項を補正することにより、積分誤差を近似的に補償することを意味する。

Gマトリックスの積分誤差を補正するためには、マトリックスの成分 G_{ij} を未知数として(3.1)式を解けばよいが、(3.1)式は特異であるため解けない。そこで、次善の策として次の方法を探る。数値積分において、(3.1)式の重み関数 Φ^* の分母が0に近いところで誤差が大きくなる。そこで、Gマトリックスの対角項が一番

大きい誤差を有していると考え、(3.11)式の場合と同様にGマトリックスの対角項について(3.9)式で表せる積分誤差を用いて近似的に補正し(3.7)式を満たすようにする。

$$G_{ii} = G_{ii} + \frac{\varepsilon_{ai}^1}{n_{ai}} \quad (3.12)$$

但し、節点*i*と*j*が二重節点になっている場合は次式を解くことにより誤差 ΔG_{ij} を求め G_{ij} を補正する。

$$\sum_{i \neq j} \Delta G_{ij} = -\varepsilon_{ai}^1 \quad (3.13)$$

$$G_{ij} = G_{ij} - \Delta G_{ij} \quad (3.14)$$

第1の方法はフラックスの保存がなされるようにGマトリックスを補正していることを意味している。

(b) 第2の方法

幾つかの数値積分の検討よれば、被積分要素との間の距離が0である所ではなく、僅かな距離が有るほうがむしろ誤差が大きい。そこで、対角項以外のマトリックスの成分を補正することを試みる。Hマトリックスの対角項は、別に節点が解析領域を見込む立体角 ω を計算することに依っても求められる^{1,2)}。

$$H_{ii} = C_i = \frac{\omega}{4\pi} \quad (3.15)$$

従って、(3.8)式の ε_i^0 は評価でき次式で表せる。

$$\varepsilon_i^0 = C_i + \sum_{i \neq j} H_{ij} \quad (3.16)$$

上式の ε_i^0 を用いて対角項以外の成分を補正する。対角項を除い

た場合、最も誤差の大きくなる所は、核関数の変化が最も大きくなる要素に含まれる節点である。Hマトリックスの場合核関数の形から立体角 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \Delta s / r^3$ が最大となる節点である。ここで、 Δs は節点が受け持つ表面積、 $\mathbf{n}$ は法線ベクトルである。この節点を j とするとマトリックス成分 H_{ij} は次のように補正できる。

$$H_{ij} = H_{ij} - \varepsilon_i^0 \quad (3.17)$$

Gマトリックスの場合、極座標変換を用いる積分法では節点 i と被積分要素が0のときは誤差が非常に小さいことが分かっている。従って、対角成分 G_{ii} は極座標変換を用いる積分法により正確に計算されていると考えられる。そこで、ここでも対角成分以外を補正することを考える。Hマトリックスの場合と同様に核関数の形から対角項以外で $\Delta s / r$ が最大となる節点を k とする。マトリックス成分 G_{ik} が(3.9)式を考慮すると次式により補正できる。

$$G_{ik} = G_{ik} + \frac{(\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^0 (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i))}{n_k} \quad (3.18)$$

4. 計算精度の検討

(1) 解析領域内部の計算をする場合

この積分補正法の精度を検証するため、図4.1に示す立方体の内部に計算点を設け、計算点の位置を変えて計算した。数値積分の方法としては、通常の高ス・ルジャンドル積分、二重指数関数型数値積分、及び極座標変換と高ス・ルジャンドル積分を組

み合わせたものを用いた（以下これを極座標積分法と称する）。計算条件は、立方体の表面で、ポテンシャル $\Phi = 1$ 、裏面で $\Phi = 0$ 、側面でフラックス $\partial \Phi / \partial n = 0$ とした。また、一般性を失わないので立方体の一辺の長さを 1 とした。各面は 2 次の 8 節点アイソパラメトリック用 1 舞で構成されており、全要素数は 6 である。積分点数は、極座標積分法で、 $8 \times 8 \times 4$ （ ρ 方向 8、 θ 方向 4 及び三角形領域の数 4）とした。二重指数関数型数値積分法では、極座標積分法と誤差のオーダーが合うように、 51×51 の積分点数を選んだ。全体のそれぞれの積分方法の違いに選べる数値計算の違いをみるため、立方体内部上下の中心付近の $1/4$ 範囲で計算した。

