

NATURALLY REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES の全測地的部分多様体について

東條晃次 (KOJI TOJO)

千葉大学大学院自然科学研究科

0. 序説.

E.Cartan により, 対称空間において, 全測地的部分多様体が存在するための必要十分条件は Lie triple system が存在することであるということが知られている。また, 対称空間の全測地的部分多様体についてはよく研究されており, 特に Chen-Nagano によって, それはより深まったといえる。彼らの結果のうちの 1 つに次がある。

Theorem 0.1. ([3]) 既約な対称空間で, 全測地的超曲面を許容するものは定曲率空間に限る。

対称空間を含む Riemann 等質空間の class の 1 つに naturally reductive homogeneous space というものがある。ここでは, この等質空間にたいし, 'Lie triple system' に相当する条件を求め, さらに, その応用として Theorem 0.1 と同様の問題を考えることにする。また, '全測地的' という条件を少し変えた問題も扱うことにする。

この講義録の構成は以下の通りである。

Section 1 において, (一般の) Riemann 等質空間の共変微分を Lie 環の言葉を用いて書き表す。

Section 2 では, Cartan による全測地的部分多様体の存在に関する定理を用いて, naturally reductive homogeneous space において, 全測地的部分多様体が存在するための必要十分条件を Lie 環の bracket で表す。

Section 3 では, naturally reductive homogeneous space の 1 つの例である normal homogeneous space を root system を用いて見てみる。Section 4 においては, 全測地的超曲面を許容する normal homogeneous space の分

類を試みる。さらに extrinsic hypersphere と呼ばれる超曲面についても同様のことをする。そのとき Section 3 での結果が必要となる。

Riemann 多様体が全測地的超曲面を許容すれば、その(ある点における)接空間には curvature invariant hyperplane が存在する。Theorem 0.1 から、既約な対称空間で curvature invariant hyperplane を許容するものは定曲率空間のみであるが、normal homogeneous space では、そうではない。その例を Section 5 で与える。

1. 等質空間の Levi-Civita 接続

G を Lie 群, K を G の閉部分群とする。また, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環とする。 $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{p}$ で

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \quad (\text{部分空間の直和}), \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$$

を満たすものが存在するとき, 等質空間 G/K は reductive であるという。

G/K を reductive homogeneous space とし, G/K に G -不変計量 $\langle, \rangle$ が存在すると仮定する。 $\mathfrak{p}$ と接空間 $T_o(G/K)$ ($o = \{K\}$) を同一視すれば, $\langle, \rangle$ は $\mathfrak{p}$ 上の $\text{Ad}(K)$ -invariant 内積となる。このとき, connection function Λ は以下で定義される ([5])。

$$(1.1) \quad \Lambda(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{p}} + U(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{p}),$$

ここで, $Z \in \mathfrak{p}$ に対し

$$(1.2) \quad \langle U(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2}\{\langle [Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle + \langle [Z, Y]_{\mathfrak{p}}, X \rangle\}.$$

reductive homogeneous space G/K が, さらに $U = 0$ を満たすとき, G/K は naturally reductive であると言う。

次に, $(G/K, \langle, \rangle)$ の Levi-Civita connection ∇ を $\mathfrak{g}$ の bracket $[,]$ で表すことをする。

$\pi: G \rightarrow G/K$ を canonical projection とする。 W を, $\mathfrak{p}$ の 0 を含む open subset で

$$\pi \circ \exp: W \longrightarrow \pi(\exp W)$$

が diffeomorphism となるようにとる。 $X \in \mathfrak{p}$ に対して, $\pi(\exp W)$ の上の vector field X_* を

$$(X_*)_{\pi(\exp x)} = \tau(\exp x)_*\{X\}$$

と定義する。ここで, $\tau(g)$ ($g \in G$) は G/K の左移動を表す。また, $\mu : \pi(\exp W) \rightarrow \exp W$ を

$$\mu(\pi(\exp x)) = \exp x \quad (x \in W) \quad \text{と定義する。}$$

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を $\mathfrak{k}$ の基底, $\{X_i\}_{i \in I}$ を $\mathfrak{p}$ の $\langle, \rangle$ に関する正規直交基底とする。
($\mathfrak{g}$ の元と G の左不変 vector field を同一視して) ω^α, ω^i ($\alpha \in A, i \in I$) をそれぞれ X_α, X_i の dual 1-form とする。

