

Semi-groups と差分近似

早大 教育 大 春 慎三助

Banach 空間 X に与えられた Cauchy 問題

$$(1) \quad \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \quad u(s) = x, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

を考える。ここに各 $A(t)$ は X からそれ自身への作用素である。

またこれに關する差分近似

$$(2) \quad u_n((k+1)h_n) = C(kh_n, h_n)u_n(kh_n), \quad h_n \downarrow 0$$

が与えられているとする。 $C(kh_n, h_n)$ は time increment を h_n に

と、たときの k 番目の step における差分作用素である。

今(1)で、十分滑らかな初期条件 x に対し $u(t)$ が存在すると仮定しよう。このとき、difference iteration

$$(2') \quad u_n((k+1)h_n) = \prod_{i=0}^k C(ih_n, h_n)x$$

に対して上の差分方程式が(1)の方程式の近似になると

いう 条件 (consistency condition) と上の差分近似の iteration
 が安定であるための条件 (stability condition) ^(を考える, そして, これらの条件のうち) _{どのようなもの}
 のをえらばこの差分近似が $h_n \downarrow 0$, $h_n t_n \rightarrow t$ のとき $\prod_{i=0}^{k_n-1} C(i h_n, h_n) x$
 $\rightarrow u(t)$ の意味で (1) の解に収束するであろうか? ということが
 問題とされる. またもう一つの問題は, stability conditions と
 (1) の解の existence の間の関係を調べることである.

$A(t) = A$ で A が dense domain をもつ線型作用素であるとしよ
 う. 初めの問題に關する基本的な結果としては, 例えば Lax
 の Equivalence theorem [1] がある. 後者の問題については,
 Trotter [2] が propose したように, 半群の収束性に關する結果を
 使って, Lax-Richtmyer の stability condition が満たされてい
 るならば, A の range に關する適当な条件の下に A の閉包 $\bar{A}$
 が (C_0) -半群の生成作用素になる, という意味で (1) が well-posed
 になるということを示すことが出来る. time-dependent の場
 合で各 $A(t)$ が線型作用素であるとする. $A(t)$ を差分近似した
 形を $A_\tau(t)$ ($0 < \tau \leq \theta$) と書いて, $A_\tau(t)$ で $A(t)$ を近似するとい
 うことを, $A_\tau(t)x \rightarrow A(t)x$ ($x \in D(A(t))$) で表わすものとする. 今 (1)
 の propagator が存在するための T. Kato の条件や H. Tanabe
 [3] の条件が $\{A(t)\}$ に対して満たされているものとしよう.

このとき $C(kh, h)$ を $(I - hA_{\tau}(kh))^{-1}$ なる implicit form の差
 分作用素とすると, 安定条件 $\|\prod_{i=0}^n C(ih, h)\| \leq M$ の下に上に近

べた形の convergence が従うことが H. Fujita に よって 報告され
ている (本 講義録「発展方程式の近似理論 (1966))

この報告では各 $A(t)$ が必ずしも線型でない場合に, 上の形
の implicit form による差分近似 (2) の (1) の解への収束を扱った,
この議論を半線型問題に適用する.

§ 1. この節では Cauchy 問題 (1) 及び (1) に与えられた作用素の
族 $\{A(t): 0 \leq t \leq T\}$ に対して以下に与える条件を導入してこれら
を仮定する:

- (i) $D(A(t)) = D$ が t に独立.
- (ii) 正定数 $\Delta > 0$ が存在して任意の $\theta \in (0, \Delta]$ と $t \in [0, T]$ に対し
て $R(I - \theta A(t))$ 上に $(I - \theta A(t))^{-1}$ が存在して, 更に $\overbrace{X}^{(その)}$ 上への拡張
 $L(t, \theta)$ が存在する.

- (iii) 定数 $T_0 (\leq T)$ と, D をそれ自身に写す D 上で連続な作用
素の族 $\{U(t, s): 0 \leq s \leq t \leq T_0\}$ が存在して次の条件を満たす:

- 1)° evolution property,
- 2)° 各 $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ に対して $U(t, s)x$ は $t (\geq s)$ に関して
連続的に強微分可能で

$$U'(t, s)x = A(t)U(t, s)x, \quad 0 \leq s \leq t \leq T_0.$$

さて Cauchy 問題 (1) に対して時間変数 t に関する次の形の

差分近似を考える:

$$(5) \quad \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = A(t+h)u(t+h), \quad h > 0.$$

すると上記の条件 (i), (ii), (iii) の下には,

$$u(t+h) = (I - hA(t+h))^{-1}u(t) = L(t+h, h)u(t).$$

定理 1. (1) に對して条件 (i), (ii), (iii) が満たされているものとする. このとき, 任意の compact set K に對して定数 $M > 0$ が存在して,

$$\left\| \prod_{i=2}^n L(ih, h)x - \prod_{i=2}^n L(ih, h)y \right\| \leq M \|x - y\|,$$

$$0 < h \leq \Delta, \quad 0 \leq h_2 \leq h_n \leq T, \quad x, y \in K$$

であるならば, 次の収束が成立する:

$$(4) \quad \lim_{\substack{h, h_2, h_n \uparrow t \\ h \rightarrow 0}} \prod_{i=2}^n L(ih, h)x = U(t, s)x, \quad x \in \bar{D}.$$

ここで上の収束は各 $x \in X$ とめるごとに $t \in [s, T_0]$ について一様であり, 各 t とめるごとに任意の compact set 上で一様である.

証明. $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ を任意にとりて固定する. すると集合 $\{(I - hA(h(i+1)))U(h(i+1), s)x : 0 < h \leq \Delta, s \leq h(i+1) \leq T_0\}$ が compact であり, $s \leq h_2 \leq h_n \leq t$ に対して次の評価を得る:

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{i=2}^n L(ih, h)x - U(t, s)x \right\| &\leq \left\| \prod_{i=2}^n L(ih, h)x - \prod_{i=2}^n L(ih, h)U(h_2, s)x \right\| \\ &+ \left\| \prod_{i=2}^n L(ih, h)U(h_2, s)x - U(h_n, s)x \right\| + \left\| U(h_n, s)x - U(t, s)x \right\| \\ &\leq M \|hA(h_2)U(h_2, s)x - (U(h_2, s)x - x)\| + \|U(h_n, s)x - U(t, s)x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=l+1}^n M \| h A(h_k) U(h_k, s)x - (U(h_k, s)x - U(h_{k-1}, s)x) \| \\
& \leq M \| h U'(h_l, s)x - \int_s^{h_l} U'(\sigma, s)x d\sigma \| + \| U(h_n, s)x - U(t, s)x \| \\
& + M h \sum_{k=l+1}^n \frac{1}{h} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \| U(h_k, s)x - U(\sigma, s)x \| d\sigma.
\end{aligned}$$

$U(\sigma, s)x$ は $[s, T_0]$ 上で一様連続であるから上式右辺は $h \downarrow s$, $h_n \uparrow t$, $h \rightarrow 0$ のときに, t に関して一様に 0 に収束する. 各 $U(t, s)$ は $\bar{D}$ で連続であるから, 上の収束は $\bar{D}$ 上でも成立する.

