

Stableベクトル束のlimitについて

東京理科大 理工 細尾敏男 (Toshio Hosoh)

F_1, F_2 を射影多様体 X 上の階数 1 の torsion free $\mathcal{O}_X$ -moduleとする。 F_1 の F_2 による自明でない拡大で、stableになるものもならないものもある場合に、その stableでないものを別のものに置き換えて、stableの族を作れないかという問題を考える。

命題 X を体 k 上の射影多様体、 H を X 上の ample 因子。 F_1, F_2 を階数 1 の torsion free $\mathcal{O}_X$ -moduleで $\deg_H F_1 < \deg_H F_2$ となるものとする。自明でない拡大

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow E \rightarrow F_2 \rightarrow 0$$

で、 E が H -stableでないとする、次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & G_1 & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & E & \rightarrow & F_2 \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & G_2 & = & G_2 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

$$0 \quad 0$$

ここで G_1, G_2 は階数 1 の torsion free $\mathcal{O}_X$ -module で $\deg_H G_1 \leq \deg_H G_2$ となるもの、 T は non-zero torsion $\mathcal{O}_X$ -module. 』

X を体 k 上の scheme、 $F_i, G_i (i = 1, 2)$ 、 T を $\mathcal{O}_X$ -module で

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f} G_1 \xrightarrow{g} T \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow G_2 \xrightarrow{h} F_2 \xrightarrow{i} T \rightarrow 0$$

が exact となるものとする。次の可換図式

$$\operatorname{Ext}^1(F_2, F_1) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(F_2, G_1)$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{Ext}^1(G_2, F_1) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(G_2, G_1)$$

により、 $c : \operatorname{Ext}^1(F_2, F_1) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(G_2, G_1)$

を定義する。 $\operatorname{Ext}^1(F_2, F_1)$ の元 ξ に対応する拡大を

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} F_2 \rightarrow 0 \quad \text{とする。}$$

このとき $X \times \mathbb{P}^1$ 上の complex

$$0 \rightarrow F_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -j \end{pmatrix}} (G_1 \oplus E) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \cdot g \\ x \cdot i k \end{pmatrix}} T \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \rightarrow 0$$

の cohomology sheaf を $\mathcal{E}$ とおく。ここで $\langle x, y \rangle$ は

$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ の 1 つの基底である。

定理 (1) $\mathcal{E}$ は P^1 上 flat, (2) $\mathcal{E}_0 \cong E$, (3) $\mathcal{E}_\bullet \cong E_0 \otimes \mathcal{O}(-1)$, (4) 次の図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & G_2 & = & G_2 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow & \mathcal{E}(-1) \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E}_\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \parallel & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow & \mathcal{E}(-1) \rightarrow & \mathcal{E}' & \rightarrow & G_1 & \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

により $\mathcal{E}'$ を定義すると、次の短完全列

$$0 \rightarrow F_1 \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow F_2 \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow 0$$

がある。

(5) $\mathcal{E}'_\bullet$ は次の図式により unique に決定される。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow & F_1 & \rightarrow & G_1 & \rightarrow & T & \rightarrow 0 \\
 & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 \rightarrow & F_1 & \rightarrow & \mathcal{E}'_\bullet & \rightarrow & F_2 & \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & G_2 & = & G_2 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & 0 & 0 \end{array}$$

つまり $\theta : \text{Hom}(F_2, T) \rightarrow \text{Ext}^1(F_2, F_1)$ により $\varepsilon' \simeq \varepsilon_{(1)}$ である。」

このことから ε は P^1 上の extension の族 ε' に elementary transformation をほどこして得られたものであることがわかる。この応用として、3次元 rational scroll 上の階数 2 の stable ベクトル束の limit を調べてみることにする。