Lemma 1.1. $\{(X_i)_*\}$ ($i \in I$) に対応する connection forms θ_j^i ($i, j \in I$) は次で与えられる。

$$\theta_j^i = -\mu^* \left\{ \sum_{\alpha \in A} c_{j\alpha}^i \omega^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k \in I} (c_{jk}^i - c_{ik}^j - c_{ij}^k) \omega^k \right\}.$$

ここで, c_{qr}^p は $\{X_\alpha\}, \{X_i\}$ に関する $\mathfrak{g}$ の構造定数。

Helgason [4] によると, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ の微分写像は

$$(\exp_*)_x(y) = (L_{\exp x})_* \circ \Phi_x(y) \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\text{ad } x)^n(y)$$

で与えられる。 $p_{\mathfrak{k}}, p_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ への射影とする。 W を小さく
とって

$$p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

が各 $x \in W$ に対して isomorphism となるようにしておく。このとき, (1.1), (1.2), Lemma 1.1 から次を示すことができる。

Theorem 1.2. $x \in W, X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$(\nabla_{X_*} Y_*)_{\pi(\exp x)} = \tau(\exp x)_* \{ \Lambda(X)(Y) + [h_x(X), Y] \}.$$

ここで

$$h_x(X) = p_{\mathfrak{k}} \circ \Phi_x \circ (p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x|_{\mathfrak{p}})^{-1}(X).$$

Corollary 1.3.

$$(\nabla_{\tau(\exp x)_* \circ p_p \circ \Phi_x(X)} Y_*) = \tau(\exp x)_* \{ \Lambda(p_p \circ \Phi_x(X))(Y) + [p_t \circ \Phi_x(X), Y] \}.$$

2. Totally geodesic submanifolds.

ここでは, $(G/K, \langle, \rangle)$ は naturally reductive とする。

このとき, 定義から connection function Λ は $\Lambda(X)(Y) = (1/2)[X, Y]_p$ で与えられる。また, よく知られているように $o = \{K\}$ で $X \in \mathfrak{p}$ に接する geodesic は $\gamma(t) = \pi(\exp tX)$ と書ける。このとき, Section 1 の結果を使って $\gamma(t)$ に沿った parallel vector field を得ることができる。

Lemma 2.1. $Y(t)$ を測地線 $\gamma(t) = \pi(\exp tX)$ ($X \in \mathfrak{p}$) に沿った *parallel vector field* で $Y(0) = Y$ ($Y \in \mathfrak{p}$) となるものとする。

$$Y(t) = \tau(\exp tX)_* \{ e^{-t\Lambda(X)}(Y) \}.$$

$$\text{ここで } e^{-t\Lambda(X)}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (\Lambda(X))^n(Y).$$

Proof. Theorem 1.2 において, $x = tX$ とすると

$$(\nabla_{X_*} Y_*)_{\pi(\exp tX)} = \tau(\exp tX)_* \{ \Lambda(X)(Y) + [h_{tX}(X), Y] \}.$$

$\Phi_{tX}(X) = X$ より $h_{tX}(X) = p_t(X) = 0$. このことから Lemma 2.1 は容易に示せる。 □

もう 1 つ Theorem 1.2 の応用を与えてみよう。

よく知られているように $(G/K, \langle, \rangle)$ の点 o における curvature tensor R は $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ に対して

$$(2.1) \quad R(X, Y)Z = [[X, Y]_t, Z] + \frac{1}{2}[[X, Y]_p, Z]_p - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_p]_p + \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_p]_p$$

で与えられる。これを Theorem 1.2 を用いて示してみよう。

まず $(\nabla_{X_*} \nabla_{Y_*} Z_*)_o$ を求めてみよう。 t を $|t|$ が十分小さい実数とする。
このとき, Theorem 1.2 から

$$(\nabla_{Y_*} Z_*)_{\pi(\exp tX)} = \tau(\exp tX)_* \{ \Lambda(Y)(Z) + [h_{tX}(Y), Z] \}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_*} \nabla_{Y_*} Z_*)_o &= \Lambda(X) \Lambda(Y)(Z) + \Lambda(X)([h_0(Y), Z]) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [h_{tX}(Y), Z]. \end{aligned}$$