[終]

条件 (iii) については §3 で述べることにしよう. 条件 (ii) については以下の事が分っている: まず次の条件を導入する:

(iv) 各 $t \in [0, T]$ に対してある $h_t \in (0, \Delta]$ が存在して $\overline{R(I - h_t A(t))} = X$.

命題 2. 上の (iv) を仮定する. また任意の $h \in (0, \Delta]$ に対して $(I - h A(t))^{-1}$ が $R(I - h A(t))$ 上で存在し, h には無関係な定数 $M > 0$ を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続であるとする.

すると各 $h \in (0, \Delta]$ に対して $\overline{R(I - h A(t))} = X$ であり, 各 $(I - h A(t))^{-1}$ は X 上への一意な拡張 $L(t, h)$ を持ち, これらの拡張は同じ定数 M で Lipschitz 連続となる.

証明. $h = h_t$ に対しては命題は成立している. $h > 0$ と $t \in [0, T]$ をとって

$$(I - h A(t)) = (h/h_t) [I - (1 - (h_t/h)) L(t, h_t)] (I - h_t A(t))$$

なる変形をほどこして、任意に固定した $x \in X$ に対して写像 K を、

$$Ky = (h_t/h)x + (1 - (h_t/h))L(t, h_t)y, \quad y \in X$$

すると K は $(M+1)^{-1}Mh_t < h < (M-1)^{-1}Mh_t$ なる h に対して X 上で縮小写像になるから、一意な K の不動点 z が存在する。すなわち $(h_t/h)x = [I - (1 - (h_t/h))L(t, h_t)]z$ 。ところで $\overline{R(I - h_t A(t))} = X$ であるから z に収束する列 $\{z_n\}$ が $R(I - h_t A(t))$ の中にとれる。 $y_n = (I - h_t A(t))^{-1}z_n$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ で

$$(I - h_t A(t))y_n = (h/h_t)[I - (1 - (h_t/h))L(t, h_t)]z_n \rightarrow x,$$

これは上の範囲の h に対して $\overline{R(I - h A(t))} = X$ となることを示している。従って特に $0 < \alpha < 1$ なる α に対して $\overline{R(I - (M+1)^{-1}(M+\alpha)h_t A(t))} = X$ となる。そこで再び $I - h A(t)$ を、

$$\frac{M+1}{M+\alpha} \frac{h}{h_t} \left[I - \left(1 - \frac{M+\alpha}{M+1} \frac{h_t}{h} \right) L\left(t, \frac{M+\alpha}{M+1} h_t\right) \right] \left(I - \frac{M+\alpha}{M+1} h_t A(t) \right)$$

の形に変形して、任意に固定した $x \in X$ に対して写像 K_1 を

$$K_1 y = \frac{M+\alpha}{M+1} \frac{h_t}{h} x + \left(1 - \frac{M+\alpha}{M+1} \frac{h_t}{h} \right) L\left(t, \frac{M+\alpha}{M+1} h_t\right) y, \quad y \in X$$

で定義すると、 K_1 は $\frac{M}{M+1} \frac{M+\alpha}{M+1} h_t < h < \frac{M+\alpha}{M+1} \frac{M}{M-1} h_t$ なる h について X 上の縮小写像となる。上と同様の議論によってこの形な

h に対して $\overline{R(I - h A(t))} = X$ となる。また $\overline{R(I - (M-1)^{-1}(M-\alpha)h_t A(t))} = X$ であることを使えば $\frac{M-\alpha}{M-1} \frac{M}{M+1} h_t < h < \frac{M-\alpha}{M-1} \frac{M}{M-1} h_t$ なる h によ

って $\overline{R(I - h A(t))} = X$ 。帰納的に $\overline{R(I - (\frac{M+\alpha}{M+1})^k h_t A(t))} = X$ ($k=3, 4, 5, \dots$)^{*}

であることが分る。よって証明された。

[終]

^{*} 但し $(\frac{M-\alpha}{M-1})^k$ については $(\frac{M-\alpha}{M-1})^k \leq \Delta < (\frac{M-\alpha}{M-1})^{k+1}$ となる k までとる。

Lumer-Phillips [9] の dissipativity の概念を従、次の条件を導入する:

$$(V_1) \quad \operatorname{re}[x-y, A(t)x-A(t)y] \leq 0, \quad x, y \in D(A(t)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

ここに $[\cdot, \cdot]$ は X に与えられた a semi-inner product. (X が Hilbert 空間の場合には兩種を考へる).

次に x, y に対し $\tau(x, y)$ を $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \{ \|x + \alpha y\| - \|x\| \}$ で定義する. これは任意の $x, y \in X$ に対し常に存在して次の性質を持つ:

$$(a) \quad |\tau(x, y)| \leq \|y\|, \quad (b) \quad \tau(x, y+z) \leq \tau(x, y) + \tau(x, z)$$

$$(c) \quad \tau(x, \lambda x + cy) = \operatorname{re}(\lambda) \|x\| + c \tau(x, y) \quad (c \geq 0). \quad (\square 2) \text{ 参照}$$

そこで次の条件を導入する:

$$(V_2) \quad \tau(x-y, A(t)x-A(t)y) \leq 0, \quad x, y \in D(A(t)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

命題 3. 条件 (iv) と、上に述べた条件 (V₁) もしくは (V₂) から条件 (ii) が従う. しかも条件 (ii) の $L(t, t)$ はこの場合 X 上の contraction となる.

