

Hamilton系のエルゴード問題

津田塾大学 丹羽敏雄

近可積分ハミルトン系

$$H_\varepsilon(I, \phi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi) \quad (I, \phi) \in \mathbb{R}^d \times T^d \quad (1)$$

の不安定領域, すなわち, KAMトーラスで満たされたKAM領域の補集合に於ける解の振舞いについて, 数学的に知られている主な結果の2, 3を紹介する.

具体的には

(I) Nekhoroshev の定理

(II) Arnold 拡散

及び, それらに関連することを述べる.

(I) Nekhoroshev の定理

(a) von Zeipel の摂動論

母関数 $I'\phi + S(I', \phi)$ を持つ正準変換 $C_\varepsilon(I, \phi) = (I', \phi')$:

$$I = I' + \frac{\partial S}{\partial \phi}(I', \phi) \quad \phi' = \phi + \frac{\partial S}{\partial I}(I', \phi)$$

によって, ハミルトニアン(1)を, ある与えられた形を持つハミルトニアンに変換する:

$$H_\varepsilon(C^{-1}(I', \phi')) = h_\varepsilon(I', \phi) \quad (2)$$

ここで

$$h_\varepsilon = h(I') + \varepsilon h_1(I', \phi) + \varepsilon^2 h_2(I', \phi) + \dots$$

$$h_n(I', \phi) = \sum_{\nu \in \pi} h_{n, \nu}(I') e^{i\nu \cdot \phi}, \quad h(I') = H_0(I')$$

である. π は $\mathbb{Z}^d$ のある与えられた集合.

母関数 $S_1(I', \phi)$ は

$$S = \varepsilon S_1(I', \phi) + \varepsilon^2 S_2(I', \phi) + \dots$$

で与えられているものとする.

方程式(2)を変数 (I, ϕ) に関して解くと, ε^n の項を比較すると

$$\omega(I') \cdot \frac{\partial S_n}{\partial \phi}(I', \phi) + N_n(I', \phi)$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} \hat{N}_{n-p}(I', \phi) + h_n(I', \phi) \quad (3)$$

を得る. ここで

$$\omega(I') = \frac{\partial H_0}{\partial I}(I'),$$

$N_n(I', \phi)$ は $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ (と H)から定まる関数,

$\hat{N}_{n-p}(I', \phi)$ は $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ と h_{n-p} (と H)から定まる関数である.

とくに, $N_1 = H_1(I', \phi), \hat{N}_1 = 0$

方程式 (3) は次の方程式と同値である：

$$\begin{cases} h_n(I', \phi) = P\pi M_n \\ \omega(I') \cdot \frac{\partial S_n}{\partial \phi} + (id. - P\pi) M_n = 0 \end{cases} \quad (3)'$$

$$\text{ただし } M_n = N_n - \sum_{p=1}^{n-1} \hat{N}_{n-p},$$

$P\pi$ は Fourier mode with π への射影である。

(b) 共鳴帯の構造

以下、あまり本質的でない技術的困難を小さくするために、

$$d=3, H_0(I) = 1/2 |I|^2, D = \{I \in \mathbb{R}^d; 1/2 R \leq |I| \leq R\}$$

とする。したがって、 $\omega(I) = I$ 。

$$\text{定義 } \Sigma(\nu) := \{I \in \mathbb{R}^d; I \cdot \nu = 0\} \quad \nu \in \mathbb{Z}^d$$

を order ν の resonance plane

$$\Sigma_\varepsilon(\nu) := \left\{ I \in \mathbb{R}^d; \frac{|I \cdot \nu|}{\|\nu\|} \leq \frac{\varepsilon^\sigma}{|\nu|^{d+1}} \right\} \quad \nu \in \mathbb{Z}^d, \sigma > 0$$

を (大きさが $\varepsilon^\sigma / |\nu|^{d+1}$) の resonance layer

$$\Sigma(\nu, \nu') := \Sigma(\nu) \cap \Sigma(\nu')$$

を double resonance line

$$\Sigma_\varepsilon(\nu, \nu') := \Sigma_\varepsilon(\nu) \cap \Sigma_\varepsilon(\nu')$$

を (大きさが $\varepsilon^\sigma / |\nu|^{d+1}$) の double resonance layer という。

このとき、次の事柄が成立する：

$$\nu \neq \text{const } \nu', \quad |\nu|, |\nu'| \leq N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\tau} \quad (\tau > 0)$$

とすると、ベクトル ν, ν' のなす角 θ は

$$\theta \gtrsim N(\varepsilon)^{-2} = \varepsilon^{2\tau}$$

このことから、double resonance layer $\Sigma_\varepsilon(\nu, \nu')$ の直径は $\lesssim \varepsilon^{\sigma-2\tau}$ であることが分かる。同様に、任意の2つの double resonance line の距離は $\gtrsim \varepsilon^{2\tau}$ であることも分かる。

