

離散時の martingale-like sequences

信州大・工 山崎基弘 (Motohiro Yamasaki)

§ 1. 序

martingale を一般化した, 所謂 martingale-like sequences は asymptotic martingale (amart) とはじめとして数多く知られている。ここではその主なものを、特に収束定理関係を中心に紹介する。

§ 2. Weak martingales

以下では、 $\{X_n\}$ の可積分性を仮定する。weak martingales は Nelson [16] が導入した:

Def. $\{X_n\}$ が weak martingale とは

$$E[X_n | X_m] = X_m \quad \text{a.s.} \quad (1 \leq m \leq n).$$

weak martingale であって martingale でない比較的簡単な例は、Bermann [2] に紹介されている。weak mart. は直交性をもつが、optional stopping theorem は成立しない [16]. 収束定理は次の形で与えられる:

Th. (Nelson [16], Dor [6])

L^1 -bded weak martingale は conv. in prob.

[16] の証明は Burkholder によるもので、直接的な証明であるが、Dor は次の不等式を用いて証明している：

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{|X_{n-1}| \leq \lambda} |X_n - X_{n-1}| dP \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (8\lambda \|X\|_1)^{\frac{1}{2}} \quad (\lambda > 0).$$

この不等式は、 $E[X_{n+1}|X_n] = X_n$ (all n) のもとで成立する。この仮定のもとでの興味深い不等式を Chen [11] が与えている。上の収束定理が a.s. で成立するかどうかは

(L^2 -bded のもとでさえ) 未解決である ([16], [6])。なお、

totally finite signed measure σP 上での L^2 -bded weak mart. については a.s. 収束は言えない。又、

$E[X_{n+1}|X_n] = X_n$ (all n) のもとでは L^p -bded ($1 \leq p < \infty$) でも div. a.s. なる例が知られている (starr [19])。

§3. Games which become fairer with time & Martingales in L^1

以下では、 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 1\}$ が adapted であることを仮定する。

Def. (Blake [3]) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が game which become fairer with time (GFT) とは、

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \geq m \rightarrow \infty} P(|E[X_n | \mathcal{F}_m] - X_m| > \varepsilon) = 0$$

Def. (Peligrad [17]) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が martingale in L' とは

$$E[X_n | \mathcal{F}_m] - X_m \rightarrow 0 \text{ in } L' \quad (n \geq m \rightarrow \infty)$$

この2つについては次の収束定理が知られているが、他に
見るべき結果は得られていない:

Th. (Subramanian [20], Mucci [14])

unif. integrable な GFT は conv. in L' .

Th. (Peligrad [17])

L' -bded な mart. in L' の process が martingale in the limit なら, conv. a.s. かつ conv. in L' .

mart. in the limit については次節で述べる。定義から、 L' -bded な GFT や mart. in L' が必ずしも a.s. conv. しないことは殆んど明らかである。

§4. Martingales in the limit

Mucci [14] により導入された:

Def. $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が martingale in the limit (MIL) とは

$$\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} (E[X_n | \mathcal{F}_m] - X_m) = 0 \quad \text{a.s.}$$

これは当然 GFT になっており、更に unif. integrable であれば mart. in L' でもある。MIL については mart. と同様な収束定理が得られている:

Th. $\{X_n\}$: MIL なら

(i) L^1 -bded $\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X \in L^1$ (Mucci [23])

(ii) $\sum_{n \geq 0} |X_n| < \infty$ for all stop times $\tau \Rightarrow X_n$ conv. a.s.
(Yamasaki [21])

しかし、martingale の他の有用な性質 (maximal inequality, Riesz-decomposition, optional stopping theorem, optional sampling theorem) は持たないし、 $\{|X_n|, \mathcal{F}_n\}$ が MIL であることも (L^1 -bded のもとでも) 保証されない。

§5. Asymptotic martingales (amarts)

amart の概念は Meyer [13] に始まるが、組織的な研究は、Edgar & Sucheston [8] 以降になる。

Def. $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が asymptotic martingale (amart) とは、

$(E X_\tau)_{\tau \in T} : \text{conv.}$ ($T \equiv \{\text{bded. stop. times}\}$)

mart. はもちろん amart であるが、non-stochastic conv. seq., $(E X_n)_n$ が bded な sub-(super-) mart. 等も amart である。更に、MIL も amart となる (Edgar & Sucheston [10], Blake [4]) ので当然、

Th. (Austin, Edgar & Ionescu Tulcea [15])

L^1 -bded amart は conv. a.s.