証明. 以下の評価から $(I - hA(t))^{-1}$ が存在して $\mathcal{R}(I - hA(t))$ 上で contraction となることが分る:

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &\leq [x-y, x-y] - h \operatorname{re}[x-y, A(t)x-A(t)y] \\ &= \operatorname{re}[x-y, (x-y) - (hA(t)x - hA(t)y)] \\ &\leq \|x-y\| \cdot \|(I - hA(t))x - (I - hA(t))y\|. \end{aligned}$$

(V₂) の場合も同様にして計算出来る. 従って命題 2 から ^(上の) 命題が従う. [終]

次の補題は後で使われる:

補題4. $U: X \rightarrow X$ は $M > 0$ を Lip. 定数として Lipschitz 連続であるとする. すると $0 < |\beta|M < |\alpha|$ なる α, β に対して $(\alpha + \beta U)^{-1}$ が X 上で定義され $(|\alpha| - |\beta|M)^{-1}$ を Lip. 定数として Lip. 連続.

証明. $x \in X$ を任意に 1 を固定して $Wy = \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}\beta Uy$ ($y \in X$) とおくと $\|Wy_1 - Wy_2\| \leq |\alpha|^{-1}|\beta|M\|y_1 - y_2\|$ であるから W は X 上の contraction となる. 従って W は一意な不動点 z をもつ. これから $x = \alpha z + \beta Uz$. これは $R(\alpha + \beta U) = X$ を意味している. 後半は次の評価から明らかである: 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\|(\alpha + \beta U)x - (\alpha + \beta U)y\| \geq |\alpha|\|x - y\| - |\beta|M\|x - y\| = (|\alpha| - |\beta|M)\|x - y\|.$$

§2. Cauchy問題(1)で与えられた作用素 $A(t)$ に対する(空間変数に関する)差分近似を次の様に考える:

$\{A_\tau(t): 0 \leq \tau \leq \theta\}$ なる作用素の one parameter の族が存在して,

$$(A) \quad s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} A_\tau(t)x = A(t)x, \quad t \in [0, T], x \in D(A(t))$$

parameter τ は場合に応じて 0 に収束する列であると考えよう.

空間変数に関する偏微分の近似が translation operators で書けるということを考え、各 $A_\tau(t)$ は X 上で定義されているものと仮定する. それで我々は(1)に対して(3)と同じ形の差分近似

$$h^{-1}(u(t+h) - u(t)) = A_\tau(t+h)u(t+h), \quad h > 0$$

を考へることにある。そこでこの差分近似に關して次の条件を考へる:

(vi) 各 $h \in (0, \Delta]$, $\tau \in (0, \theta]$, $t \in [0, T]$ に対して $(I - hA_\tau(t))^{-1}$ が X 上に存在して, 任意の compact set 上で h と τ には一様 Lipschitz 連続.

この節では consistency conditions と stability conditions を導き入して, その間の強さの關係を調べ, 上に述べた差分近似の iteration の収束性についての結果を述べる.

また, この節を通じて条件(iii)と(vi)を仮定しよう.

補題5. 命題2の仮定と上に導入した条件(vi)がみたされているとき, 差分近似(A)を考へる限り次の収束が従う:

$$(B) \quad s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} (I - hA_\tau(t))^{-1}x = L(t, h)x, \quad h \in (0, \Delta], t \in [0, T], x \in X.$$

ここで上の収束は x とめる毎に $(0, \Delta]$ の中の任意の compact set で一様であり, t とめる毎に X の任意の compact set で一様である. また $L(t, h)$ は命題2で云う $(I - hA(t))^{-1}$ の拡張である.

証明. 命題2から全ての $h \in (0, \Delta]$ に対して $\overline{Q(I - hA(t))} = X$ である. また条件(vi)によって $Q(I - hA(t))$ の任意の元 x に対し,

$$\begin{aligned} & \| (I - hA_\tau(t))^{-1}x - L(t, h)x \| \\ &= \| (I - hA_\tau(t))^{-1}(I - hA(t))y - L(t, h)(I - hA(t))y \| \\ &= \| (I - hA_\tau(t))^{-1}(I - hA(t))y - (I - hA_\tau(t))^{-1}(I - hA_\tau(t))y \| \\ &\leq hM \| A_\tau(t)y - A(t)y \| \end{aligned}$$

である。二の右辺は $\tau \rightarrow 0$ のとき h に一様 0 に収束する。
 従、任意の $x \in X$ に対し $(I - hA_\tau(t))^{-1}x$ は $L(t, h)x$ に収束し、この収束は命題に述べた意味での収束になる。このことが分る。[終]

次に consistency conditions を導入しよう。

(C1) 各 $s \in [0, T_0]$ に対し t の収束が t に関して一様に成立する:

$$s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} A_\tau(t)U(t, s)x = A(t)U(t, s)x, \quad x \in D.$$

次に τ を $h \rightarrow 0$ のとき $\tau(h) \rightarrow 0$ となるような h の函数であるとする。time t における差分作用素は $C(t, h) = (I - hA_{\tau(h)}(t+h))^{-1}$ となる。そこで

(C) 各 $s \in [0, T_0]$ に対し t の収束が t に関して一様に成立する:

$$s\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(C(t, h) - I)U(t, s)x = A(t)U(t, s)x, \quad x \in D.$$

(C2). 各 $s \in [0, T_0]$ に対し t の収束が t に関して一様に成立する:

$$s\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(C(t, h) - U(t+h, h))U(t, s)x = 0, \quad x \in D.$$

以上の条件は差分方程式が微分方程式の近似になる、ということを示す意味で各々 consistency condition となる。このこと、これらの間には次の意味での強弱関係が存在する:

補題6. $h_j \downarrow 0$ のとき $\tau(h_j) \rightarrow 0$ として, $s \in [0, T_0]$ を 1 つ定め
 T ときに各 j に対して $t \rightarrow A_{\tau(h_j)}(t)U(t, s)x$ ($x \in D$) が $t \in [s, T_0]$ に
 ついて強連続であるとする. すると, $(C1) \Rightarrow (C2) \Rightarrow (C)$.