図 4.2 の a, b 及び c にポテンシャルの計算結果を示す。境界面に最も近い距離は、この場合、要素の大きさの 0.01 倍である。厳密解は次式で表せる。

$$\Phi = 1 - y \quad (4.1)$$

上式は (x, y, ϕ) 空間で平面を構成する。しかし、数値計算の結果は境界面近くで、誤差のため平面からずれている。とくに通常のガウス・ルジャンドル積分は積分点近傍で、大きなピークをもっている。

図 4.3 は 0 次のオーダの補正を行ったときのポテンシャルの計算結果である。二重指数関数型数値積分法と極座標積分法はほぼ、

平坦な面となる結果を与えるが、通常のガウス・ルジャンドル細分法は幾分誤差による平面からのずれが見られる。図4.4は極座標積分法に1次の補正を行ったもので、ほとんど厳密解と一致した平面がえられる。以上のように、ポテンシャルについては0次の補正でも、問題によっては満足できる結果がえられる。これに対して、ポテンシャルの勾配を計算する場合は、積分核の特異性が強くなるため、幾分結果が異なる。

図4.5にポテンシャルの勾配の計算結果を示す。a, b及びcの順序は図4.2の場合と同じである。厳密なポテンシャル勾配は次の通りである。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 \quad (4.2)$$

上式は $(x, y, \partial\Phi/\partial y)$ 空間内の x, y それぞれの座標軸に平行な平面を示す。計算結果はやはり、境界近傍で誤差のため、平面からのずれが大きくなっている。図4.6は0次の補正を加えた場合の結果である、図4.3の場合とは異なり、誤差が大きくなっているため、二重指数関数型数値積分法と極座標積分法でさえも平坦な結果を与えていない。図4.7は1次の補正を極座標積分法に加えたものである。図のように、1次の補正を加えることにより厳密解に近いほぼ平坦な解を得ることができる。以上のように、ポテンシャルの勾配を計算する場合は0次の補正だけでは不十分であると考えられる。

以上のようにポテンシャルの場合、補正のオーダーを1ランク上げると1/100ほど誤差が小さくなる。また、極座標積分法を組み合わせたほうが、他の数値積分法よりも良い結果を与える。又、ポテンシャルの勾配を計算する場合は1次の補正を加えたほうが良いと考えられる。

(2) 境界値を計算する場合

前節の補正法が有効かどうかを確認するため、図4.8に示すような直方体のx方向の辺の長さ(以下これを厚さとする) l_2 を変えて解析した。(1)の場合と同様に、解析条件は、裏面、即ち $x = 0$ の面のポテンシャルを0、表面、即ち $x = l_2$ の面のポテンシャルを1とした。ただし、境界面上に生じる誤差が分かるようにするため、要素分割は一つの面で 3×3 とし、表面全体で要素数を54とした。さらに、境界条件が異なる面が接合する立方体の各頂点には、三重節点を配置し、面の交わる各辺には、二重節点を配置した。そのため、全節点数は96となった。直方体の厚さ l_2 の変化の範囲は薄板を分割する場合を想定して、他の辺の長さ l_1 に対して $1 \sim 0.01$ と変化させた。これは、例えば、1mm厚の薄板を分割する場合100 x 100mmの大きさの要素を作成することに相当し、実用上よく現れる要素分割であると考えられる。図4.9に従来の極座標積分のみの場合、極座標積分に加えて積分点を集中するようにした場合、さらに、夫々にGマトリックスの

対角項に補正を加えた第1の方法による場合のフラックスの計算誤差は l_2/l_1 が小さくなるほど大きくなる。とくに $l_2/l_1 = 0.01$ では、従来の極座標積分のみの場合、計算誤差は $0.17(17\%)$ にも達する。極座標積分と積分点を集中する座標変換を組み合わせた場合、フラックスの計算誤差は $0.022(2.2\%)$ と1桁ほど小さくなる。これに対し、Gマトリックスの補正を加えると、 l_2/l_1 の $0.01 \sim 1.0$ の範囲で計算誤差が改善されており、その値は $10^{-6} \sim 10^{-7}$ ($10^{-4} \sim 10^{-5} \%$) の範囲で従来法に比べて 10^6 に改善されている。ポテンシャルの計算結果はフラックスのそれとは少し異なっている(図4.10)。従来の極座標積分のみの場合と積分点を集中する座標変換を組み合わせた場合とはフラックスの場合と同様に計算誤差は l_2/l_1 が小さくなるほど大きくなる。これに対し、Gマトリックスに補正を加えたものはフラックスの場合とは異なり計算誤差は l_2/l_1 が小さくなるほど大きくなり、Gマトリックスの補正の影響は小さくむしろ積分点を集中する座標変換の効果のほうが大きい。この理由は、ポテンシャルはHマトリックスの計算精度の影響を受けるためと考えられる。しかし、最大誤差は $0.0036(0.36\%)$ となり、従来法の $0.16(16\%)$ に比べて $1/50$ 程度に改善されている。