上の定理と以下の内容については、そのうち証明を付けてどこかに発表します。

§ 3 次元 rational scroll 上の stable ベクトル束の limit

$V = \mathcal{O}_P(a) \oplus \mathcal{O}_P(b) \oplus \mathcal{O}_P$ ($a \leq b \leq 0$) を P^1 上の階数 3 のベクトル束、 $X = P(V)$ を V に associate した 3 次元 rational scroll、 $\pi : X \rightarrow P^1$ を標準的射影とする。 D を X 上の因子で $\pi_* \mathcal{O}_X(D) \simeq V$ となるもの、 F を π の fibre とし、 $q > -a$ に対して $H = D + qF$ と置くとこれは very ample になる。 $p = (D \cdot H^2) = 2q + a + b$ 、 $L = \mathcal{O}_X(-D + (p+1)F)$ と置く。 M_0 を X 上の階数 2 の H -stable sheaf で $C_1 = C_1(L)$, $C_2 = D \cdot F$, $C_3 = 0$ となるものの同型類の集合、 M を M_0 のベクトル束からなる部分集合とする。丸山 [1] により M_0 の moduli が存在し射影的であり、 M は M_0 の開集合である。

M の構造は我々の結果 [2] によりよくわかっている。(以下の Theorem 2. を参照) ここでは M_0 において M を含む連結成分およびその既約成分について上の定理を使ってわかる事を報告する。

Lemma 1. (1) $E \in M$ ならば、次の自明でない拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-F) \rightarrow E \rightarrow L(F) \rightarrow 0$$

がある。

(2) 自明でない拡大 $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-F) \rightarrow E \rightarrow L(F) \rightarrow 0$ において $E \notin M$ ならば、 π の fibre $F \cong P^2$ の line Y が存在して、次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_X(-F) & \rightarrow & \mathcal{S}_Y & \rightarrow & \mathcal{O}_F(-1) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_X(-F) & \rightarrow & E & \rightarrow & L(F) \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & L & = & L \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

がある。

(3) $\dim E \otimes t^{-1}(L(F), \mathcal{O}_X(-F)) = N + 1$ 、

$\dim E \otimes t^{-1}(L, \mathcal{S}_Y) = N - 3$ 、但し $N = 3p - a - b + 5$ 。

$$c: E \otimes t^*(L(F), \mathcal{O}_X(-F)) \rightarrow E \otimes t^*(L, \mathcal{S}_Y)$$

は全射。』

$\pi: X = P(V^v) \rightarrow P^1$ を X の双対 3 次元 rational scroll,
 D を X 上の因子で $\pi_* \mathcal{O}_X(D) \cong V^v$ となるもの、 F を π の
 fibre とし、 $H = D + (p+1)F$ 、 $P = P(H^1(L^v(-2F))^v)$ と置
 くと、自然な埋め込み $|H|: X \rightarrow P$ が存在して、Lemma 1.
 (1), (2) より次が導かれる。

Theorem 2. ([2] Theorem(3.19)) M の moduli は $P \setminus X$
 に同型である。』

$\mathcal{Y} = \{(Y, x) \in X \times X \mid x \in Y\}$ と置き、 $\mathcal{S}_Y$ を $\mathcal{Y}$ の
 $X \times X$ におけるイデアルの層とする。 $X \times X$ 上の直線束
 $\alpha^* \mathcal{O}_X(-H-2F) \otimes q^* L$ を $\mathcal{L}$ と書く。ここで α, q は $X \times X$
 の X 及び X への射影である。

Lemma 3. X の P における法束は $R^1 \alpha_* (\mathcal{S}_Y \otimes \mathcal{L}^v)$ に同
 型であり、かつ simple である。』

$\tilde{P} \rightarrow P$ を P の X に沿った blow up とし、 $\tilde{X}$ をその例外集
 合とする。Lemma 3. より、 $\tilde{X}$ 上に $\mathcal{S}_Y$ の L による自明でな
 い拡大の万有族が存在して、定理を適用することで、 $\tilde{P} \setminus \tilde{X}$
 $\cong P \setminus X$ 上の H -stable ベクトル束の万有族と $\tilde{P}$ 上で patch
 する。