証明. $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ を任意にとる. すると $\{U(t, s)x : t \in [s, T_0]\}$
 $U\{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(t+h_j))U(t+h_j, s)x : t \in [s, T_0], h_j \in (0, \Delta]\}$ の閉包は compact
 である. 従って次の評価を得る:

$$\begin{aligned} & \|h_j^{-1}(C(t, h_j) - I)U(t, s)x - A(t)U(t, s)x\| \\ & \leq h_j^{-1}\|(I - h_j A_{\tau(h_j)}(t+h_j))^{-1}U(t, s)x - U(t+h_j, s)x\| \\ & + \|h_j^{-1}[U(t+h_j, s)x - U(t, s)x] - A(t)U(t, s)x\| \\ & \leq M \|A_{\tau(h_j)}(t+h_j)U(t+h_j, s)x - h_j^{-1}[U(t+h_j, s)x - U(t, s)x]\| \\ & + h_j^{-1} \int_t^{t+h_j} \|U(\sigma, s)x - U(t, s)x\| d\sigma. \end{aligned}$$

上の右辺は $U(\sigma, s)x$ が $[s, T_0]$ で連続で, $(C1)$ が成立することか
 ら $h_j \rightarrow 0$ に対して $t \in [s, T_0]$ に一様に 0 に収束する. $(C2) \Rightarrow (C)$
 は上の評価の初めの不等式から明らか. [終]

次に stability condition として次のようなものを考える:

(S1). 任意の compact set K に対して次の条件を与える正定数
 $M > 0$ が存在する:

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{i=l}^n (I - h A_{\tau(h_i)})^{-1} x - \prod_{i=l}^n (I - h A_{\tau(h_i)})^{-1} y \right\| \leq M \|x - y\|, \\ & t \in (0, \theta], h \in (0, \Delta], 0 \leq h_l \leq h_n \leq T, x, y \in K. \end{aligned}$$

(S). mesh を $h \rightarrow 0$ のとき $\tau(h) \rightarrow 0$ となるように定める. このと
 き任意の compact set K に対して次の条件を与える正定数 M が

存在する:

$$\left\| \prod_{i=\ell}^n (I - h_i A_{\tau(h_i)}(i, h_i))^{-1} x - \prod_{i=\ell}^n (I - h_i A_{\tau(h_i)}(i, h_i))^{-1} y \right\| \leq M \|x - y\|,$$

$$h_i \in (0, \Delta], 0 \leq h_\ell \leq h_n \leq T, x, y \in K.$$

上に導入した consistency conditions と stability conditions の下で以下の形の収束が導かれる:

定理 7. 命題 2 もしくは命題 3 の仮定が満たされているとき, stability condition (S1) から次の収束が得られる.

$$(5) \quad \lim_{\substack{h_j \downarrow s, h_j \uparrow t \\ h_j \rightarrow 0}} \lim_{\tau_p \rightarrow 0} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau_p}(i, h_j))^{-1} x = U(t, s)x,$$

$$0 \leq s \leq t \leq T_0, x \in \bar{D}.$$

証明. $\tau_p \rightarrow 0$ とする. すると補題 5 により各 K, h_j に対して集合 $\{(I - h_j A_{\tau_p}(h_j, K))^{-1} \prod_{i=l_j}^K L(i, h_j, h_j)x : \tau_p \in (0, \theta]\}$ は compact である. 従って (S1) から次の収束が従う:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau_p}(i, h_j))^{-1} x = \prod_{i=l_j}^{n_j} L(i, h_j, h_j)x, \quad x \in X, h_j \in (0, \Delta], 0 \leq h_j \leq h_j \leq T_0.$$

この収束から定理 1 の条件が全て満たされることがわかる. 従って定理 1 から命題が従う. [終]

定理 8. $h_j \downarrow 0$ のとき $\tau(h_j) \rightarrow 0$ となる mesh を考える. 今 $\{A(t)\}$ が t に関して右滑らかである場合を考えて次の条件を仮定する:

(A1)* $[0, T]$ の中の任意の収束数列 $t_j \rightarrow t$ に対して $\{A_{\tau(h_j)}(t_j)x\}_j$

$(x \in D)$ は有界.

(もしくは $(C_i) (i=1, 2)$)

このとき consistency condition (C) が満たされるならば,

条件 (S) から次の収束が従う:

$$(6) \quad \lim_{\substack{h_j, l_j \downarrow s, h_j, n_j \uparrow t \\ h_j \rightarrow 0}} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x = U(t, s)x, \\ 0 \leq s \leq t \leq T_0, \quad x \in \bar{D}.$$

証明. 補題 6 から条件 (C) と (S) の下に (6) を導くには十分である. $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ を任意にとりて固定する. すると

$(I - h_j A_{\tau(h_j)}(l_j h_j))^{-1} x \rightarrow x$ であり, 集合 $\{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(h_j k))^{-1} U(h_j k, s)x : h_j \in (0, \Delta], k \text{ with } s \leq h_j k \leq T_0\}$ が compact であるから次の評価を得

る: 充分大きな $M > 0$ をとれば,

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x - U(t, s)x \right\| \\ & \leq \left\| \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x - \prod_{i=l_j+1}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} U(h_j l_j, s)x \right\| \\ & + \left\| \prod_{i=l_j+1}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} U(h_j l_j, s)x - U(h_j n_j, s)x \right\| \\ & + \left\| U(h_j n_j, s)x - U(t, s)x \right\| \\ & \leq M \left\{ \left\| (I - h_j A_{\tau(h_j)}(l_j h_j))^{-1} x - x \right\| + (h_j l_j - s) \left\| \frac{U(h_j l_j, s)x - x}{h_j l_j - s} \right\| \right\} \\ & + M h_j \sum_{k=l_j}^{n_j-1} \left\| \frac{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(h_j(k+1)))^{-1} - I}{h_j} U(h_j k, s)x - A(h_j k) U(h_j k, s)x \right\| \\ & + M h_j \sum_{k=l_j}^{n_j-1} \left\| A(h_j k) U(h_j k, s)x - \frac{U(h_j(k+1), s)x - U(h_j k, s)x}{h_j} \right\| \\ & + \left\| U(h_j n_j, s)x - U(t, s)x \right\| \end{aligned}$$

(C) と $U(t, s)x$ の $[s, T_0]$ 上の強連続性から上の右辺は $h_j \rightarrow 0$,

$h_j, t_j \downarrow s, t_j, n_j \uparrow t$ の時に $t \in [s, T_0]$ には一様に 0 に収束する。各 $U(t, s)$ は $\bar{D}$ 上で連続であるから、上の収束は $\bar{D}$ 上でも成立する。[終]

