

Jones index 有限の subfactor を保つ自己同型

河東泰之 (東大・理)

Yasuyuki Kawahigashi

§0 導入.

Jones index 有限の subfactor に対し, 大きな factor と subfactor がさまざまな意味で「近い」ことが, Jones, Pimsner-Popa, Loi, Hamachi-Kosaki などによって示されてきている. ここでは自己同型/群作用の近さを考える. 一番簡単な場合は次の結果である.

FACT. II_1 factors $N \subset M$, $[M : N] < \infty$, に対して, $\alpha \in \text{Aut}(M)$ が $\alpha(N) = N$ を満たせば,

$$\alpha \text{ is free on } M \iff \alpha|_N \text{ is free.}$$

このこと自体はいろいろな証明が可能であろう. 一つの証明は [Lo] にある. ここでの方法に基づく証明は後に示す. この結果は α と $\alpha|_N$ が何らかの意味で近いということを言っている. 特に factor が AFD のときは, これら二つは outer conjugate になることに注意しよう. 以下, このタイプの結果を一般的な状況下で導き, その応用について述べる. この様なことを考える動機は, 一つには, factor の研究に極めて有効だった automorphism approach を subfactor の研究に適用しよう, というものであり, また, もっと直接的には, III_λ 型, $0 < \lambda < 1$, subfactor の研究に役立つと期待されるからである. 詳しくは, 論文 [Ka] を参照していただきたい. III 型の index 理論は, 幸崎 [K] が, [C, H] を用いて [J] を拡張したことによって始まった. 基本文献 [J, K] の定義, 結果などは, 断り無しに用いる.

§1 準備と一般的結果

ここでは, 浜地-幸崎の方法 [HK] の応用を用いる. 彼らの結果は, $N \subset M$ が III 型 factor のペアで有限 index の時, それぞれの flow of weights

の関係に強い制限がつく、というものであった。それには、 N 上の weight φ と、conditional expectation を用いて作った $\varphi \cdot E$ から、modular automorphism groups $\sigma^\varphi, \sigma^{\varphi \cdot E}$ を作り、これらで接合積を作るのであった。ここで σ^φ は、 $\mathbf{R}$ -作用として $\sigma^{\varphi \cdot E}$ の制限であること、 $\sigma^{\varphi \cdot E}$ は E と可換であること、に注意して次のような一般化を考える。

- (1) N, M は、 σ -finite な von Neumann 環。
- (2) $E : M \rightarrow N$ は、conditional expectation で、ある $\lambda > 0$ に対し、 $E - \lambda I$ が M 上 completely positive になる。
- (3) 群 G の M 上の作用 α_g があって、 $E \cdot \alpha_g = \alpha_g \cdot E$ 。

ここで、 M, N が factor の時は、(2) での best な λ が、Index E の逆数である。(たとえば、[BDH].) Factor の場合に興味があるのだが、index 有限、という仮定にしないのは、あとで、ultraproduct や接合積に結果を使いたいからである。(3) については、特に $\alpha_g(N) = N$ だが、次の条件の下では、逆に $\alpha_g(N) = N$ から、(3) が従うので、これら二つの差はあまりない。

- (a) $N' \cap M = \mathbf{C}$ 。
- (b) M は II_1 型。
- (c) E は、日合の意味で minimum index を持つ。

さて、このとき次のダイアグラムが得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xleftarrow{E} & M & \xleftarrow{E_1} & M_1 \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 N \rtimes_{\alpha} G & \xleftarrow{\hat{E}} & M \rtimes_{\alpha} G & \xleftarrow{\hat{E}_1} & M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G
 \end{array}$$

ここで、 E_1, M_1 は、basic construction で得られる。([K].) 今、 N, M は factor ではないが、問題はない。Conditional expectation $\hat{E}$ は、 E から、自然に定まる。(たとえば、[Hi2,3]参照.) また M_1 上の G -作用、 $\tilde{\alpha}$

は, $\alpha_g(e_N) = e_N$ で自然に定まったものである. これらは, 以下のよう
に期待される性質を持つ. 以下, 簡単のため, 群 G は, 可換とする.