図4.11及び、図4.12は第2のマトリックスの補正方法による場合のフラックスの計算誤差及びポテンシャルの誤差を示す。この

場合の計算では、アスペクト比 l_2/l_1 を $0.001 \sim 1.0$ の範囲に拡大した。図のように、フラックス及びポテンシャルの誤差は伴にアスペクト比 l_2/l_1 の $0.001 \sim 1.0$ 広い範囲で小さくなっており、 $l_2/l_1 = 0.1 \sim 1.0$ の範囲では第 1 の方法と同程度の誤差であるが、 $l_2/l_1 = 0.001 \sim 0.1$ の範囲でポテンシャルの誤差の改善が著しく、その大きさは $10^{-13} \sim 10^{-14}$ となっている。以上のようにマトリックスの補正法としては、対角項を補正する第 1 の方法よりも対角項以外で積分核が最大となるマトリックスの成分を補正する第 2 の方法の方が誤差を低減でき優れている。

5. まとめ

境界要素法における計算精度を上げる方法として、解析領域内部の物理量を計算する場合と境界値計算用のマトリックス要素を計算する場合について、数値積分誤差を評価しこれを補正する方法を検討した。その結果は次の通りである。

- (1) 解析領域内部を計算する場合、数値積分結果を真値と誤差の項に分解し、誤差項の境界値を計算点の周りで、テーラー展開した。このときの展開の各係数については、既知の調和関数の数値積分により決定できることを示し、これにより、積分誤差の評価及び補正を可能にした。
- (2) 従来の立体角に依存する係数 C_i の誤差を用いて補正する方法はここで示した 0 次の補正と等価となる。

- (3) 上述の既知の調和関数を用いる方法を境界値用マトリックス要素の計算時へ拡張し、マトリックス要素の計算時の積分誤差を評価できることを示した。これを用いることにより、従来のHマトリックスの対角項を等ポテンシャル条件から計算することは、等ポテンシャル条件を満たすようにHマトリックスの積分誤差を補正することと等価であることを示すとともに、Gマトリックスの補正をも可能にした。
- (4) マトリックスの補正方法としては、対角項を補正する第1の方法と、対角項以外で積分核が最大となる成分を補正する第2の方法の二通りを示した。
- (5) 上記手法の妥当性をテスト問題により確認した。
- (i) 内点の補正法については補正の次数を1オーダー上げることにより誤差は1/100小さくなる。
- (ii) マトリックスの計算方法としては第2の方法の方が計算精度は良い。

参考文献

- (1) C. A. Brebbia: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London(1978)
- (2) T. Higashimachi, et al : "Interactive Structural Analysis System Using the Advanced Boundary Element Method", Boundary Elements, Proc of 5th Conf.

- Springer-Verlag, pp847-856, (1983)
- (3) 内川、他：「表面電荷法の改良」，電気学会論文誌A，101巻，5号，pp263-270，(1981)
- (4) F.J.Rizzo, et al : "An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelastostatics", Int. J. Num. Methods Eng, Vol.11, pp1753-1768, (1977)
- (5) M.Utamura, et al : "Development of Computer Program for Analyzing Three-Dimensional Pressure Field in Pressure Suppression System" J.Nucl. Sci.Tech., Vol22, No.9, pp733-741 (1985)
- (6) M.Koizumi, et al : "A New Approach to Singular Kernel Integration for General Curved Elements " Boundary Elements VIII, Proc of 8th Conf. Springer-Verlag, pp665-675, (1986)
- (7) J.C.Cox, et al : "A Recursive Integration Technique for Boundary Element Method in Elastostatics", Advanced Topics in Boundary Element Analysis, ADM-Vol.72, Winter Annual Meeting of ASME, pp133-153, (1985)
- (8) 坪井、他：「表面電荷法における数値積分の高速化」，電

気学会論文誌A, 107巻, 4号, pp201-208, (1987)

- (9) J.C.Lachat, et al: "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol10 pp991-1005, (1976)

- (1 0) 榎園、他: 「補正積分を使用した境界要素解析」, 電気学会論文誌A, 106巻, 4号, pp149-156, (1987)

- (1 1) H.Kisu, et al: "Boundary Element Analysis System Based on a Formulation with Relative Quantity", Boundary Elements X, Proc of 10th Conf. Springer-Verlag, (1988)