注意 1. (C1) が満たされるときには、上の定理で仮定 (A1) は不要となる。

注意 2. (C2) を仮定するときには、上の定理で各 $x \in D$ に対して $U(t, s)x$ が微分可能であることを仮定する必要はない。

注意 3. 収束 (6) から、作用素の族 $\{\prod_{i=1}^n (I - h_i A_{t_i})\}^{-1}$ は任意の compact set と $\bar{D}$ との共通部分の上で $h_i \in (0, 4], h_i n_i \in [0, T]$ なる h_i, n_i に関して equicontinuous であることが従う。

§ 3. 以下の節では次の形の半線型 Cauchy 問題を考える：

$$(6) \quad \frac{du(t)}{dt} = F(t)u(t) + G(t)u(t), \quad u(s) = x, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

ここで線型作用素の族 $\{F(t) : 0 \leq t \leq T\}$ は次の線型 Cauchy 問題

$$(7) \quad \frac{du(t)}{dt} = F(t)u(t), \quad u(s) = x, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

の propagator $V(t, s)$ が存在するための条件を満たしているものとする。

例えば hyperbolic case では次の T. Kato, K. Yosida [4]

の条件を満足することが出来る：

(i). $D(F(t)) = D$ は t に独立で X で dense linear. 各 $F(t)$ は縮小半群の生成作用素

(ii). $F(t)^{-1}, F(t)F(s)^{-1} \in L(X, X)$. ここで $L(X, X)$ は $X \rightarrow X$ なる有界線

型作用素の全体の作る Banach algebra.

(iii) $C(t, s) = F(t)F(s)^{-1}I$ といった時, $(t-s)^{-1}C(t, s)$ は $t \neq s$ で一様連続であり, $\sup_{t \neq s} \|(t-s)^{-1}C(t, s)\| = N < +\infty$. 更に $\lim_{k \rightarrow \infty} k(C(t, t-k^{-1})x) = C(t)x$ が t に一様には存在して $C(t) \in L(X, X)$.

parabolic case では例えば H. Tanabe [3] の条件を仮定できる.

この時(6)の形の半線型問題は次の意味で積分方程式を考えることに帰着させることが出来る:

定理 9. 正定数 T_0 ($\leq T$) が存在して, 任意の $s \in [0, T_0] \subset [0, T]$ と $x \in X$ に対して積分方程式

$$(8) \quad u(t) = V(t, s)x + \int_s^t V(t, \sigma)G(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

は $C([s, T_0]; X)$ に一意な解を持ち, $x \rightarrow u(t)$ は $X \rightarrow C([s, T_0]; X)$ なる写像として連続であるとする. 更にある稠密な集合 D が存在して, これに対応する(8)の解 $u(t)$ について $G(t)u(t)$ が連続で, $u(t)$ が連続的に微分可能であるときには, 条件(iii)に述べた $(X$ 上で)連続な作用素の族 $\{U(t, s)\}$ が存在する.

証明. $u(t)$ を $s \in [0, T_0]$, $x \in X$ に対応した(8)の一意解とし, $u(t) = U(t, s)x$ とおけば, $U(t, s)$ は $X \rightarrow X$ なる連続作用素であり, 各 $x \in X$ に対して $U(t, s)x$ は $[s, T_0]$ 上で連続である. 又 $U(s, s) = I$ であり, 解の一意性から $\{U(t, s): 0 \leq s \leq t \leq T_0\}$ が evolution property を持つことが分る. また定理の条件の下で $U(t, s)$ が (iii) の (2)° (p. 3) を満たすことは次の等式から容易に分る:

$$u(t+\varepsilon) - u(t) = [V(t+\varepsilon, s) - V(t, s)]x + \int_s^t [V(t+\varepsilon, \sigma) - V(t, \sigma)]G(\sigma)u(\sigma)d\sigma \\ + \int_t^{t+\varepsilon} V(t+\varepsilon, \sigma)G(\sigma)u(\sigma)d\sigma = [V(t+\varepsilon, t) - I]u(t) + \varepsilon G(t)u(t) + o(\varepsilon).$$

ここで $o(\varepsilon)$ は $t \in [s, T_0]$ に對して $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $o(\varepsilon) = 0$ となる。 [終]

上に述べた種分方程式(8)の mild solution に對しては, Browder [8], Segal [6], Lions [] 等の結果がある。これらの結果では非線型項 $G(t)$ に對して 次の条件を仮定している:

[D] $G(t)$ は $[0, T] \times X \rightarrow X$ なる写像として連続で、各 $t \in [0, T]$ に對して $G(t)$ は dissipative もしくは τ -dissipative.

この条件は、変換 $u(t) \rightarrow e^{-kt}u(t)$ を考えれば容易に分る様に [D] の代わりに 次の条件のいづれをとっても議論は同じになる:

$$1) \tau(x-y, G(t)x - G(t)y) \leq K \|x-y\|, \quad x, y \in X.$$

2) X は smooth unit ball を持ち,

$$\operatorname{re} [x-y, G(t)x - G(t)y] \leq K \|x-y\|^2, \quad x, y \in X.$$

最近 Y. Kamura [10] は Hilbert 空間における dissipative 写像を扱った Hille-Yosida 定理の非線型の場合への拡張を得た。

また T. Kato [11] はこの結果を, dual space が uniformly convex である様な Banach 空間に拡張した。

§ 4. $A(t) = F(t) + G(t)$ の差分近似 $A_\tau(t)$ は $F_\tau(t), G_\tau(t)$ を, $F(t), G(t)$ の各々差分近似として $F_\tau(t) + G_\tau(t)$ の形に書ける. 又 § 2 の初めに述べた理由から各 $F_\tau(t)$ は有界線型作用素, 各 $G_\tau(t)$ は X 上の連続作用素であるとある. この節では前節に述べた半線型の場合における Stability conditions (S), (S1) についていくつかの十分条件を取扱う. また最後にこれらの十分条件と差分近似との関係について調べる. 簡単のためこの節を通じて $D(F(t)) = D, \overset{(D=X)}{D(G(t))} = X$ としておく. まず次の条件を導入する:

$$(Sa). \quad \left\| \prod_{i=0}^n (I - h_i F_{\tau(h_i)}(t_i))^{-1} \right\| \leq K, \quad h_i \in (0, \Delta], \quad 0 \leq h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_n \leq T.$$

$$(Sb). \quad \left\| (I - h F_{\tau(h)}(t))^{-1} \right\| \leq 1 + O(h), \quad 0 \leq t \leq T. \quad \text{ここで } O(h) \text{ は } t \text{ に一様}$$

$$(Sc). \quad \text{任意の compact set } K \text{ に対して } t \in [0, T], \tau \in (0, \theta] \text{ には独立な } M > 0 \text{ が存在して, } \|G_\tau(t)x - G_\tau(t)y\| \leq M\|x - y\|, \quad x, y \in K.$$

$$(Sd). \quad \text{任意の有界集合 } U \text{ に対して } t \in [0, T], \tau \in (0, \theta] \text{ には独立な } M > 0 \text{ が存在して, } \|G_\tau(t)x - G_\tau(t)y\| \leq M\|x - y\|, \quad x, y \in U.$$

$$(Se). \quad t, \tau \text{ に独立な } M > 0 \text{ が存在して任意の } x, y \in X \text{ に対して } \|G_\tau(t)x - G_\tau(t)y\| \leq M\|x - y\|.$$