- ・ $E_1, \tilde{\alpha}$ は, M, M_1, λ に対し, もとと同じ型の性質, (1), (2), (3) を満たす.
- ・ $\hat{E}, \hat{\alpha}$ は, $M \rtimes_{\alpha} G, N \rtimes_{\alpha} \hat{G}, \lambda$ に対し, もとと同じ型の性質, (1), (2), (3) を満たす.
- ・ $\hat{E}_1$ は, E_1 から, また, $\hat{E}$ の basic construction としても作れるが, 両者は一致する.
- ・ $M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ 上の $\hat{G}$ -作用は, $\tilde{\alpha}$ の双対作用と, $\hat{\alpha}$ on $M \rtimes_{\alpha} G$ の basic construction への延長の二つがあるが, 両者は一致する.

実際にこれらを証明しようとするれば, それなりのページ数があるが, 本質的には, やればできることだけである. 詳しくは [Ka] を参照のこと. さて, この状況下で, 浜地-幸崎型の論法ができ, 次のダイアグラムを得る.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}((N \rtimes_{\alpha} G)' \cap (M \rtimes_{\alpha} G)) & \cong & \mathcal{Z}((M \rtimes_{\alpha} G)' \cap (M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z}(N \rtimes_{\alpha} G) & & \mathcal{Z}(M \rtimes_{\alpha} G) \end{array}$$

ここで $\mathcal{Z}$ は, center を表し, 縦の矢印は, Pimsner-Popa 型の評価を満たす conditional expectation であり, また $\hat{\alpha}$ は, このダイアグラムとコンパティブルである.

§2 自己同型への応用

さて, ここでは, N, M を factor としよう. すぐ上のダイアグラムで縦の conditional expectation はそれぞれ, $X_M \times \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow X_M$, $X_N \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X_N$ という projection になる. ここで, n, m は index で押さえられる整数である. (双対作用の central ergodicity による.) したがって, たとえば, $p \in \Gamma(\alpha) \subset \hat{G}$ とすれば, $\hat{\alpha}_p$ は, 上のダイアグラムの左下で, trivial, したがって, 上に行って, $X_M \times \{1, 2, \dots, m\}$

上でも有限回くりかえすことによって trivial となり、右下まで行って、 $\hat{\alpha}_p^k = id$ となる。ここで k は index で上限の決まる整数である。したがって、 $k\Gamma(\alpha) \subset \Gamma(\alpha|_N)$ が証明できたことになる。対称性より $k\Gamma(\alpha|_N) \subset \Gamma(\alpha)$ もわかる。これを特に $G = \mathbb{Z}$ に適用すれば、 $\Gamma(\alpha) = T \iff \Gamma(\alpha|_N) = T$ となるので §0 で述べた Fact の証明が従うことに注意する。言い換えれば、 α [resp. $\alpha|_N$] が inner なら、 $\alpha|_N$ [resp. α] も有限乗するうちに inner になるといってもよい。以下、この型の議論を用いて、 α [resp. $\alpha|_N$] がある性質を持てば、 $\alpha|_N$ [resp. α] も有限乗するうちに同じ性質を持つ、というタイプの命題をいくつか示す。「ある性質」、とは、(approximately) (pointwise) inner, centrally trivial といった性質である。ここで二つの括弧はそれぞれ有・無二通り、計四通りの条件を意味する。(両方の括弧がない場合は inner という条件であり、すでに上で述べた。)

