

Wiener 過程に絶対連続な Gaussian process の表現

名古屋工大 櫃田 倍之

平均 0 の Gaussian process Y_t が Brown 運動 B_t に関して可測な表現ができるか? という問題が Martingale theory の応用として解決できる. その動く区間が $[0, T]$ に固定されているときの表現としては, Shepp 及び H. Sato によって既に与えられているが, $[0, T]$ の white noise に関する確率積分を使うために, 各 t 毎に $B_t = [\sigma(B_s; s \leq t) \text{ の completion}]$ 可測にできるかどうかは, 未解決であった.

正確には, 次のように定式化される:

「確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上に平均 0 で Brown 運動 (Wiener 過程)

と絶対連続な Gaussian process Y_t があつたときに,

Brown 運動 B_t を構成して,

$$Y_t = B_t + \int_0^t \left(\int_0^s k(s, u) dB_u \right) ds$$

と表現できる. 但し, $k(s, u) \in L^2([0, T]^2)$.」

ただし,

Def. $(Y_t, \mathcal{B}, P)$ が Brown 運動に 絶対連続 $\iff$

$\exists \psi(\omega)$ such that $E(\psi) = 1$, $\psi \geq 0$ and $(Y_t, \mathcal{B}, \psi(\omega)P(d\omega))$

が Brown 運動になる.

証明の概略をのべると, $Y_t = [\sigma(Y_s; s \leq t) \text{ の } P \text{ に関する completion}]$

とし, $E(\psi(\omega) | Y_T) = \tilde{\psi}(\omega)$ とおけば,

$$(Y_t, Y_T, \tilde{\psi}(\omega)P(d\omega))$$

もやはり Brown 運動である。以後 $\bar{\Psi}(\omega) P(d\omega) = \bar{P}(d\omega)$ とかくことにする。 $(Y_t, P), (Y_t, \bar{P})$ がいずれも Gaussian process であるから、 $\bar{\Psi}(\omega) > 0$ (a.e. P)。これは 2つの Gaussian process は、互に絶対連続 (別名 equivalent) の singular かのどちらかである と主張する Hajék-Feldman の定理による。

$$M_t \equiv \tilde{E}(\bar{\Psi}(\omega)^{-1} | Y_t)$$

とすれば、 $(M_t, Y_t, \bar{P})$ は martingale をなす。一方 $(Y_t, \bar{P})$ という Brown 運動に関する martingale は dY_t による確率積分で決定される (Kunita-S. Watanabe) ことと、Itô の変換公式を使えば、

$$M_t = \exp \left\{ - \int_0^t f(s, \omega) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s, \omega) ds \right\}$$

とかける。但し $f(s, \omega)$ は各 s に対し Y_s 可測で、 $\int_0^T f^2(s, \omega) ds < \infty$ となるものである。 $\tilde{E}(M_t) = 1, 0 \leq t \leq T$ であることから、

Girsanov の定理により、

$$B_t = Y_t + \int_0^t f(s, \omega) ds$$

とかけば、 (B_t, Y_t, P) は Brown 運動になる。さきの Hajék-Feldman の定理の証明の経過から、

$$E\left(\int_0^T f^2(s, \omega) ds\right) < \infty$$

が導かれるが、これによって B_t, Y_t は 'jointly' に Gaussian system をなすことがわかる (この議論の詳細はあんどうであるが、基本的には、Meyer の regular potential の分解と同じやり方

である). 従って, B_t は Y_t の linear functional となることから,
 かり, f の形が決定されて, $l \in L^2([0, T]^2)$ とし,

$$B_t = Y_t + \int_0^t \left(\int_0^s l(s, u) d\tilde{r}_u \right) ds$$

とかける. (右辺 $\int l(s, u) d\tilde{r}_u$ の意味は, $\tilde{P}$ における Wiener 積分と
 考えればよい). $l(s, u)$ の解核を $k(s, u)$ とすれば, 求める表現

がえられる. なお解核の存在は, $l(s, u) = 0$, $s < u$ と考えて l を
 k
 Volterra 型の核と見ればよい.