- (1 2) 北原、他: 「3次元動弾性問題におけるFREE Termの解析的計算法」, 境界要素法論文集, 第5巻, 境界要素法研究会, pp197-202, (1988)

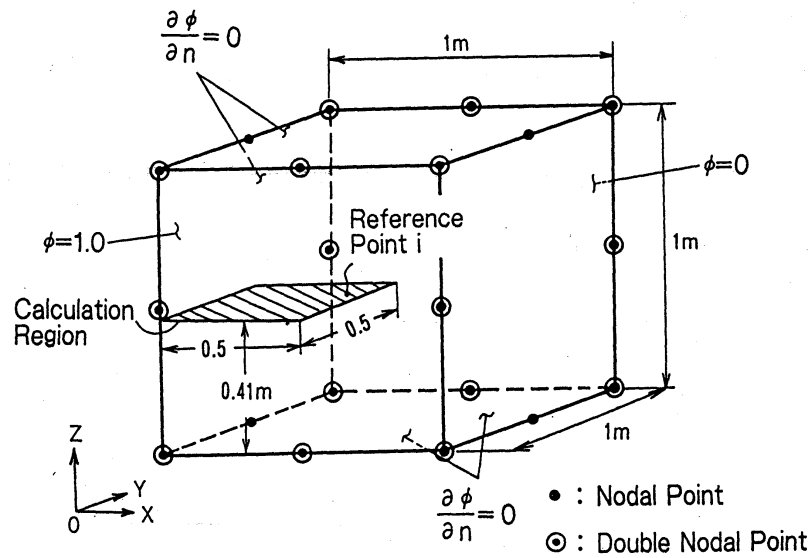


図4.1 解析体系と解析条件

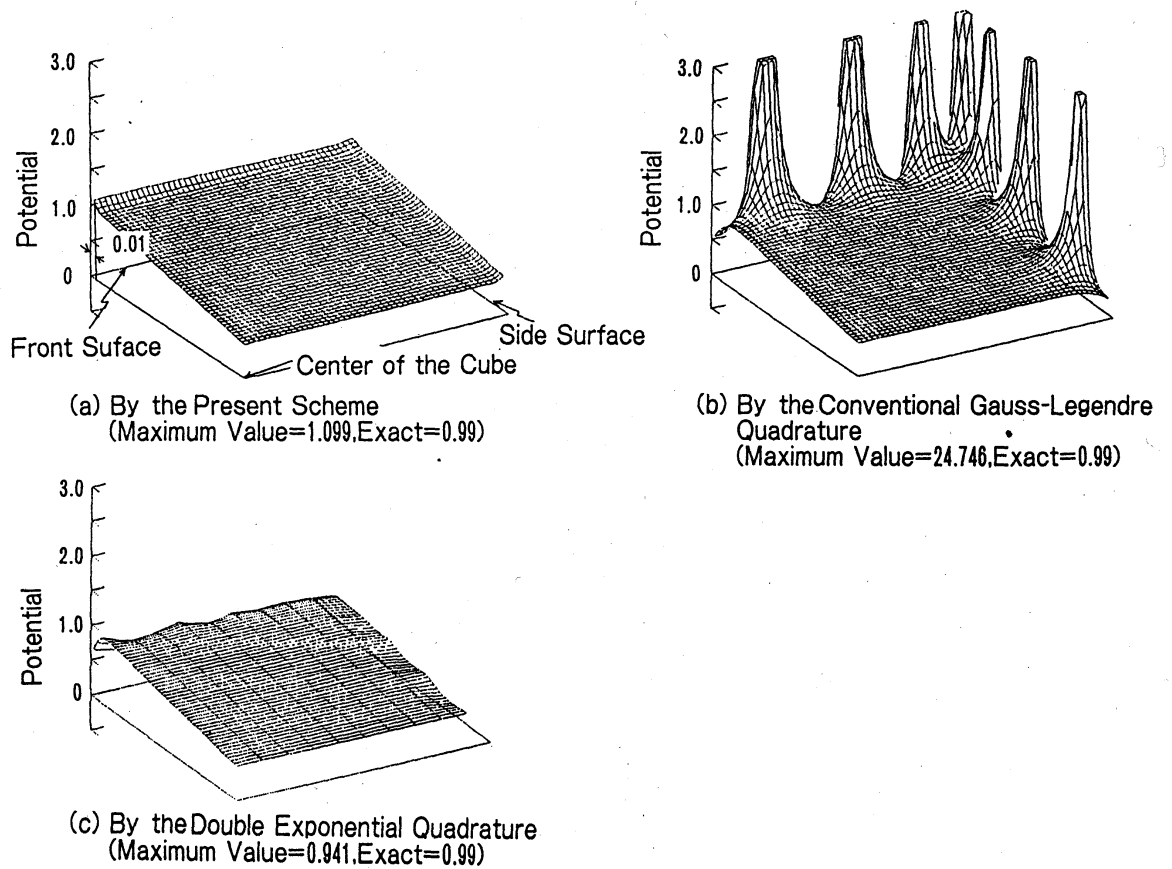
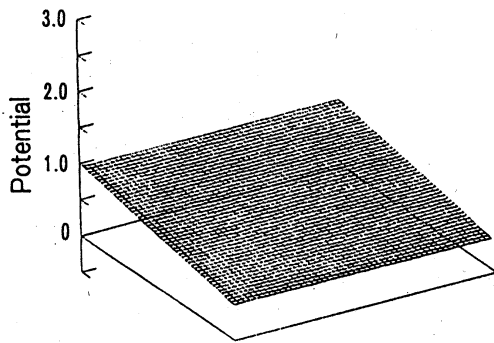
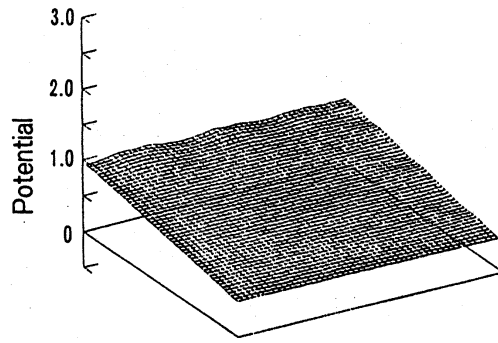