命題 10. 各 h, t に対して $(I - h A_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在して, 任意の有界集合 W に対して,

$$\left(\prod_{i=0}^n (I - h_i A_{\tau(h_i)}(t_i))^{-1} \right)(W) \subset U, \quad h_i \in (0, \Delta], \quad 0 \leq h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_n \leq T$$

をなせる有界集合 U が存在すると仮定する. この時もしも

(Sb)と(Sd)が満たされるならば(S)が従う。

証明. $(I-hA_{\tau(h)}(t)) = (I-hF_{\tau(h)}(t))(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))$ であるから $(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))^{-1}$ ^(X上に) が存在する. 任意の有界集合 U に対して B_r で半径 $r = (1+K\Delta) \sup_{u \in U} \|u\|$ を半径とする closed ball を取ると, 任意の $x, y \in B_r$ に対して

$$\|(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))x - (I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))y\| \geq (1-(1+K\Delta)hM_{B_r})\|x-y\|,$$

任意の有界集合 W に対してある有界集合 U があって $\prod_{i=0}^n (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}(W) \subset U$ であるから任意の $u, v \in W$ に対して,

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{i=0}^n (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}u - \prod_{i=0}^n (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}v \right\| \\ & \leq (1-(1+K\Delta)hM_{B_r})^{-1}(1+K\Delta) \left\| \prod_{i=0}^{n-1} (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}u - \prod_{i=0}^{n-1} (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}v \right\| \\ & \text{従って } h \in (0, \Delta] \text{ と } 0 \leq h_l \leq h_n \leq T \text{ に対して任意の } u, v \in W \text{ について,} \\ & \left\| \prod_{i=0}^n (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}u - \prod_{i=0}^n (I-hA_{\tau(h)}(t_i))^{-1}v \right\| \leq (1+O(h))^{n-l} \|u-v\|. \quad [\text{終}] \end{aligned}$$

系. (Sb) と (Se) から (S) が従う。

証明. 補題4 から各 $t \in [0, T]$, $h \in [0, \Delta]$ に対して $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1} = [I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t)]^{-1}(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在して X 上で $(1-hM(1+K\Delta))^{-1}$ を Lipschitz 定数として連続となるから, 命題にと同様にして (S) が導かれる. [終]

$F(t)+G(t)$ が dissipative の時 dissipative な近似が可能な場合:

命題11. 各 $t \in [0, T]$, $\tau \in (0, \Theta]$ に対して $R(I-h_{\tau, t}A_{\tau}(t)) = X$ とする ^{(1) (2)} 正数 $h_{\tau, t}$ が存在すると仮定する. 今もしも τ, t には独立な定数 t_1, M_1 が存在して条件

(Sf) $\operatorname{re}[x, F_\varepsilon(t)x] \leq K_1 \|x\|^2, x \in X$ (Sg) $\operatorname{re}[x-y, G_\varepsilon(t)x - G_\varepsilon(t)y] \leq 0, x, y \in X$.
 が満たされているとする. すると (S1) が導かれる.

証明. Semi-inner product による Schwartz の不等式から
 $\| [I - h(F_\varepsilon(t) + G_\varepsilon(t))]x - [I - h(F_\varepsilon(t) + G_\varepsilon(t))]y \| \leq (1 - h(K_1 + M_1)) \|x - y\|$. 任意
 の $x, y \in X$ と $h > 0$ に対して成立するから, $\mathcal{R}(I - hA_\varepsilon(t))$ の上で
 $\| (I - hA_\varepsilon(t))^{-1}u - (I - hA_\varepsilon(t))^{-1}v \| \leq (1 - h(K_1 + M_1))^{-1} \|u - v\|$. 従って
 命題 2 の証明から, $h \in (0, (K_1 + M_1)^{-1})$, $\tau \in (0, \theta]$, $t \in [0, T]$ に対して
 $\mathcal{R}(I - hA_\varepsilon(t)) = X$ となるから $(I - hA_\varepsilon(t))^{-1}$ が X 上に定義され, こ
 れから 命題 10 と同様に (S1) が導かれる. [終]

次に上の Stability conditions (Sa) ~ (Sg) は implicit iteration (2) を可
 能にさせること, すなわち各 $t \in [0, T]$, $h \in (0, \Delta]$ に対して $(I - hA_{\varepsilon(h)}(t))^{-1}$
 を X 上に存在させることを示す.

定理 12. 各 $G_\varepsilon(t)$ が X で連続な Frechet 微分 $dG_\varepsilon(t)[u]$ を持つと
 する. また mesh size が $h \rightarrow 0$ の時 $\tau(h) \rightarrow 0$ で $\|hF_{\varepsilon(h)}(t)\| \leq \alpha < 1$ と仮称
 に定められているものとする. 更に X は smooth unit ball を持
 つとする. すると (Sb) と (Sg) の下には各 $t \in [0, T]$, $h \in (0, \Delta]$ に対して
 $(I - hA_{\varepsilon(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在する.