次に centrally trivial automorphism を考えよう。記号を簡単にするため、 M, N を II_1 型と仮定する。(証明は、他の場合でも本質的に同じである。) まず $\alpha|_N$ が centrally trivial としよう。 E を項別にほどこしてえられる $E^\omega : M^\omega \cap N' \rightarrow N^\omega \cap N' = N_\omega$ が、同じ Pimsner-Popa 評価を持つことと、 $\alpha_\omega m = id$ on N_ω を用いて、§1 の議論を適用すれば、 $N' \cap M^\omega$ 上、 $k > 0$ と $a \in N' \cap M^\omega, a \neq 0$ が存在して、 $(\alpha^\omega)^k(x)a = ax, \forall x \in M^\omega \cap N'$, を満たすことがわかる。今度は ergodicity がないので、 a を極分解しても unitary が得られるとは限らないが、それは問題ではなく、Connes 型の議論によって、 $(\alpha^\omega)^k = id$ on M_ω が得られる。今は、 $a \in M_\omega$ かどうかわからないが、それは関係なく結論が得られる。また、 $(\alpha^\omega)^k = id$ on $M^\omega \cap N'$ かどうかもわからないがそれもかまわないのである。これが ultraproduct のありがたい点である。逆に $\alpha \in \text{Cnt}(M)$ とした場合は、 $\alpha|_N \cong \tilde{\alpha}^{e_N}$ を用いればよい。Factor が properly infinite のときは何の問題もなく、 II_1 型の場合は Connes による centrally trivial automorphism の特徴づけを使う。

次に pointwise innerness に移ろう。この定義は、 $\alpha \in \text{Aut}(M)$ が pointwise inner であるとは、すべての $\varphi \in M_*$ に対して、 $u \in \mathcal{U}(M)$ が存在し

て、 $\varphi \cdot \alpha = \text{Ad}(u) \cdot \varphi$ となることである。これと下で述べる approximately pointwise innerness は、III 型でのみ興味がある。この pointwise inner という条件は Haagerup-Størmer によって導入されたが、彼らは、 III_λ 型、 $0 \leq \lambda < 1$ 、という条件下で $\alpha \in \text{Aut}(M)$ が pointwise inner である必要十分条件は $\alpha = \text{Ad}(u) \cdot \bar{\sigma}_c$ の形 ($\bar{\sigma}$ は extended modular automorphism) であることを示した。また、 III_1 型の場合でも AFD ならば、これが正しいことも最近示したとのことである (未発表)。一方、 M の離散群による接合積の flow of weights を決めるのは、この型の automorphism である。([KT], または関根[S].) したがって、index 有限の場合この型の automorphisms についても上と同様のことが成り立つはずである。実際、次の結果が得られる。

定理. 上の条件下で

$$D(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \text{ は } \text{Ad}(u) \cdot \bar{\sigma}_c \text{ の形}\}.$$

とおくと整数 $k > 0$ があって、 $kD(\alpha) \subset D(\alpha|_N)$ および $kD(\alpha|_N) \subset D(\alpha)$ となる。

AFD の場合は、このタイプの自己同型は centrally trivial automorphism のクラスと同じであることが、[KST] のよって示されている。もちろんこの場合は、上の centrally trivial automorphism に対するのと同じ結果をもたらす。

今度は、approximately pointwise inner automorphism である。Haagerup と Størmer は、 $\alpha \in (M)$ が approximately pointwise inner である、ということを任意の $\varphi \in M_*$ 、 $\varepsilon > 0$ に対し $u \in \mathcal{U}(M)$ が存在して $\|\text{Ad}(u) \cdot \varphi - \varphi \cdot \alpha\| < \varepsilon$ となること、と定義した。そして彼らは、 α が approximately pointwise inner になるのは、 $\text{mod}(\alpha) = \text{id}$ の時であることを示した。ここで mod は、Connes-Takesaki module を意味する。Module を考えるには、invariant weight による modular automorphism group での接合積を作ればよいので、浜地-幸崎型の議論と compatible に実行できる。よって、次の定理を得る。

定理. 上の条件下で

$$A(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \text{ は approximately pointwise inner.}\}.$$

とおくと整数 $k > 0$ があって, $kA(\alpha) \subset A(\alpha|_N)$ および $kA(\alpha|_N) \subset A(\alpha)$ となる.

さらに, AFD の場合は, $\text{Ker mod} = \overline{\text{Int}}$ であることが [KST] によって示されているので, 上の定理で “poinwise” を落とすことができる.

§3 Loi の結果 (AFD II_1 の場合) への応用.