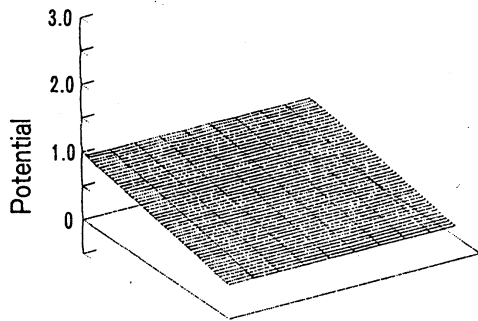
図4.2 誤差を補正しないときのポテンシャルの計算結果



(a) By the Present Scheme
(Maximum Value=0.992, Exact=0.99)



(b) By the Conventional Gauss-Legendre
Quadrature
(Maximum Value=1.020, Exact=0.99)



(c) By the Double Exponential Quadrature
(Maximum Value=0.979, Exact=0.99)

図 4.3 0 次の補正によるポテンシャルの計算結果

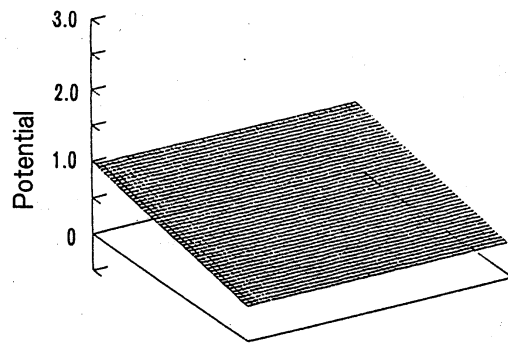
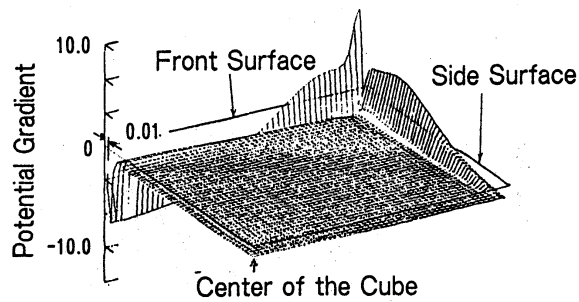
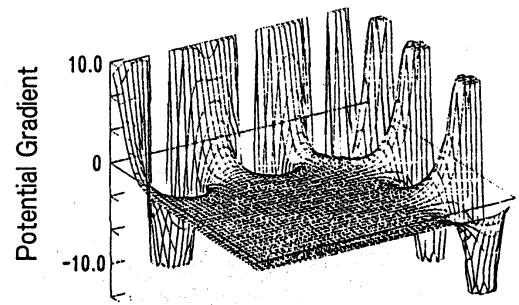