さらに $h_0(Y) = 0$, $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{tX}(Y) = -(1/2)[X, Y]_{\mathfrak{k}}$ より

$$(\nabla_{X_*} \nabla_{Y_*} Z_*)_o = \frac{1}{4} [X, [Y, Z]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} - \frac{1}{2} [[X, Y]_{\mathfrak{k}}, Z]$$

となる。このことから (2.1) は容易に導ける。

次に $(G/K, \langle, \rangle)$ の totally geodesic submanifold が存在するための必要十分条件を $\mathfrak{g}$ の bracket で書き表そう。

(M, g) を Riemann 多様体, p を M の点, x を $T_p M$ の元とする。 p で x に接する M の測地線を $\gamma_x(t)$ ($\gamma_x(0) = p$) とするとき

$$P_{tx} : T_p M \longrightarrow T_{\gamma_x(t)} M$$

で平行移動を表す。このとき次が知られている。

Theorem 2.2. (*E. Cartan*) V を $T_p M$ の部分空間とすると次は同値。

- (i) V に接する (M, g) の totally geodesic submanifold が存在する。
- (ii) 次をみたす正数 ϵ が存在する。 $|x| = 1$ なる任意の $x \in V$ と $t \in \mathbb{R}$ ($|t| < \epsilon$) に対して

$$(P_{tx}^{-1} R)(V, V)V \subset V.$$

ここで $P_{tx}^{-1} R$ は, $\gamma_x(t)$ における curvature tensor を P_{tx} によって p に引き戻したものである。

この Theorem と Lemma 2.1 から次を得る。

Proposition 2.3. G/K を *naturally reductive homogeneous space* とし, V を $\mathfrak{p}$ の部分空間とすると, 次は同値。

- (1) V に接する G/K の *totally geodesic submanifold* が存在する。
- (2) 各 $X \in V$ に対して, $e^{-\Lambda(X)}(V)$ は $\mathfrak{p}$ の曲率不変部分空間, すなわち

$$R(e^{-\Lambda(X)}(V), e^{-\Lambda(X)}(V)) \subset e^{-\Lambda(X)}(V)$$

が成立する。

Remark 2.4. 実は, Proposition 2.3 の (1) は次の (3) と同値。 (3) 各 $X \in V$ に対して次が成り立つ。

$$R(X, e^{-\Lambda(X)}(V)) \subset e^{-\Lambda(X)}(V).$$

3. Normal homogeneous spaces.

G を compact Lie 群, K を G の閉部分群とする。 G の biinvariant metric から導入された metric $\langle, \rangle$ を備えた等質空間 $(G/K, \langle, \rangle)$ を normal homogeneous space と言う。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環, $\mathfrak{p}$ を $\langle, \rangle$ に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間とすると, この $\mathfrak{p}, \langle, \rangle$ に関して $(G/K, \langle, \rangle)$ は naturally reductive となる。

次に G を compact simple Lie group としよう。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とし, $\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra とする。 また, Δ を $\mathfrak{h}$ に関する nonzero root の集合とし, Ψ を Killing form とする。 $\alpha \in \Delta$ に対し, $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ を $\Psi(H_{\alpha}, H) = \alpha(H)$ ($H \in \mathfrak{h}$) で定義する。 さらに root vector E_{α} を次を満たすようにとる。

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Psi(E_{\alpha}, E_{-\alpha}) &= 1, \quad [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = H_{\alpha} \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

このとき, 次の $\mathfrak{g}_u$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の compact real form となる。

$$\mathfrak{g}_u = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} \sqrt{-1} H_{\alpha} + \sum_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{R} A_{\alpha} + \mathbb{R} B_{\alpha}).$$

ここで, $A_{\alpha} = E_{\alpha} - E_{-\alpha}$, $B_{\alpha} = \sqrt{-1}(E_{\alpha} + E_{-\alpha})$. 以下では, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}_u$ を同一視する。

$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し, $\{\beta + n\alpha \in \Delta : p \leq n \leq p\}$ を, β を含む α -series とする。 このとき, 次はほぼ明らかであろう。

Lemma 3.1.

$$\begin{cases} 0 \leq q - p \leq 1, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ は } A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 \text{ のいずれか}) \\ 0 \leq q - p \leq 2, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ は } B_l, C_l, F_4 \text{ のいずれか}) \\ 0 \leq q - p \leq 3, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ が } G_2\text{-type のとき}) \end{cases}$$