さて, 今までの話はみな一般論であった. もっと細かい話をしようとする AFD の場合に限定せざるを得ない. そこで, 以下, M, N を AFD II_1 -factor としよう. この場合については, 最近の P. Loi の研究 [L] がある. ここでの話題は, 我々の方法が彼の理論に応用できることを示すことである. まず, 彼の理論のポイントを示そう. 彼の目的は, III_λ 型, $0 < \lambda < 1$, の subfactor の研究である. その時ある緩やかな仮定の下で subfactor にも同時に discrete decomposition を適用することができ, そこから II_∞ 型, さらに II_1 型の subfactor $N \subset M$ とそれを global に保つ自己同型が得られる. そこで, そういった automorphism のうち free なものを outer conjugacy で分類することが問題になるのである. ここで free とは, N , または M 上 free ということであり, これらは, §2 で述べたように, 同値である. また, outer conjugacy の定義で用いるものは, N を global に保つ automorphism, そして N の unitary から来る inner automorphism である. Loi は, Connes 型の model action の splitting による, free automorphism の一意性の論法を適用しようとした. Connes の議論で必要になるのは次の二つのポイントであった.

(A) 自己同型の approximate innerness.

(B) 非可換 Rohlin の lemma を用いるための ultraproduct 上での freeness.

これらをどのように変えればよいかを示そう。Loi は、(A) を

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad}(u_n), \quad u_n \in \mathcal{U}(N),$$

という形による近似、(B) を $N^\omega \cap M'$ での α の freeness とすれば、Connes 型の議論がそのまま適用できて、自己同型の一意性が示せることに気付いた。そこで、これらの条件をより使いやすい形から導くことが問題になる。まず、彼は、 $\alpha \in \text{Aut}(M)$, $\alpha(N) = N$, に対し、downward basic construction を行って Jones projections e_{-j} と tunnel N_j を作り、 α を次々 N 内の inner automorphism で perturb することにより、各 j に対し perturbed α が $\alpha(e_{-j}) = e_{-j}$ を満たすようにできることを示した。この時、 α を各 $N'_j \cap M$ に制限したものが、 α の outer conjugacy invariant であり、Loi はこれを $\Phi(\alpha)$ と書いている。そして、 $\text{Ker } \Phi$ がちょうど、上のような N の unitary から来る inner automorphism による近似を許す自己同型のクラスであることを、 $N' \cap M = \mathbb{C}$ と N は finite depth を持つ、という仮定の下で示し、さらにこの仮定の下で、 α が free であれば $N^\omega \cap M'$ 上での freeness も従うことを示したのである。後者には、[O] でアナウンスされているが、誰も証明を見たことのない Ocneanu の定理を用いる。ここでは、我々の方法の応用として、 $N' \cap M = \mathbb{C}$ という条件は不要であること、Ocneanu の定理は使わなくてすむことを示す。

まず、 $N' \cap M = \mathbb{C}$ の方である。ここで問題になるのは、上で作った invariant Φ の連続性である。それは、構成で unitary で動かしてから relative commutant に制限しているからでこの unitary の選択が連続的にできるか? ということが問題なのである。しかし、この問題は、Connes-Takesaki の module の時と同じである。Module のときも unitary で動かしてから centralizer の center に制限するため、問題があったのであるが、module が Borel homomorphism であることを示すことによって、closed graph theorem 型の結果によって連続性がわかるのであった。ここでもちょうど同じ論法が適用でき、なにも問題は生じないことがわかる。

次に ultraproduct である. Loi の使っている Ocneanu の定理とは, trivial relative commutant, finite depth の仮定の下で, $N^\omega \cap M'$ が M_ω の index 有限の subfactor になる, というものでさらに index の式も与えられている. もし, これを認めれば, α の freeness から, α_ω が, M_ω 上 free になるので, 単に ultraproduct 上で §0 の Fact を用いることによって, ただちに結論が出る. しかし, Ocneanu のこの結果の証明はどこにも発表されておらず, また, 何人かに聞いたところでは, 誰も知らないようである. そういう結果を使うのは, どうも気味が悪いので, ここでの方法を使えば無しですませられることを示そう. Trivial relative commutant の条件が落とせることもこの方法の利点である.

