

Approximate equations for long waves of water surface - あるいは, 長い水面波の構造

大阪大学理学部 数学教室

鹿野 忠良 KANO Tadayoshi

§1. 二次元流の長い水面波は, 無次元化し T_2 時, 次の方程式で記述される [3]:

$$(1.1) \quad \delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_y y = 0 \quad \text{in } \Omega(t)$$

$$(1.2) \quad \varphi_y = 0, \quad y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1.3) \quad \delta^2 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + y \right) + \frac{1}{2} \varphi_y^2 = 0 \quad \left. \vphantom{\delta^2} \right\} y = 1 + \delta^2 \gamma$$

$$(1.4) \quad \gamma_t + \delta^2 \varphi_x \gamma_x - \frac{1}{\delta^2} \varphi_y = 0$$

ここに $\Omega(t) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1 + \delta^2 \gamma\}$,
無次元パラメータ $\delta = h/\lambda = (\text{水深})/(\text{波長})$

であり, $\varphi = \varphi(t, x, y)$ は速度ポテンシャルである。

また $y = 1 + \delta^2 \gamma$ が水面を記述する。

すなわち, 所謂 Dirichlet-Neumann map

$$\varphi_x|_{y=1+\delta^2 y} \longmapsto \varphi_y|_{y=1+\delta^2 y}$$

の kernel を δ に関して展開することによつて, 水面の成立方程式 (1.3) - (1.4) の展開が得られる。それを $O(\delta^2)$ とし, 右時 KdV 方程式が得られ, かくして所謂 long waves of water surface の近似方程式として KdV 方程式に就いての (数学的) 正当性が示された [1]。

ここからは, 上の D-N map の δ に関する高次展開が与えらる方程式 (1.3) - (1.4) の展開が, 結局は, KdV 方程式の u の系列で記述されることを述べる。それによつて, 二次元流の長い水面波が, 本質的に KdV 方程式で記述される構造をとることを述べる。

簡単にいえば, 上の (方程式の) 展開の δ^{2N} の係数である δ^2 , $u = \varphi_x|_{y=1+\delta^2 y}$ の微分多項式は, $f = (\delta + u)/2$, $g = (\delta - u)/2$ に関する所謂 KdV hierarchy の, N 次の項の組合せで表される。

§2 思考実験 状態を浮彫にするために、実際とはちがう、次のような“理想型”の方程式を考えた。すなわち、方程式の展開から、 $F_1 = \frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}$ を flux とする KdV eq. に属する KdV hierarchy を表すことができる:

$$(2.1) \quad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} F_{1,x} + \frac{\delta^4}{2} F_{2,x} + \dots = 0,$$

ここで $f, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ は, KdV-hierarchy $\{f_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を満たす:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f_{n,x} &= f_x f_{n-1} + 2f f_{n-1,x} + \frac{1}{3} f_{n-1,xxx}, \\ f_0 &= 1, \quad f_1 = f \\ f_2 &= F_1 = \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \\ f_3 &= F_2 = \frac{3}{2} f^3 + f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{1}{9} f_{xxxx} \\ &\dots \end{aligned}$$

今、特解 $f(0) = \psi(x) = \frac{3}{2} \psi^2(x) + \frac{1}{3} \psi_{xx}(x)$,
すなわち “solitary wave”

$$(2.3) \quad \psi(x) = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right)$$

を初期値とする (2.1) の解を試みよう。

H_1 は次の通り:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad H_{1,t} + H_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f H_{1,x} + \frac{1}{3} H_{1,xxx}) + \\
 + \frac{\delta^4}{2} (3f H_{2,x} + \frac{1}{3} H_{2,xxx}) + \\
 + \frac{\delta^{2N}}{2} (3f H_{N,x} + \frac{1}{3} H_{N,xxx}) + \dots = 0.
 \end{aligned}$$