である。この証明は、次の Lem を用いたエレガントなもの

である。

Lem. $Y: \mathcal{F}_\infty$ -可測, $\{X_n\}$ の cluster value
 $\Rightarrow \exists (\tau_n) \subset T, \tau_n \geq n; Y_{\tau_n} \rightarrow Y \text{ a.s.}$

又、次の収束定理も興味深い。

Th. (Dvoretzky [7])

$\lim X_n \text{ exists } (\pm\infty) \Leftrightarrow \forall \lambda, \{-\lambda \vee X_n \wedge \lambda\}: \text{amart.}$

MIL と異なり、amart では、Riesz-分解, optional stopping theorem, optional sampling theorem が成立している。しかも、optional sampling theorem と Riesz-分解の可能なクラスを amart より大きくできないことも知られている (Edgar & Sucheston [10])。

amart は定義に条件付期待値が必要でなく, martingale の諸性質のうち、Stopping time に依存する証明はよりスマートに導くことができる。勿論直交性がないので、 L^p -不等式等は望む可くもない。ある process が amart であることを確かめるのはそれ程容易ではなく、得られている必要十分条件は:

Th. (i) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}: \text{amart}$

$\Leftrightarrow$ (ii) (Edgar & Sucheston [9])

$E[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_n] - X_n \xrightarrow{L_1} 0 \quad (\forall (\tau_n) \subset T, \tau_n \geq n)$

$\Leftrightarrow$ (iii) (Ghoussoub & Sucheston [11])

$X_n = M_n + Z_n; (M_n): \text{mart.}, \{|Z_n|\}: \text{dominated}$
by Doob's potential.

amart の組織的な研究は初期のものは Edgar & Sucheston [8], 最近のものは Schmidt [18], Gut [19] に詳しい。最近 Banach sp. 上の amart についての研究が盛んである。

参考文献

- [1] D. G. Austin, G. A. Edgar & A. Ionescu Tulcea, Pointwise convergence in terms of expectations, Z.W., 30(1974), 17-26.
- [2] J. Bermann, An example of a weak martingale, Ann. Prob., 4(1976), 107-108.
- [3] L.H. Blake, A generalization of martingales and two consequent convergence theorems, Pacific J. Math., 35(1970), 279-283.
- [4] ———, Every amart is a martingale in the limit, J. London Math. Soc., 18(1978), 381-384.
- [5] L. H. Y. Chen, A martingale inequality of the square and maximal functions, Ann. Probab., 7(1979), 1051-1055.
- [6] L. E. Dor, Some inequalities for martingales and applications to the study of L , Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 89(1981), 135-148.
- [7] A. Dvoretzky, On stopping time directed convergence, Bull. A.M.S., 82(1976), 347-349.
- [8] G. A. Edgar & L. Sucheston, Amarts: a class of asymptotic martingales A. discrete parameter, B. continuous parameter J. Multivariate Anal., 6(1976), 193-221, 572-591.
- [9] ———, The Riesz decomposition for vector-valued amarts Z. W., 36(1976), 85-92.

- [10] ———, Martingales in the limit and amarts, *Proc. A.M.S.*, 67(1977), 315-320.
- [11] N. Ghoussoub & L. Sucheston, A refinement of the Riesz decomposition for amarts and semiamarts, *J. Multiv. Anal.*, 8(1978), 146-150
- [12] A. Gut, An introduction to the study of asymptotic martingales, *Lec. Note in Math.* 1042, Springer 1983.
- [13] P. A. Meyer, Le retournement du temps, d'après Chung et Walsh, L. N. in *Math.* 191, Springer 1971.
- [14] A.G. Mucci, Limits for martingale-like sequences, *Pacific J. Math.*, 48(1973), 197-202.
- [15] ———, Another martingale convergence theorem, *Pacific J. Math.*, 64(1976), 539-541.
- [16] P. I. Nelson, A class of orthogonal series related to martingales, *Ann. Math. Statist.*, 41(1970), 1684-1694.
- [17] M. Peligrad, A limit theorem for martingale-like sequences, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 11(1976), 733-736.
- [18] K.D. Schmidt, Amarts - a measure theoretic approach, L.N. in *Math.* 1042, Springer 1983.
- [19] N. Starr, On an operator limit theorem of Rota, *Ann. Math. Statist.*, 36(1965), 1864-1866.
- [20] R. Subramanian, On a generalization of martingales due to Blake, *Pacific J. Math.*, 48(1973), 275-278.
- [21] M. Yamasaki, Another convergence theorem of martingales in the limit, *Tohoku Math. J.*, 33(1981), 555-559.