

Subvariety of Embedding & Formal rational functions.

名大 理 松村 英之

文献

- [1] H. Hironaka: On some formal imbeddings.
(To appear on Illinois Journal).
- [2] H. Hironaka and H. Matsumura: Formal
functions and formal embeddings.
J. of Math. Soc. Japan, 20 (1968), 52-82.
- [3] R. Hartshorne: Cohomological dimension
of algebraic varieties (To appear on Ann. Math.)

代数的多様体 Z とその subvariety X とを考えよう。
 X の Z の中への入り方をしらべる有力な方法の 1 つは、 Z の
 X に沿った完備化 $\hat{Z}$ を考えることである。 $\hat{Z}$ は
 formal scheme と呼ばれる ringed space であって、
 その関数体 $K(\hat{Z})$ が考えられる。 $K(\hat{Z})$ の元は Zariski

流に言えば abstract meromorphic functions と呼べるであろうが、正しくは formal rational functions と呼ばれる。 $K(\hat{Z})$ は Z の関数体 $K(Z)$ の拡大体である。 $[K(\hat{Z}):K(Z)] < \infty$ のとき X は Z の中で G_2 である といひ、 $K(\hat{Z}) = K(Z)$ のとき G_3 である ということにする。 X が Z の中で G_3 ならば、 $\hat{Z}$ が Z を birational equivalence を除いて一意的に定める訳であるから、 X は Z の中でかなり一般の位置にあるといえよう。

[2] においてわれわれは次のことを示した:

i) $f: Z' \rightarrow Z$ が proper, surjective な morphism of normal varieties ならば、 $X' = f^{-1}(X)$ とおくと、 Z' の X' に沿った完備化を $\hat{Z}'$ とすれば

$$K(\hat{Z}') = \left[K(Z') \otimes_{K(Z)} K(\hat{Z}) \text{ の全商環} \right]$$

これから、 X が Z で G_2 (resp. G_3) ならば X' が Z' でそうであるということが判る。特に、 X が連結で G_3 ならば X' も G_3 である。また、 X' が G_3 なら X も G_3 である。

ii) $Z_1, \dots, Z_n$ が normal varieties で $e_i \in Z_i$ ならば、 $X = \bigcup (e_1 \times \dots \times e_{i-1} \times Z_i \times e_{i+1} \times \dots \times e_n)$ は $Z = \prod Z_i$ の中で G_3 である。

iii) $Z = \mathbb{P}^n$ (体 k 上の projective space) ならば, Z の任意の connected subvariety X は Z で G_3 である.

iv) Z が abelian variety で X が connected subvariety ならば, X が Z の原点を含むとき

X は G_2 in $Z \iff X$ が Z を generate するが成立つ.

[2] より先に書かれた広中氏の [1] では, Z が smooth で X が codimension 1 のときに, X の normal bundle (それは X 上の line bundle である) が ample ならば X は G_3 であるという結果が (その他の結果と共に) 得られている. [3] で Hartshorne は, Z を smooth variety とし X を locally complete intersection in Z とするとき, X の normal bundle が彼の意味で ample ならば X は G_2 であるということを示している. $\mathbb{P}^n$ の任意の smooth subvariety は ample normal bundle をもつか

ら, $\mathbb{P}^n$ で G_2 であるが, 更に広中氏の テラニワツ を用いて彼は上記 iii) を導いている. また彼は $Z-X$ の cohomological な性質をしらべて興味ある結果を得ている.

基礎体が $\mathbb{C}$ のとき, X が Z で G であるということは, X の Z における近傍 (classical topology で) の上の有理型関数が, Z 全体における有理型関数に拡張されることも含んでいる. (ここで Z はもちろん compact と仮定する). 代表的条件から解析的な定理を証明するのに, 直接やれば convergence の問題が生ずるが, analytic geometry を飛越えて formal geometry の定理を代表的に証明しておけば, GAGA principle で analytic results は矛として得られてしまう. これが広中氏の自慢のひとつである.

[2] の諸定理を組合わせると, たとえば, アーベル多様体 A を hyperplanes で切つて得られる curve は A を生成するという定理などは容易に得られる. 幾何学的な応用は外にもありそうに思われる.

以上.