(c) Nekhoroshev の定理

$H_0(I)$ は解析的で、 D において steep, すなわち

$$(S-1) \quad D \text{ において, } \omega(I) \neq 0$$

$$(S-2) \quad D \text{ の任意の部分線形空間 } M \text{ に対して, } H_0(I)|_M \text{ は高々複素孤立特異点を持つ.}$$

を満たすとする。このとき、(1) をハミルトニアンに持つハミルトン方程式の解

$I(t)$ は ε が十分小さいとき

$$|t| \leq \varepsilon^{-1} \exp(\varepsilon^{-\tau}) \text{ に対して, } |I(t) - I(0)| \leq \varepsilon^b \text{ を満たす.}$$

証明の概略

(i) まず, ハミルトニアン (1) を

$$\tilde{H}_\varepsilon(I, \phi) = H_0(I) + \varepsilon \tilde{H}_1(I, \phi)$$

$$\text{ただし } \tilde{H}_1(I, \phi) = \sum_{|\nu| \leq N(\varepsilon)} H_{\nu} (I) e^{i\nu \cdot \phi} \quad [H_1 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} H_{\nu} (I) e^{i\nu \cdot \phi}]$$

に置き換えても

$$|H_1 - \tilde{H}_1| \leq \text{const} \cdot e^{-\text{const} \cdot N(\varepsilon)}$$

であるので, この置き換えによって, 解は, $|t| \sim e^{\text{const} \cdot N(\varepsilon)}$ の間, ε 程度のみ相異なるだけである。したがって, 以下ハミルトニアンとしては $\tilde{H}_\varepsilon(I, \phi)$ を考察する。

(ii) $I \in \Sigma \varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ ($|\nu_1|, |\nu_2| \leq N(\varepsilon)$) のとき,

$$\pi = \pi[\nu_1, \nu_2] := \{z_1 \nu_1 + z_2 \nu_2; z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

として, von Zeipel の摂動法を適用する。 $I \in \Sigma \varepsilon(\nu_1, \nu_2)$ であるので, それは可能である。それによって

$$h_n(I', \phi), S_n(I', \phi) \quad 1 \leq n \leq N(\varepsilon)$$

を定める。このとき

$$|C\varepsilon - i d. | \sim \varepsilon^\xi \quad (\xi > 0)$$

であって, 新しいハミルトニアンは

$$h_\varepsilon(I', \phi) = h(I') + \sum_{\nu \in \pi, |\nu| \leq N(\varepsilon)} h_{\nu\nu}(I') e^{i\nu \cdot \phi} + O(\exp(-\varepsilon^{-\xi})) \quad (\xi > 0)$$

の形になる。最後の項を無視すると

$$\frac{d}{dt} I' = - \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \phi'} = - \sum_{\nu \in \pi, |\nu| \leq N(\varepsilon)} (i h_{\nu\nu}(I') e^{i\nu \cdot \phi}) \nu \quad \nu \in \pi(\nu_1, \nu_2)$$

$$\text{ここで, } \pi(\nu_1, \nu_2) := \{r_1 \nu_1 + r_2 \nu_2; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

よって, I' の動く方向は, ほぼ π -方向である。一方, $\Sigma \varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ の π 方向の大きさ, すなわち, $\Sigma \varepsilon(\nu_1, \nu_2) \cap D$ の直径は $\leq \varepsilon^{\sigma-2\tau}$ であったから, I' の変動の大きさは $\varepsilon^{\sigma-2\tau}$ の程度である。 I は $\Sigma \varepsilon(\nu_1, \nu_2)$ を出れば, resonance layer $\Sigma \varepsilon(\nu_1)$, $\Sigma \varepsilon(\nu_2)$ のいずれかに入り込むか, "non rezonance zone", すなわち, order が $N(\varepsilon)$ 以下のどの resonance layer や double resonance layer にも属さない領域に入り込む。

(iii) $I \in \Sigma \varepsilon(\nu)$ ($|\nu| \leq N(\varepsilon)$) のとき,

$$(ii) \text{ とまったく同様に, } \pi = \pi[\nu] := \{z\nu; z \in \mathbb{Z}\}$$

として von Zeipel の摂動法を適用する。 $I' \in \Sigma \varepsilon(\nu)$ であるので, それは可能である。(ii)と同様に, I' の動く方向は, ほぼ π -方向である。したがって, やはり I' は $\Sigma \varepsilon(\nu)$ を横切る方向に動く。 $\Sigma \varepsilon(\nu)$ の幅は $\sim \varepsilon^\sigma$ であったから, I' の変動はやはり ε^σ の程度である。 I は, $\Sigma \varepsilon(\nu)$ を出ると, non rezonance zone に入り込む。

(iv) I が non resonance zone にいる場合, $\pi = \{\phi\}$ として, von Zeipel の摂動法を適用すると,

$$\dot{I} \sim O(\exp(-\varepsilon^{-\epsilon}))$$

を得る。

(d) 反例

$$H\varepsilon(I, \phi) = 1/2 (I_1^2 - I_2^2) + \varepsilon \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (4)$$