Lemma 4. Y を π の fibre $\cong P^2$ の line とする。

(1) 自明でない拡大 $0 \rightarrow \mathcal{S}_Y \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ において $E \notin M_0$ ならば、 Y の閉点 x が存在して、次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{S}_Y & \rightarrow & m_x & \rightarrow & \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{S}_Y & \rightarrow & E & \rightarrow & L \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & L \otimes \mathcal{S}_Y & = & L \otimes \mathcal{S}_Y & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

がある。

(2) $\dim E \times t^{-1}(L \otimes \mathcal{S}_Y, m_x) = N - 1$ 、

$c: E \times t^{-1}(L, \mathcal{S}_Y) \rightarrow E \times t^{-1}(L \otimes \mathcal{S}_Y, m_x)$

において $\dim(\text{Im } c) = N - 5$ 。』

Lemma 3. 及び Lemma 4. より、 Y は自然に X に埋め込まれて、上で作られた族を $P \setminus Y$ に制限したものは H -stable sheaf の族になり、 $P \setminus Y$ から M_0 の moduli への morphism が定まる。

Theorem 5. 上の morphism は open immersion である。』

Lemma 6. Y を π の fibre $\cong P^2$ の line、 x を X の閉点とす

る。

(1) 自明でない拡大 $0 \rightarrow m_x \rightarrow E \rightarrow L \otimes \mathcal{A}_Y \rightarrow 0$

において $E \notin M_0$ ならば、次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & m_x & \rightarrow & \mathcal{O}_x & \rightarrow & k(x) \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \rightarrow & m_x & \rightarrow & E & \rightarrow & L \otimes \mathcal{A}_Y \rightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & L \otimes \mathcal{A}_{Y'} & = & L \otimes \mathcal{A}_Y \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

がある。ここで $\mathcal{A}_{Y'}$ は、 E によって決まる短完全列

$0 \rightarrow \mathcal{A}_{Y'} \rightarrow \mathcal{A}_Y \rightarrow k(x) \rightarrow 0$ で与えられるイデアルの層である。

(2) $\dim E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{A}_Y, m_x) = N - 1$,

$\dim E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{A}_{Y'}, \mathcal{O}_x) = N - 2$ 。

$c: E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{A}_Y, m_x) \rightarrow E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{A}_{Y'}, \mathcal{O}_x)$

において、 $x \in Y$ ならば c は全射であり、 $x \notin Y$ ならば

$\dim(\text{Im } c) = N - 3$ 。

(3) 自明でない拡大 $0 \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow E \rightarrow L \otimes \mathcal{A}_{Y'} \rightarrow 0$

があれば、 $E \in M_0$ 。』

$\overline{XXX}$ を XXX の Y に沿った blow up とすると、 $\overline{XXX}$ の閉点の集合は

$\{ \mathcal{S}_Y' \mid 0 \rightarrow \mathcal{S}_Y' \rightarrow \mathcal{S}_Y \rightarrow k(x) \rightarrow 0, (x, Y) \in XXX \}$ であるとみなされる。

$$Z = \bigcup_{(x, Y) \in XXX} P(E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{S}_Y', m_x)^{\vee}),$$

$$W = \bigcup_{\mathcal{S}_Y' \in XXX} P(E \otimes t^{-1}(L \otimes \mathcal{S}_Y', \mathcal{O}_x)^{\vee}) \text{ と置くと}$$

Z は $\overline{XXX}$ を含み、 $Z \setminus \overline{XXX}$ 及び W 上に H -stable sheaf の族が構成される。(Lemma 6.)

定理により $(P \setminus Y) \cup (Z \setminus \overline{XXX}) \cup W$ の M_0 の moduli への像は連結である。よって次を得る。

Theorem 7. M_0 の moduli において、stable ベクトル束を含む連結成分は、少なくとも 2 つの既約成分を持ち、stable ベクトル束を含む既約成分の次元は N であり、他に次元が $N+4$ 以上の既約成分を持つ。

References

- [1] M.Maruyama,Moduli of stable sheaves,II,J.Math.Kyoto Univ..18
(1978),557-614.
- [2] T.Hosoh and S.Ishimura,Stable vector bundles of rank 2 on a
3-dimensional rational scroll,J.Math.Soc.Japan.Vol.37,No.4,(1985)
557-568