証明. Frechet 微分は Gateaux 微分に等しく, X が smooth unit
 ball を持つ (Sg) が満たされているから, $\operatorname{re}[\eta y, G_{\varepsilon(h)}(t)[u + \eta y] - G_{\varepsilon(h)}(t)u]$
 $\leq M_1 \|\eta y\|^2, \eta > 0$. 従って $\operatorname{re}[y, dG_{\varepsilon(h)}(t)[u]y] \leq M_1 \|y\|^2, u, y \in X$. この
 事から $\| (I - dG_{\varepsilon(h)}(t)[u])^{-1} \| \leq (1 - M_1 h)^{-1}$. 任意の有界線型作用素は

Frechet 微分を持ちそれは自分自身に等しい. x を任意に固定し, $H_\varepsilon(t)y = h^{-1}x - h^{-1}y + G_\varepsilon(t)y$, $y \in X$ とする. $\phi_{\varepsilon,h}(t) = F_{\varepsilon,h}(t) + H_{\varepsilon,h}(t)$ とすると $\phi_{\varepsilon,h}(t)$ は X 上で連続な Frechet 微分 $-[h^{-1}(F_{\varepsilon,h}(t) + dG_{\varepsilon,h}(t)[u])]$ を持つ. 十分小さな $h > 0$ に対しては

$$[h^{-1}(F_{\varepsilon,h}(t) + dG_{\varepsilon,h}(t)[u])]^{-1} = h[I - (I - h dG_{\varepsilon,h}(t)[u])^{-1} h F_{\varepsilon,h}(t)]^{-1} (I - h dG_{\varepsilon,h}(t)[u])^{-1}$$

であるから, $\|[h^{-1}(F_{\varepsilon,h}(t) + dG_{\varepsilon,h}(t)[u])]^{-1}\| \leq h(1 - (1 - M_1 h)^{-1} \alpha)^{-1} (1 - M_1 h)^{-1}$. 右辺は h には独立であるから global implicit function theorem [5] により, $\phi_{\varepsilon,h}(t)$ は $X \rightarrow X$ なる homeomorphism である. 従って $\phi_{\varepsilon,h}(t)y = 0$ を与える一意な $y \in X$ が存在する. すなわち $x = [I - h(F_{\varepsilon,h}(t) + G_{\varepsilon,h}(t))]y$. これは $(I - hA_{\varepsilon,h}(t))^{-1}$ が X 上に存在することを示す. [終]

定理 13. X を Hilbert 空間とし (Sg) と (Sf) が満たされているとする. すると各 $t \in [0, T]$, $\tau \in (0, \theta]$, $h \in (0, \Delta]$ に対して $(I - hA_\varepsilon(t))^{-1}$ が X 上に定義される.

証明. $\phi_{\varepsilon,h}(t)$ を定理 12 の証明における様に定義する. $(Sg), (Sf)$ から $\forall \varepsilon < y - z, \phi_{\varepsilon,h}(t)y - \phi_{\varepsilon,h}(t)z \geq (-h^{-1} + k + M_1)\|y - z\|^2$, $y, z \in X$, であるから十分小さな $h > 0$ に対しては, $\phi_{\varepsilon,h}(t)$ は X 上で定義され, 連続で strongly dissipative である. 従って Minty の陰函数定理 [7], [5] から各 $\phi_{\varepsilon,h}(t)$ は X からその上への 1-1 写像である. これから $(I - hA_\varepsilon(t))^{-1}$ が X 上で定義されることが分る. [終]

注意 1. $(Sg), (Sf)$ の代わりに次の条件を考える:

(Sg) $\tau(x, F_\varepsilon(t)x) \leq k_1 \|x\|$, $x \in X$, (Si) $\tau(x - y, G_\varepsilon(t)x - G_\varepsilon(t)y) \leq M_1 \|x - y\|$, $x, y \in X$.

X が Hilbert 空間の時 $re\langle x, y \rangle = \|x\|^2 r(z, y)$ であるから $(Sf) = (Sh), (Sg) = (Su)$

命題 11 と同様にして $(Sh), (Su)$ から (S) を導くことが出来る.

注意 2. 定理 12 において (Sg) の代わりに (Su) を仮定して同じ

結論が得られる: 実際 (Su) から $r(\eta y, G_\tau(t)(u + \eta y) - G_\tau(t)u) \leq M\|\eta y\|$

一方 $r(\eta x, y) = r(x, y)$ ($\eta > 0$) であるから $r(y, dG_{\tau\eta}(t)u)y) \leq M\|y\|, y \in X$.

これから $\|(I - \eta dG_{\tau\eta}(t)u)\|^{-1} \leq (1 - M\eta)^{-1}$ が従う. 従って定理 12

と同様に global implicit function theorem を適用出来る. この場

合には unit ball が smooth である必要はない.

§ 3 の初めに述べた様に, 差分近似は

$$(A)' \quad F_\tau(t)x \rightarrow F(t)x, \quad G_\tau(t)x \rightarrow G(t)x, \quad x \in D$$

の形に考えるが, $A(t)$ の t についての滑らかさを考える.

$$(A)'' \quad F_{\tau(h)}(t+h)x \rightarrow F(t)x, \quad G_{\tau(h)}(t+h)x \rightarrow G(t)x, \quad x \in D$$

の形に考える. そこで半線型 Cauchy 問題 (6) に対する, 条件 (iii)

の作用素函数 $\{U(t, s)\}$ が存在することを仮定して以下の条件

を考える (但し (iii) における $\bar{D}$ はこの場合 X となる):

$$(Ca) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} F_\tau(t)U(t, s)x = F(t)U(t, s)x, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} G_\tau(t)x = G(t)x, \quad x \in D, s \in [0, T_0]$$

が t についての形に成立する.

$$(Cb) \quad \lim_{h \rightarrow 0} F_{\tau(h)}(t+h)U(t, s)x = F(t)U(t, s)x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} G_{\tau(h)}(t+h)U(t, s)x = G(t)U(t, s)x$$

$x \in D, s \in [0, T_0]$ が $t \in [s, T_0]$ についての形に成立する.

$$(Cc) \quad \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[(I - hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1} - V(t+h, t)]U(t, s)x = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} G_{\text{ech}}(t+h)U(t,s)x = G(t)U(t,s)x, \quad x \in D, s \in [a, T_0]$$

かつ $t \in [s, T_0]$ により一様に成立する.

以上の条件について次の定理が得られる:

定理 14. (1) (Sc) が成立するならば, (Ca) $\Rightarrow$ (C1).

以下においては (A1) が t には一様に成立すると仮定する.

(2). (Sa) と (Se) が成立するならば, (Cb) $\Rightarrow$ (C).

(3). (Sb) と (Sc) が満たされているものとする. 更に $h G_{\text{ech}}(t)$ が $0 < M_2 < 1$ なる h と t には独立な M_2 を Lipschitz 定数として X 上で Lipschitz 連続であるとする, (Cb) $\Rightarrow$ (C).