まず, Popa の結果によって, finite depth ならば (trivial relative commutant でなくても) tunnel N_j が generating なように, すなわち $\bigvee_j (N_j' \cap M) = M$ となるようにとれるので, そのような tunnel を一つ固定する. このとき, $\cdots N_2^\omega \subset N_1^\omega \subset N^\omega \subset M^\omega$ が, 同じ Jones projections $\{e_{-j}\}$ によって tunnel になることに注意する. すると, $N^\omega \cap M' = \bigcap_j N_j^\omega$ がわかる. なぜならば, 各 e_{-j} が M 内にあることと上の tunnel を使って “ $\subset$ ” がわかり, $x \in N_j^\omega, a \in N_j' \cap M$ ならば $xa = ax$ であることと generating property によって “ $\supset$ ” がわかるからである. 一方, Popa の方法での key lemma は, $c > 0$ が存在して, $E_{N_j \vee (N_j' \cap M)}(x) \geq cx, \forall x \in M_+$ となることであった. よって, conditional expectation $E: M_\omega \rightarrow N_\omega \cap N'$ は, $\lim E_{N_j^\omega}$ で与えられることを用いれば, $x \in M_{\omega,+}$ に対して,

$$\begin{aligned} E_{N_j^\omega}(x) &= E_{N_j^\omega}(E_{N_j \vee (N_j' \cap M)}(x)) \\ &= E_{N_j^\omega}(E_{N_j \vee Z(N_j' \cap M)}(x)) \\ &\geq c' E_{N_j \vee Z(N_j' \cap M)}(x) \\ &\geq c' cx, \end{aligned}$$

であることから, $E(x) \geq cc'x$ を得る. ただし, ここで $x \in M', N_j' \cap M \subset M$ を用いており, また $c' > 0$ は $Z(N_j' \cap M)$ の minimal projections の

trace を見ることによって得られる。(Perron-Frobenius 固有ベクトルの成分から計算でき, c' が真に正であることがわかる.) したがって, α_ω と, $E: M_\omega \rightarrow N^\omega \cap M'$ とに §2 の議論を適用して, 目標の freeness を得る. この方法では, $N^\omega \cap M'$ が factor であることが不要である (また, 証明できない) ことに注意しておく.

REFERENCES

- [BDH] M. Baille, Y. Denizeau, & J.-F. Havet, *Indice d'une esperance conditionnelle*, Compos. Math. **66** (1988), 199–236.
- [C] A. Connes, *Spatial theory of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **35** (1980), 153–164.
- [CT] A. Connes & M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type III*, Tohoku Math. J. **29** (1977), 473–555.
- [H] U. Haagerup, *Operator valued weights in von Neumann algebras I*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 175–206; *II*, *ibid.*, **33** (1979), 339–361.
- [HS1] U. Haagerup & E. Størmer, *Equivalences of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights*, (to appear in Adv. Math.).
- [HS2] U. Haagerup & E. Størmer, *Pointwise inner automorphisms of von Neumann algebras* with an appendix by C. Sutherland, J. Funct. Anal. **92** (1990), 177–201.
- [HK] T. Hamachi & H. Kosaki, *Index and flow of weights of factors of type III*, Proc. Japan Academy **64A** (1988), 11–13.
- [Hi1] F. Hiai, *Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **24** (1988), 673–678.
- [Hi2] F. Hiai, *Minimum index for subfactors and entropy*, preprint, 1989, Hokkaido University.
- [Hi3] F. Hiai, *Minimum index for subfactors and entropy, II*, preprint, 1990, Hokkaido University.
- [J] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–15.

- [Ka] Y. Kawahigashi, *Automorphisms commuting with a conditional expectation onto a subfactor with finite index*, (preprint, 1990).
- [KST] Y. Kawahigashi, C. E. Sutherland, & M. Takesaki, *The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions*, (preprint, 1989).
- [KT] Y. Kawahigashi & M. Takesaki, *Compact abelian group actions on injective factors*, (to appear in J. Funct. Anal.).
- [K] H. Kosaki, *Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 123–140.
- [L] P. H. Loi, *On automorphisms of subfactors*, preprint, 1990, UCLA.
- [O] A. Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)", London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172.
- [S] Y. Sekine, *Flows of weights of crossed products of type III factors by discrete groups*, preprint, 1989.