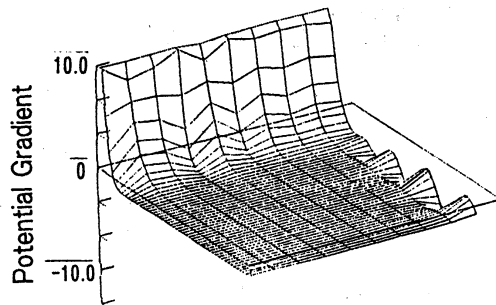
図 4.4 1 次の補正によるポテンシャルの計算結果
(Maximum Value=0.99002, Exact=0.99)



(a) By the Present Scheme
(Maximum Value=8.096, Minimum Value=-7.150,
Exact=-1.0)

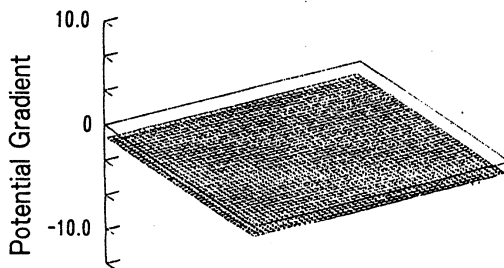


(b) By the Conventional Gauss-Legendre Quadrature
(Maximum Value=1246.4, Minimum Value=-4421.9,
Exact=-1.0)

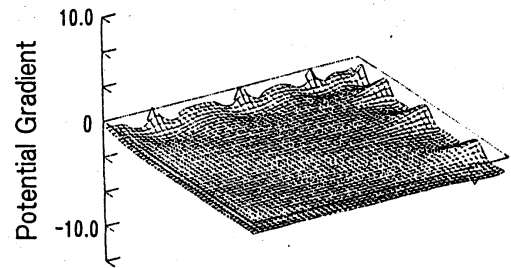


(c) By the Double Exponential Quadrature
(Maximum Value=16.413, Minimum Value=-2.309,
Exact=-1.0)

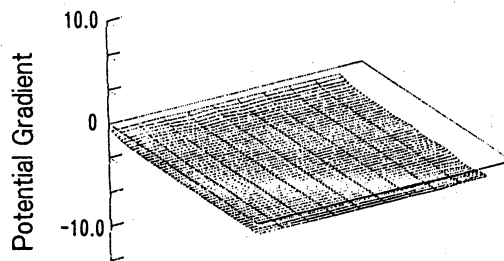
図 4.5 補正しないときのポテンシャル勾配 $\partial \Phi / \partial y$ の計算結果



(a) By the Present Scheme
(Maximum Value=-0.935, Minimum Value=-1.116,
Exact=-1.0)



(b) By the Conventional Gauss-Legendre Quadrature
(Maximum Value=4.085, Minimum Value=-1.905,
Exact=-1.0)



(c) By the Double Exponential Quadrature
(Maximum Value=-0.392, Minimum Value=-1.155,
Exact=-1.0)

図 4.6 0 次の補正によるポテンシャル勾配 $\partial \Phi / \partial y$ の計算結果

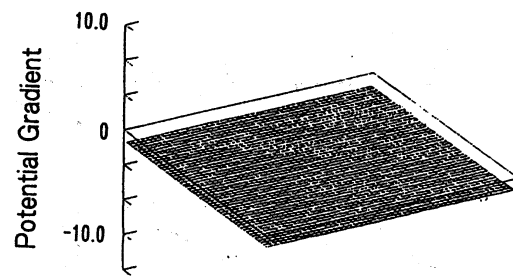


図4.7 1 次の補正によるポテンシャル勾配 $\partial \Phi / \partial y$ の計算結果
(Maximum Value=-0.999965, Minimum Value=-1.00008, Exact=-1.0)