このとき, $f(0) = H_1(0)$ であり, $T_1 = T_2 = \dots = 1 =$

$$(2.5) \quad H_1(t) = f(t) + O(\delta^4)$$

がわかる。この事実から, $T_1 = T_2 = \dots = 1 = H_2$ の次のように
 することからわかる:

$$(2.6) \quad H_{2,t} + H_{2,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f H_{2,x} + \frac{1}{3} H_{2,xxx}) = O(\delta^4)$$

実際,

$$\begin{aligned}
 H_{2,t} &= (f_x H_1 + 2f H_{1,x} + \frac{1}{3} H_{1,xxx})_t \\
 &= -H_{2,xx} - \\
 (2.7) \quad & - \frac{\delta^2}{2} \left\{ H_1 H_{1,xx} + f_x (3f H_{1,x} + \frac{1}{3} H_{1,xxx}) + \right. \\
 & \quad + 2H_{1,x}^2 + 2f (3f H_{1,x} + \frac{1}{3} H_{1,xxx})_x + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{3} (3f H_{1,x} + \frac{1}{3} H_{1,xxx})_{xxx} \right\} + O(\delta^4)
 \end{aligned}$$

の右辺第2項を (2.5) に近似すればよい。実際、

$$F_1 F_{1,xx} = (f + O(\delta^4)) F_{1,xx} = f F_{1,xx} + O(\delta^4)$$

$$F_{1,x}^2 = (f + O(\delta^4))_x F_{1,x} = f_x F_{1,x} + O(\delta^4)$$

$$3f F_{1,x} + \frac{1}{3} F_{1,xxx} =$$

$$= 3f(f_x + O(\delta^4)) + \frac{1}{3}(f + O(\delta^4))_{xxx} = F_{1,x} + O(\delta^4).$$

から

$$(2.8) \quad F_{2,t} + F_{2,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f F_{1,x} + \frac{1}{3} F_{1,xxx}) = O(\delta^4)$$

を得るから、これと (2.6) から、 $F_2 = F_1 + O(\delta^4)$ となる。

$$(2.9) \quad F_2(t) = F_1(t) + O(\delta^4) = f(t) + O(\delta^4),$$

だから、実際、 $F_2(0) = F_1(0) = f(0)$ から、

$F_2 - F_1$, $F_2 - f$... において、(2.8) の右辺第2項の非斉次項 $= O(\delta^4)$ から、 $F_2(t) - F_1(t) = O(\delta^4)$ となる。

したがって、故に (2.8) から (2.6) は明らか。

このようにして、(2.3) は初期値とする (2.1) の解は、

$$(2.10) \quad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} f_x + \frac{\delta^4}{2} f_x = O(\delta^6)$$

をみたす、すなわち、 $O(\delta^6)$ 誤差を、

$$\bar{f}_2(t, x) = \psi(x - (1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^4}{2})x)$$

2. 近似式 (2.1) のことである。

そこで $j=1, 2$, KdV hierarchy の各項 $f, \bar{H}_1, \bar{H}_2$,
 を加えて KdV の方程式:

$$(2.11)_n \quad \begin{aligned} f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} (3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}) &= O(\delta^4) \\ \bar{H}_{n,t} + \bar{H}_{n,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f\bar{H}_{n,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{n,xxx}) &= O(\delta^4), \\ n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

に解 $\psi(x - \sum_{j=0}^N (\frac{\delta^2}{2})^j t)$ を初期値とする (2.1) の解は,

よって (2.1) の解は, $\psi(x - \sum_{j=0}^N (\frac{\delta^2}{2})^j t)$ により, 2 次精度で近似される。

実際,

$$\begin{aligned} \bar{H}_{2,x} &= f_x \bar{H}_1 + 2f \bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3} \bar{H}_{1,xxx} \\ &= 3ff_x + \frac{1}{3} f_{xxx} + O(\delta^4) \end{aligned}$$

より (2.1) は

$$(2.12) \quad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} (3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}) + \frac{\delta^4}{2} (3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}) = O(\delta^6)$$