(4). Hyperbolic の半線型問題を考える. $G(t)$ は $[0, T] \times X$ から X へ連続であるとする. この時もしも (Sa) + (Se) または (Sb) + (Sc) (この時には $h G_{\text{ech}}(t)$ は (3) における称に Lipschitz 連続であるとする) が満たされるならば, (Cc) $\Rightarrow$ (C2).

証明. (1) は各 $x \in D$ に対して $\{U(t,s)x; s \leq t \leq T_0\}$ が compact であることから明らか.

(2). (Sa) と (Se) の下 $(I - h A_{\text{ech}}(t+h))^{-1} = [I - (I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1} h G_{\text{ech}}(t+h)]^{-1} x$ $(I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1}$ であって, $[\]^{-1}$ は $(1 - h K M)^{-1}$ を定数として Lipschitz 連続であることに注意して, 各 $x \in D$ に対して次の評価を得る:

$$\begin{aligned} & \| h^{-1} [C(t,h) - I] U(t,s)x - A(t)U(t,s)x \| \\ & \leq h^{-1} \| (I - h A_{\text{ech}}(t+h))^{-1} U(t,s)x - U(t+h,s)x \| + \| h^{-1} [U(t+h,s)x - U(t,s)x] - A(t)U(t,s)x \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \{(1-hKM)^{-1}+1\} \|R^{-1}[U(t+h,s)x - U(t,s)x] - A(t)U(t,s)x\| \\ &+ (1-hKM)^{-1}KM \|U(t+h,s)x - U(t,s)x\| \\ &+ (1-hKM)^{-1} \|(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}(F_{\text{ech}}(t+h)+G_{\text{ech}}(t+h))U(t,s)x - A(t)U(t,s)x\| \end{aligned}$$

上の右辺の各項は、与えられた条件の下で t に一様には 0 に収束する。

(3). $\|(I-hF_{\text{ech}}(t))^{-1}\| \leq 1+Kh$ であるから、 $h>0$ を十分小さくとれば $(I-hF_{\text{ech}}(t))^{-1}hG_{\text{ech}}(t)$ は $0 < M_3 < 1$ なる t にも h にも独立な定数 M_3 を以て Lipschitz 連続であるから、 $[I-(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}hG_{\text{ech}}(t+h)]^{-1}$ は $(1-M_3)^{-1}$ を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続である。従って (2) と同様に評価が出来る。

(4). (2), (3) と同様に、 $(I-hA_{\text{ech}}(t+h))^{-1} = [I-(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}hG_{\text{ech}}(t+h)]^{-1} \times (I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}$ であり、 $[\quad]^{-1}$ は十分小さな $h>0$ に対して $(1-M_3)^{-1}$ ($0 < M_3 < 1$) を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続である。また、定理 9 から各 $x \in X$ に対して

$$U(t+h,t)x = V(t+h,t)x + \int_t^{t+h} V(t+h,\sigma)G(\sigma)U(\sigma,t)x d\sigma$$

であるから次の評価を得る:

$$\begin{aligned} &\|h^{-1}[C(t,h)-U(t+h,t)]U(t,s)x\| \\ &\leq (1-M_3)^{-1} \|h^{-1}(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}U(t,s)x - [I-(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}hG_{\text{ech}}(t+h)]U(t+h,s)x\| \\ &\leq (1-M_3)^{-1} \|h^{-1}[(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1} - U(t+h,t)]U(t,s)x\| \\ &+ (1-M_3)^{-1}h^{-1} \int_t^{t+h} \|(I-hF_{\text{ech}}(t+h))^{-1}G_{\text{ech}}(t+h)U(t+h,s)x - V(t+h,\sigma)G(\sigma)U(\sigma,s)x\| d\sigma \end{aligned}$$

上の右辺の第 1 項は (C0) から $h \rightarrow 0$ のとき t に一様には 0 に収束

あるから 2 項を評価すれば良い:

$$\begin{aligned} & \| (I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1} G_{\text{ech}}(t+h) U(t+h, s) x - V(t+h, \tau) G(\tau) U(\tau, s) x \| \\ & \leq \| (I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1} G_{\text{ech}}(t+h) U(t+h, s) x - (I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1} G(t) U(t, s) x \| \\ & \quad + \| [(I - h F_{\text{ech}}(t+h))^{-1} - I] G(t) U(t, s) x \| + \| (I - V(t+h, t)) G(t) U(t, s) x \| \\ & \quad + \| [V(t+h, t) - V(t+h, \tau)] G(t) U(t, s) x \| + \| V(t+h, \tau) [G(t) U(t, s) x - G(\tau) U(\tau, s) x] \|. \end{aligned}$$

1 項の積分は (C) から t は一様 0 に収束する. 2 項の積分は仮定と (2) の証明と $\overline{\{G(t) U(t, s) x : s \leq t \leq T_0\}}$ が compact であることから t は一様 0 に収束する. 又 3, 4 項は $V(t, s)$ の性質と 3 の初めに述べた $\{F(t)\}$ に対する仮定から, 5 項は $G(t) U(t, s) x$ の一様連続性から各々 t に関して一様に収束する.

[終]

文 献

- [1] R. D. Richtmeyer, Difference methods for initial value problems, Interscience, Vol. 4. (1964).
- [2] H. F. Trotter, Approximation of semigroups of operators, Pac. J. Math. 8. (1958)
- [3] T. Kato, Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 17, A. M. S., Providence, R. I., (1965).
- [4] K. Yosida, Time-dependent evolution equations in a locally convex space, Math. Ann. 162., (1965).
- [5] J. T. Schwartz, Nonlinear Functional Analysis, New York Univ. Courant Inst. of Math. Sci., (1965).
- [6] I. E. Segal, Nonlinear semigroups, Ann. of Math, 78. (1963).
- [7] G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces, Duke Math. J., 29. (1962)
- [8] F. E. Browder, Nonlinear equations of evolution, Ann. of Math, Vol. 80, (1964).
- [9] Lumer & Phillips, Dissipative operators in a Banach space, Pac. J. of Math., 11. (1961).
- [10] Y. Komura, Nonlinear semigroups in Hilbert spaces, to appear.
- [11] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, to appear.
- [12] S. Ôharu, Note on the representation of semigroups of nonlinear operators, Proc. of Japan Acad. 42(10) (1966).