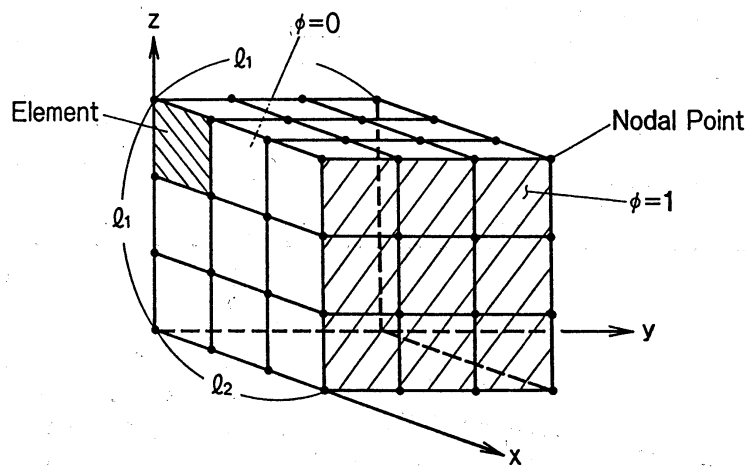
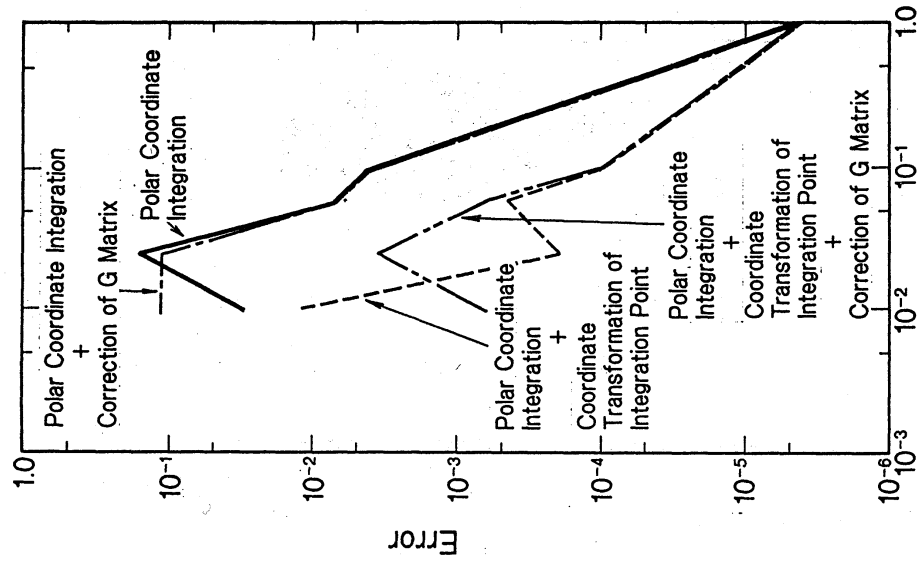
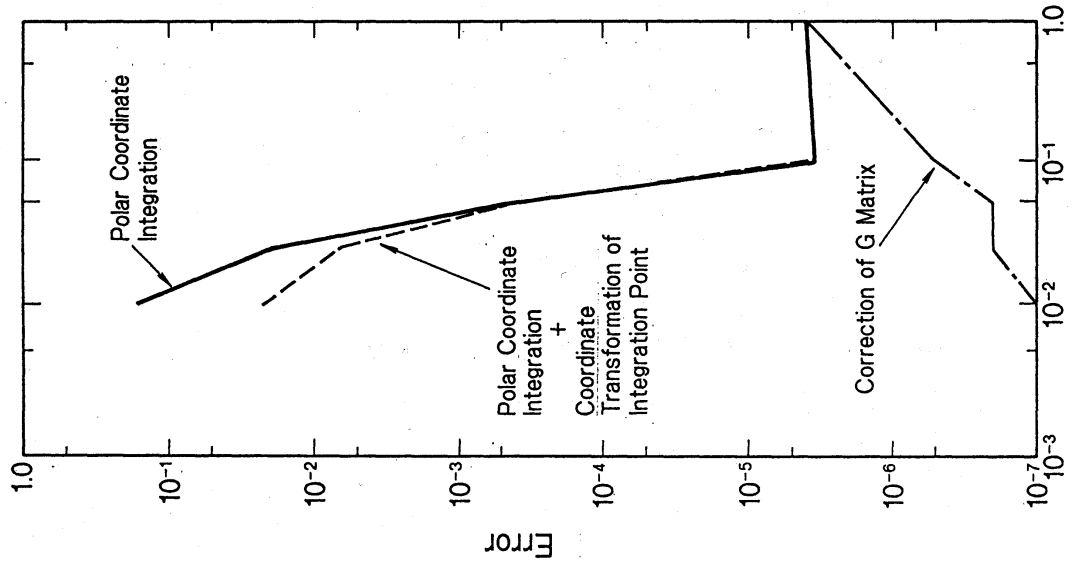


図4.8 テスト計算に用いた解析体系



Aspect Ratio of Rectangular Prism (l_2/l_1)

図4.10 直方体の厚さを変えたときのポテンシャルの誤差



Aspect Ratio of Rectangular Prism (l_2/l_1)