K を G の閉部分群とする。我々の考える等質空間は normal であり, $\mathfrak{g}$ の任意の 2 つの maximal abelian subalgebra は互いに conjugate なので $\mathfrak{k}(K)$ の Lie 環) の maximal abelian subalgebra は $\sum_{\alpha} \mathbb{R}\sqrt{-1}H_{\alpha}$ に含まれていると仮定する。(それを $\mathfrak{h}_1$ と書く。)

以下, 簡単のため

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathbb{R}A_{\alpha} + \mathbb{R}B_{\alpha}$$

と書こう。

Berger [1] によれば, $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ に対して, X の $\mathfrak{k}$ 成分 $X_{\mathfrak{k}}$ は, 次のように与えられる。

Lemma 3.2.

$$X_{\mathfrak{k}} = \sum_{\lambda \in \Delta(\alpha)} p_{\lambda} X_{\lambda} \quad \text{where:}$$

(1) $\Delta(\alpha) = \{\lambda \in \Delta : \lambda = \alpha \text{ on } \mathfrak{h}_1\}$; (2) $p_{\lambda} \geq 0$; (3) $X_{\lambda} \in \mathfrak{g}_{\lambda}$.

Lemma 3.2 の記号の下で, $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\alpha)$ を次のように定義する。

$$(3.2) \quad \mathfrak{g}(\alpha) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Delta(\alpha) \\ p_{\lambda} \neq 0}} \mathfrak{g}_{\lambda}.$$

さらに

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{p}} &= \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{p}\} \\ \Delta_{\mathfrak{k}} &= \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{\alpha}\} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{k}\} \\ \Delta' &= \Delta \setminus (\Delta_{\mathfrak{p}} \cup \Delta_{\mathfrak{k}}) \end{aligned}$$

とおく。もし, $\text{rk}(G) = \text{rk}(K)$ ならば, $\Delta' = \emptyset$ である。 $\text{rk}(G) = \text{rk}(K) + 1$ のときは次が成立する。

Proposition 3.3. ([6]) G を compact simple Lie 群, K を G の閉部分群とし, G/K を normal homogeneous space とする。((3.2)において) 全ての $\lambda_i, \lambda_j \in \Delta(\alpha)$ に対して, ある $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の元 H が存在して $(H_{\lambda_i} - H_{\lambda_j})$ と H が平行となると仮定する。(もし, $\text{rk}(G) = \text{rk}(K) + 1$ ならば, この仮定は満たされる。) このとき次が成立する。

(1) $\mathfrak{g}$ は G_2 -type でないとすると, $\mathfrak{g}(\alpha)$ ($\alpha \in \Delta'$) は次の 2 つのどちらかの形になる。

(a) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\beta}$. ここで β は $\alpha - \beta \notin \Delta$ を満たす Δ の元。

(b) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\beta} + \mathfrak{g}_{\gamma}$. ここで $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = 1, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 2.$$

(2) $\mathfrak{g}$ を G_2 -type の Lie 環とすると $\mathfrak{g}(\alpha)$ ($\alpha \in \Delta'$) は次の 3 つのうちのいずれかとなる。

(a) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\beta}$. ここで β は $\alpha - \beta \notin \Delta$ を満たす Δ の元。

(b) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\beta_1} + \mathfrak{g}_{\beta_2}$. ここで $\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{and} \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_1})}.$$

(c) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\gamma_1} + \mathfrak{g}_{\gamma_2}$. ここで $\{\alpha, \gamma_1, \gamma_2\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 3.$$

(d) $\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\delta_1} + \mathfrak{g}_{\delta_2} + \mathfrak{g}_{\delta_3}$. ここで $\{\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1\}$ と一致する。

$$\frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = \frac{\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 1.$$

4. 主な結果.