とかけると, $\bar{H}_2(t) = \bar{H}_1 + O(\delta^4)$ とかけると

(2.4) となる。

$$(2.13) \quad \bar{H}_{1,t} + \bar{H}_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}) + \frac{\delta^4}{2} (3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}) = O(\delta^6)$$

これより, $\bar{F}_1(t) = f(t) + O(\delta^6)$ かわかる, ...等。

勿論, 一般の初期値 $f(0) = \zeta(x)$ に対しても, この簡単ないはない。そこで

$$\bar{f}_t + \bar{f}_x + \frac{\delta^2}{2} (3\bar{f}\bar{f}_x + \frac{1}{3}\bar{f}_{xxx}) = 0, \bar{f}(0) = f(0)$$

の解 $\bar{f}(t)$ を利用する。まず (2.11), から
 $\bar{F}_1(t) - f(t) = u$ かわかる, 2つの方程式を得:

$$u_t + u_x + \frac{\delta^2}{2} (3f u_x + \frac{1}{3} u_{xxx}) = O(\delta^4)$$

ここで $f(t) = \bar{f}(t) + O(\delta^4)$ に注意すれば

$$u_t + u_x + \frac{\delta^2}{2} (3\bar{f} u_x + \frac{1}{3} u_{xxx}) = O(\delta^4)$$

これより

$$(2.14) \quad u(t) = Z_1(t, x) + O(\delta^4), \text{ i.e. } \bar{F}_1(t) = f(t) + Z_1 + O(\delta^4)$$

ところで Z_1 に対する $u(0) = \frac{3}{2}\zeta^2(x) + \frac{1}{3}\zeta_{xxx}(x) - \zeta(x)$ と $\bar{f}(t)$ によって定まる既知関数 —— (2.5) の系列を得る。

すなわち, $Z_1(t, x)$ 等を右辺にも, 非斉次 KdV 方程式の系列を解くことにより, 上と同様の議論がなされる。例えは, (2.7) に対応 (2.14) の近似を

用いられる、 z_1 の貢献分を $\tilde{z}_1$ とかく時、

$$(2.15) \quad F_{2,t} + F_{2,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f F_{1,x} + \frac{1}{3} F_{1,xxx} + \tilde{z}_1) = O(\delta^4)$$

従って、

$$F_2 = F_1 + z_2 + \frac{\delta^2}{2} \tilde{z}_1 + O(\delta^4),$$

ただし z_2 は $(F_2 - F_1)(0)$, $\tilde{z}_1$ は $\tilde{z}_1$ の関する分。

(2.15) は

$$F_{2,t} + F_{2,x} + \frac{\delta^2}{2} (3f F_{2,x} + \frac{1}{3} F_{2,xxx} + \hat{z}_2) = O(\delta^4)$$

ともいえる。

次節でみる様に、長い水面波方程式の実際の展開はただいとの KdV hierarchy で記述する事は出来ない。各 δ^{2N} 次の係数にある微分多項式に、KdV hierarchy からの過不足があり、そのために、その過不足を補い2複数の KdV flux とそれらに属する KdV hierarchies の一次結合を用いて記述が必要である。従って $\{F_1, F_2, \dots\}$ の他に、別の KdV flux $G_1, H_1, \dots$ に属する KdV hierarchies $\{G_1, G_2, \dots\}, \{H_1, H_2, \dots\}$... の連立系に対して上と同様の考察をすることになる。表示がその分複雑になるが、考察の方向は全く同様である。