図4.9 直方体の厚さを変えたときのフラックスの誤差

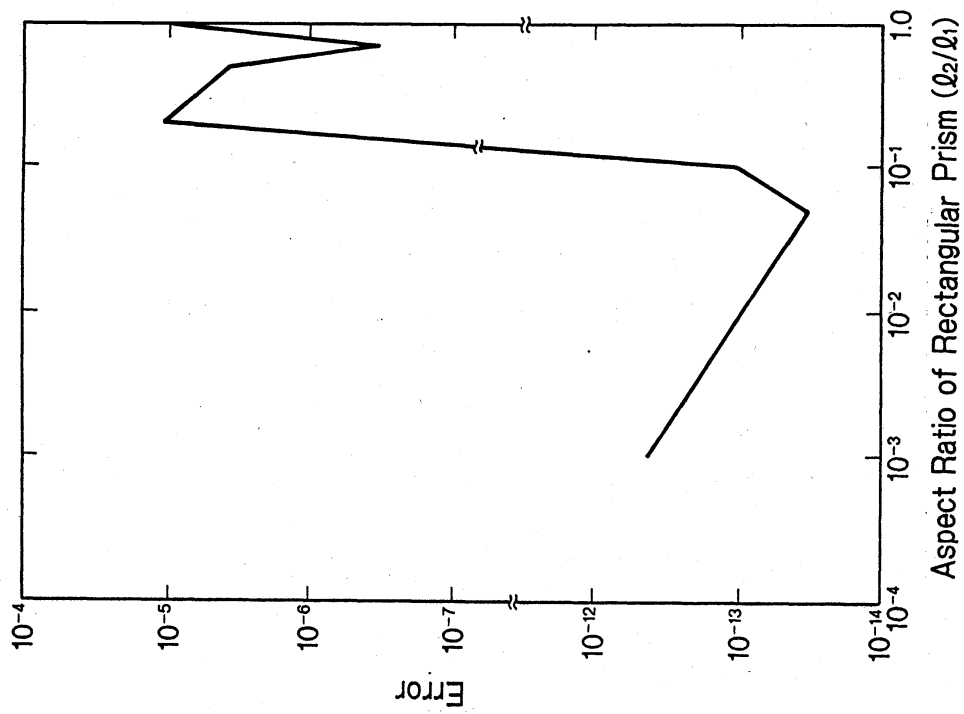


図4.11 第2の方法によるフラックスの誤差

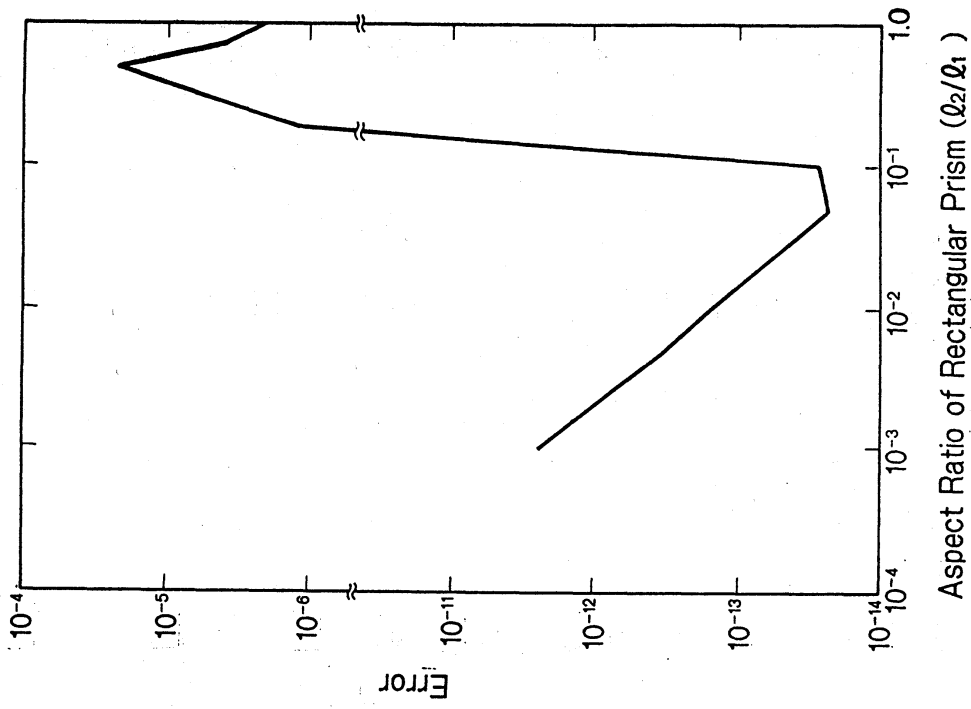


図4.12 第2の方法によるポテンシャルの誤差