ここでは、これまでに得たことを用いて、normal homogeneous space の hypersurface に関して得られた結果を報告する。

(M, g) を m -次元 Riemann 多様体とし、 N を (M, g) の n -次元部分多様体とする。また、 $\nabla, \tilde{\nabla}$ をそれぞれ N, M の Levi-Civita connection とする。このとき、 N の second fundamental form σ は次で与えられる。

$$\sigma(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

ここで X, Y は N に接する M の vector field である。

$H = (1/n)\text{trace}(\sigma)$ を N の mean curvature vector とする。 $\sigma(X, Y) = g(X, Y)H$ のとき N は umbilical であると言う。

N が umbilical で、さらに、 $H \neq 0$ であり、 H が normal connection に関して平行であるとき、 N を (M, g) の extrinsic sphere という ($H = 0$ のとき、 N は totally geodesic)。 N が extrinsic sphere ならば $g(H, H)$ は nonzero constant である。さらに、任意の $p \in N$ に対して、Codazzi の方程式から $T_p N$ は $T_p M$ の curvature invariant subspace である。すなわち

$$(4.1) \quad R(T_p N, T_p N)T_p N \subset T_p N \quad (R: M \text{ の curvature tensor})$$

が成立する。もちろん、 N が totally geodesic でも (4.1) が成立する。

Theorem 0.1 と同様の問題を、 M が normal homogeneous space の場合にも考えたとき、次を示すことができた ([6])。

Theorem 4.1. G を compact simple Lie group とする。もし normal homogeneous space G/K が totally geodesic hypersurface を許容するならば、 G/K は定曲率空間である。

Proposition 2.3 と proposition 3.3 を使って、この定理は証明できる。特に、 $\text{rk}(G) = \text{rk}(K)$ のときは、Lemma 3.1 を用いて次を示すことができる。

Theorem 4.2. G を compact simple Lie 群とし、 K を $\text{rk}(G) = \text{rk}(K)$ となる G の閉部分群とする。もし normal homogeneous space G/K の o における接空間が curvature invariant hyperplane を許容するならば G/K は定曲率空間である。

次に、 G を compact Lie 群、 K をその閉部分群とする。さらに normal homogeneous space G/K が extrinsic hypersphere N を許容すると仮定す

る。 $o \in N$ として、 $V = T_o N$ とおく。 $x \in V$ と十分小さい $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $\tau(\exp X(t))$ を $t=0$ で x に接する N の測地線とする。また、 ξ を長さ 1 の V に直交する vector とする。このとき、 N の定義と Corollary 1.3 より、 N の長さ 1 の normal vector field は $\tau(\exp X(t))$ 上、次のように書ける。

$$(4.2) \quad \tau(\exp X(t))_* \left\{ \xi - t(\lambda x + \frac{1}{2}[x, \xi]_p) + o(t) \right\}.$$

(4.1), (4.2), Proposition 3.3 を使って次を得ることができる。

Theorem 4.3. G を compact Lie 群、 K をその閉部分群とする。もし normal homogeneous space G/K が extrinsic hypersphere を許容するならば、 G/K は定曲率空間である。

5. 曲率不変超平面を許容する例

ここでは、曲率不変超平面を許容する normal homogeneous space を構成しよう。

G/K を compact type の Hermitian symmetric space で、 (G, K) が symmetric pair であるものとする。 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G , K の Lie 環とする。このとき $\mathfrak{g}$ の subspace $\mathfrak{p}$ で $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ となるものが存在して、この $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{g}$ の Killing form に関して G/K は normal homogeneous space となる。よく知られているように、 $\mathfrak{k}$ には 1 次元の center が存在する。(それを $\mathbb{R}Z$ とする。)

$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \oplus \mathbb{R}Z$ とし、 $\mathfrak{k}'$ を Killing form に関する $\mathfrak{p}'$ の直交補空間とする。このとき

$$[\mathfrak{k}', \mathfrak{k}'] \subset \mathfrak{k}', \quad [\mathfrak{k}', \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}']_{\mathfrak{p}'} \subset \mathbb{R}Z.$$

が成り立つ。 K' を $\mathfrak{k}'$ に対応する G の Lie subgroup とすれば、 $\mathfrak{p}'$ は G/K' の接空間と同一視でき、簡単な計算から $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}'$ の curvature invariant hyperplane であることがわかる。

REFERENCES

1. M. Berger, *Les variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 179–246.
2. B. Y. Chen, *Extrinsic spheres in Riemannian manifolds*, Houston J. Math. **5** (1979), 319–324.

3. B. Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II*, Duke Math. J. **45** (1978), 405–425.
4. S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.
5. K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.
6. K. Tojo, *Totally geodesic hypersurfaces of normal homogeneous spaces*, preprint.