§ 3. 方程式の展開の実際. 序節に云つた f, g

は、次の方程式をみたす:

$$\begin{aligned}
 & f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right)_x + \frac{\delta^4}{2} \left(f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right)_x + \\
 & + \frac{\delta^6}{2} \left(f^2 f_{xx} + f f_x^2 + \frac{1}{3} (2 f f_{xxx} + 4 f_x f_{xx} + 3 f_{xx}^2) + \frac{17}{315} f_{xxxxx} \right)_x - \\
 & - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x - \frac{\delta^4}{2} \left(g g_{xx} + \frac{3}{2} g_x^2 + \frac{2}{15} g_{xxxx} \right)_x - \\
 & - \frac{\delta^6}{2} \left(g^2 g_{xx} + 3 g g_x^2 + \frac{1}{3} (2 g g_{xxx} + 6 g_x g_{xx} + 3 g_{xx}^2) + \frac{17}{315} g_{xxxxx} \right)_x - \\
 & - \frac{\delta^2}{2} (f g)_x + \frac{\delta^4}{2} (g f_{xx} + f_x g_x - f g_{xx})_x + \\
 & + \frac{\delta^6}{2} \left((2 f g + g^2) f_{xx} - (2 f g + f^2) g_{xx} + 2(f + g) f_x g_x + \right. \\
 & \quad \left. + g f_x^2 - 3 f g_x^2 + \frac{1}{3} (2 g f_{xxx} + 4 g_x f_{xx} - 2 f_x g_{xx} - 2 f g_{xxx}) \right)_x = \\
 & = O(\delta^8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx} \right)_x - \frac{\delta^4}{2} \left(g g_{xx} + \frac{1}{2} g_x^2 + \frac{2}{15} g_{xxxx} \right)_x - \\
 & - \frac{\delta^6}{2} \left(g^2 g_{xx} + g g_x^2 + \frac{1}{3} (2 g g_{xxx} + 4 g_x g_{xx} + 3 g_{xx}^2) + \frac{17}{315} g_{xxxxx} \right)_x + \\
 & + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right)_x + \frac{\delta^4}{2} \left(f f_{xx} + \frac{3}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right)_x + \\
 & + \frac{\delta^6}{2} \left(f^2 f_{xx} + f f_x^2 + \frac{1}{3} (2 f f_{xxx} + 6 f_x f_{xx} + 3 f_{xx}^2) + \frac{17}{315} f_{xxxxx} \right)_x +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta^2}{2} (fg)_x + \frac{\delta^4}{2} (gf_{xx} - f_x g_x - f g_{xx})_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2} \left((2fg + g^2) f_{xx} - (2fg + f^2) g_{xx} + 3g f_x^2 - f g_x^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2(f+g) f_x g_x + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} (2g f_{xxx} + 2f_x f_{xxx} - 4f_x g_{xxx} - 2f g_{xxx}) \right)_x = O(\delta^8).
\end{aligned}$$

次の項は 10 個の flux を定義する:

$$F_1 = \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx}, \quad F_{11} = \frac{3}{2} f^2 + \frac{7}{30} f_{xx}, \quad F_{12} = \frac{3}{2} f^2 + \frac{13}{30} f_{xx},$$

$$G_1 = \frac{3}{2} g^2 + \frac{1}{3} g_{xx}, \quad G_{11} = \frac{3}{2} g^2 + \frac{7}{30} g_{xx}, \quad G_{12} = \frac{3}{2} g^2 + \frac{13}{30} g_{xx},$$

$$P_{11} = gf + f_{xx}; \quad P_{11,x} = (gf + f_{xx})_x = \left(g_x + g \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f,$$

$$P_{12} = gf + \frac{1}{2} f_{xx}; \quad Q_{11} = fg + \frac{1}{2} g_{xx}, \quad Q_{11,x} = \left(f_x + f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) g,$$

$$Q_{12} = fg + 2g_{xx}.$$

これらを用いると、前頁の f の展開は、次のように書かれる:

$$\begin{aligned}
& f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} F_{11,x} + \\
& + \frac{\delta^4}{2} \left\{ (f_x F_{11} + 2f F_{11,x} + \frac{7}{30} F_{11,xxx}) - (f_x F_{12} + 2f F_{12,x} + \frac{13}{30} F_{12,xxx}) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\delta^2}{2} \left\{ \left(\frac{23}{18} G_{12,x} - \frac{17}{18} G_{11,x} \right) + (2P_{12,x} - P_{11,x}) \right\} - \\
& - \frac{\delta^4}{2} \left\{ \frac{260}{9} \left(g_x G_1 + \frac{1}{13} g G_{1,x} + \frac{10}{130} G_{1,xxx} \right) - \right. \\
& \quad - \frac{143}{18} \left(g_x G_{11} + \frac{1}{13} g G_{11,x} + \frac{7}{130} G_{11,xxx} \right) - \\
& \quad - \frac{377}{18} \left(g_x G_{12} + \frac{1}{13} g G_{12,x} + \frac{13}{130} G_{12,xxx} \right) - \\
& \quad - \left[\left(g P_{11} + \frac{1}{4} P_{11,xx} \right)_x - \left(g P_{12} + \frac{1}{2} P_{12,xx} \right)_x \right] - \\
& \quad \left. - \left[\left(f Q_{11} + Q_{11,xx} \right)_x - \left(f Q_{12} + \frac{1}{4} Q_{12,xx} \right)_x \right] \right\} = \\
& = O(\delta^6).
\end{aligned}$$

前節の考へで f, g に対する近似が逐次成
 功するためには、上にも使った (ϵ_2 以降にも用いる)
 flux の夫々が、少くとも $O(\delta^4)$ の誤差を精密に
 記述出来るなければならない。

ϵ_3 の我々は、[1] に於て長い水面波の近
 似方程式 ϵ_2 KadV 方程式を得た時、初期
 値 $f(0) = O(1), g(0) = O(\delta^2)$ を課す。

すなわち $f(t) = O(1)$, $g(t) = O(\delta^2)$ である。

これから、上の f, g に対する展開を求めたいが、(2.11),

が f, F_{11} に対する成立することからわかる。

次に、 f を $O(\delta^4)$ の精密に記述しようとするが

$$\frac{\delta^4}{2} (ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx})_x, -\frac{\delta^2}{2} (\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx})_x, -\frac{\delta^2}{2} (fg)_x$$

を f, g の $O(\delta^4)$ 誤差で近似する必要がある。

そこで

$$ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx} = F_{21} - F_{22}$$

(3.1)

$$\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx} = \frac{23}{18}G_{12} - \frac{17}{18}G_{11}$$

$$fg = 2P_{12} - P_{11}$$

$$F_{21,x} = f_x F_{11} + 2f F_{11,x} + \frac{7}{30} F_{11,xxx}$$

$$F_{22,x} = f_x F_{12} + 2f F_{12,x} + \frac{13}{30} F_{12,xxx}$$

である。我々が何れもせず、 $g(t) = O(\delta^2)$ の g

表示を要する。まず、 g の展開から

$$(3.2) \quad g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2} G_{11,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx} \right)_x = O(\delta^4)$$

したがって

$$(3.3) \quad \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx} = \frac{23}{18}F_{12} - \frac{17}{18}F_{11}$$

であり

$$(3.4) \quad F_{11,t} + F_{11,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3f F_{1,x} + \frac{7}{30} F_{1,xxx} \right) = O(\delta^4)$$

$$F_{12,t} + F_{12,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3f F_{1,x} + \frac{13}{30} F_{1,xxx} \right) = O(\delta^4)$$

が成立。よって (2.11), (2.14) を用い (勿論, 本節の $f, F_1, 1 = 3$ だけ!),

$$(3.5) \quad F_{11}(t) = f(t) + \left(f(0) - \frac{3}{2} f'(0) - \frac{7}{30} f_{xxx}(0) \right) + \frac{\delta^2}{2} \tilde{\Phi}_{11} + O(\delta^4)$$

$$F_{12}(t) = f(t) + \left(f(0) - \frac{3}{2} f'(0) - \frac{13}{30} f_{xxx}(0) \right) + \frac{\delta^2}{2} \tilde{\Phi}_{12} + O(\delta^4)$$

を得。但し, $\tilde{\Phi}_{11}, \tilde{\Phi}_{12}$ は $f(0), \bar{f}(t)$ のみの関数。
 従って (3.2), (3.5) 及び $f(t) = \bar{f}(t) + O(\delta^4)$ から,
 $g(t)$ は $O(\delta^4)$ 誤差で, $g(0), f(0), \bar{f}(t)$ に決る
 表示を与えられる。従って

$$G_{1,t} + G_{1,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3g G_{1,x} + \frac{1}{3} G_{1,xxx} \right) + \frac{\delta^2}{2} \Psi_1 = O(\delta^4),$$

Ψ_1 は $f(0), g(0), \bar{f}(t)$ による既知関数,

がわかる。同様に

$$G_{11,t} + G_{11,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3g G_{1,x} + \frac{7}{30} G_{1,xxx} \right) + \frac{\delta^2}{2} \Psi_{11} = O(\delta^4)$$

$$G_{12,t} + G_{12,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3g G_{1,x} + \frac{13}{30} G_{1,xxx} \right) + \frac{\delta^2}{2} \Psi_{12} = O(\delta^4)$$

を得。 Ψ_{ij} は既知。

これより $G_{11}(t)$, $G_{12}(t)$ に対して (3.5) 相当の表現を得て, ε_4 を (3.1) に入れたることに注意し, $(\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx})$ の $O(\delta^2)$ 迄の精確な表示を得る。

次に, (3.5) を (3.1) に入れたるが,

$$F_{21,x} = F_{11} + \Phi_{21} + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{11} + O(\delta^4)$$

$$F_{22,x} = F_{12} + \Phi_{22} + \frac{\delta^2}{2} \Phi_{12} + O(\delta^4)$$

Φ_{1j} , Φ_{2j} , $j=1,2$: $f(0)$, $g(0)$, $\bar{f}$ の既知函数,

を得て, $\frac{\delta^2}{2} (f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx})$ に対して $f(t) + \{f(0), g(0), \bar{f}(t)\}$ の既知函数による表示を $O(\delta^4)$ の精度に得る。上の表示には F_1 を用いてよい。

次に, 上の結果より, 与式は

$$g(t) = \bar{\varepsilon}_0 + O(\delta^4); \bar{\varepsilon}_0 \text{ は } g(0), f(0), \bar{f} \text{ の既知函数}$$

を用いると,

$$P_{12,t} + P_{12,x} + \frac{\delta^2}{2} (g F_1 + \frac{1}{2} F_{1,xx})_x = \tilde{\varepsilon}_1 + O(\delta^4)$$

$\tilde{\varepsilon}_1$: $g(0)$, $f(0)$, $\bar{f}(t)$ の既知函数。

よって, P_{11} も同様の式で表わすことが

わかるから、これを $(3,1)$ の fg の表現に用いて、
 fg は $O(\delta^2)$ の精度に表すことができる。これ
 で、 $f(t)$ は $O(\delta^4)$ の精度に記述した。

これにより、再び $(3,5), (3,1)$ を用いければ、 $g(t)$
 が $O(\delta^6)$ で表すられ、従ってまた f の表すに
 もとめれば $f(t)$ が $O(\delta^6)$ の精度に表すさ
 れる、—— 等。

以上のプロセスに於ける問題は、 δ^{2N} の巾が高くなるに
 従って $(3,1)$ の様な表す複雑になる事
 の他に、“誤差”とてまとめにくい個数の増
 加で $O(\delta^{2N})$ 程にも達してしまう、
 “近似”とて意味をなさない、—— という点にある。
 その点の評価が必要である。

§4. 根拠 以上の議論が余にも工業的であ
 った、果して、長い水面波の方程式がこの議論を
 保証する内在的論理をもつのか、—— という疑
 問がもたれるかもしれない。結論から言へば、以
 上の議論は、方程式そのものの構造に論拠をも
 つてある。以下、それをみよう。

元素, 水面波の方程式は

$$\Gamma = 1 + \delta^2 \gamma, \quad \Phi = -t + \delta^2 \varphi$$

について, 次の型にかける [2]:

$$\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \Gamma = a(\Phi, \Gamma)$$

$$\Gamma_t + (\Gamma \Phi_x)_x = b(\Phi, \Gamma).$$

そこで

$$a = \frac{1}{2} \frac{(\Phi_x A_\delta \Gamma - A_\delta (\Gamma \Phi_x))^2}{\Gamma^2 (1 + \delta^2 \Gamma_x^2)}$$

$$b = \frac{1}{\Gamma} (\Gamma A_\delta W - A_\delta \Gamma \cdot W) - (A_\delta (\Gamma C_\delta \tilde{u}) - A_\delta \Gamma \cdot C_\delta \tilde{u}),$$

$$W = A_\delta \Gamma \cdot \tilde{u} + \Gamma \cdot A_\delta \tilde{u}, \quad \tilde{u} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_\delta}{\delta} \Phi \right)}{\Gamma (1 + \delta^2 \Gamma_x^2)}$$

である。 A_δ は $\Delta \Phi = 0$ に対応する, 所謂 Dirichlet-Neumann map であり, C_δ は

$$A_\delta^{-1} = B_\delta = -A_\delta + C_\delta$$

で定義される作用素である [2]. したがって δ, Γ は

次の方程式を定めた:

$$I = \frac{A\delta}{\delta} \varphi \approx \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \delta^{2m} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2m+1} \varphi$$

$$C_{2m} = 2 \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2m+2} (2^{2m+2} - 1) \zeta(2m+2)$$

ζ : Riemann zeta function.

これより, $\forall$ $1 \leq i \leq 12$ $\varphi = 1 + \delta^2 p$ なる p が定まる:

$$I = 1 + \delta^2 \varphi \iff \varphi = 1 + \delta^2 p.$$

我々の論点は結局

$$p \tilde{u} = \frac{\delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A\delta}{\delta} \varphi \right)}{1 + \delta^2 \varphi x^2} \approx \delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \delta^{2m} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \delta^2 p) \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2m+1} \varphi}{1 + \delta^2 \varphi x^2}$$

が正体の解明にある。§12 と §4117, $\left((1 + \delta^2 p) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$ がいかなる作用素であるかの解明に尽る。

今、方程式に属する函数達, 微分作用素, 1974-75 達12, 次の表に weights を定義する:

$$p, \varphi, \dots : 2; \quad \frac{\partial}{\partial x} : 1; \quad \delta : -1$$

とすると $O(\delta^{2n})$ の項 a degree = weights の総和, は全て等しい。この考察を適用して

$$\begin{aligned} & \left((1 + \delta^2 p) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \delta^2 \left[p_x + 2p \frac{\partial}{\partial x} \right] + \delta^4 \left[\frac{1}{2}(p^2)_x + p^2 \frac{\partial}{\partial x} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

の項が生成する $O(\delta^{2n})$ の係数がある (δ, φ, q , 従って f, g の) 微分多項式は, KdV hierarchy の n 次項と同じ機構で生じることを知る。問題は, 対応する微分多項式の係数 (数値) が一致しない (一般には) ところにある。そのために, 前節に述べた様な複数列の KdV flux とそれに関する hierarchies を要することとなり, δ の様に単純にはないのがある。しかし, それにも拘らず, 上に述べた事象によつて, 前節の解析は, 長い水面波が内包する論理 (構造) に根拠をもっている。

参考文献

- [1] T. KANO, T. NISHIDA : A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, OSAKA J. MATH., 23 (1986), 389-413.
- [2] T. KANO, T. NISHIDA : Water waves and Friedrichs expansion, LECT. NOTE Num. Appl. ANAL., 6 (1983), 39-57.
- [3] T. KANO, L'équation de Kadomtsev-Petviashvili approchant les ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel, Studies in MATH. Appl., 18 (1986), 431-444, North-Holland.