とする。このとき,

$$I_1(t) = I_2(t) = -\varepsilon t, \quad \phi_1(t) = \phi_2(t) = -1/2 \varepsilon t^2$$

は解である。

(II) Arnold 拡散

Nekhoroshev の定理により, 不安定領域における作用変数 I の拡散の速度は極めて小さいことが分かった。定理の仮定のもとで, 実際に拡散が生じることは Arnold によって示された。次の例がそれである:

$$H(I, \phi) = 1/2 (I_1^2 + I_2^2) + \varepsilon H_1 \quad (5)$$

$$H_1 = (\cos \phi_1 - 1)(1 + \mu B), \quad B = \sin \phi_2 + \cos t$$

$$\text{相空間は } X = \mathbb{R}^2 \times T^2 \ni (I_1, I_2, \phi_1, \phi_2, t)$$

である。

定理 (Arnold)

$0 < A_1 < A_2$ とする。 $\forall \varepsilon > 0$ に対して, μ を十分小さくとると, (5) の解 $I(t)$ で

$$I(0) < A_1, \quad I(T) > A_2 \quad (\exists T > 0)$$

を満たすものが存在する。

証明の概略を述べよう。

(a) まず $\mu = 0$ としよう:

$$H^{(1)} = 1/2 I_1^2 + \varepsilon (\cos \phi_1 - 1), \quad H^{(2)} = 1/2 I_2^2$$

と置こう。 $\mu = 0$ の場合, 系は $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ をそれぞれハミルトニアンに持つ系の直積になっているので, ただちに積分可能である。トーラス

$$T_0 := \{I_1 = 0, \phi_1 = 0, I_2 = \omega\}$$

は系の不変トーラスである。このトーラスは, 次の安定多様体 Y_0^- と, 不安定多様体 Y_0^+ を持っている (Arnold はこれらを whisker と呼んでいる):

$$\begin{aligned} Y_0^\pm &:= \{H^{(1)} = 0, H^{(2)} = 1/2 \omega^2\} \\ &= \{I_2 = \omega, I_1 = \pm 2\sqrt{\varepsilon} \sin(\phi_1/2)\} \end{aligned}$$

これらは, 3次元の不変多様体である。

$Y_0^\pm$ は次の (t^0, ϕ_2^0) をパラメータとする, 解曲線の 2-パラメータ族からなっ

ている：

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \pm 2\sqrt{\varepsilon} / \cosh \tau, \quad I_2(t) = \omega \\ \phi_1(t) &= \pm 2 \operatorname{arccot}(-\sinh \tau), \quad \phi_2(t) = \phi_2^0 + \omega(t - t^0) \quad (6) \\ \text{ただし } \tau &= \sqrt{\varepsilon}(t - t^0) \end{aligned}$$

(b) 次に、 $\mu \neq 0$ としよう：

$\mu \neq 0$ の場合も、トーラス T_0 は不変なままに保たれている。 T_0 の安定多様体 Y_{ω}^- 、不安定多様体 Y_{ω}^+ はもちろん、摂動される。その方程式を、“座標” $H^{(1)}$ 、 $H^{(2)}$ を用いて、

$$H^{(1)} = \Delta_1^{\pm}(\phi_1; \phi_2, t; \omega)$$

$$Y_{\omega}^{\pm} : H^{(2)} = 1/2 \omega^2 + \Delta_2^{\pm}(\phi_1; \phi_2, t; \omega)$$

$$\Delta_k^{\pm}(0; \phi_2, t; \omega) = 0, \quad \Delta^{\pm} = O(\mu)$$

と表そう。ただし、 Y_{ω}^+ の場合は $|\phi_1| < 3/2 \pi$ 、 Y_{ω}^- の場合は $|\phi_1 - 2\pi| < 3/2 \pi$ で考える。

Y_{ω}^+ と Y_{ω}^- の交点を、 $\phi_1 = \pi$ 上でさがそう。その交点は次の方程式の解である：

$$\begin{aligned} \Delta_1^+(\pi; \phi_2, t; \omega) &= \Delta_1^-(\pi; \phi_2, t; \bar{\omega}) \\ 1/2 \omega^2 + \Delta_2^+(\pi; \phi_2, t; \omega) &= 1/2 \bar{\omega}^2 + \Delta_2^-(\pi; \phi_2, t; \bar{\omega}) \quad (7) \end{aligned}$$

さて、

$$\Delta_k^{\pm}(\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)} dt$$

である。ただし、積分は解曲線に沿って行う。なぜなら、 $t \rightarrow \mp\infty$ のとき、解は、トーラス T_0 にそれぞれ収束し、 T_0 上では、 $H^{(1)} = 0$ 、 $H^{(2)} = 1/2 \omega^2$ であるからである。

$$\int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)} dt = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)} dt + O(\mu^2)$$

である。ただし、右辺の積分は、 $\mu = 0$ のときの解、すなわち、曲線 (6) に沿って積分する。

$$\mu \delta_k^{\pm}(\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) = \int_{\mp\infty}^{t^0} \frac{d}{dt} H^{(k)} dt \quad (\text{積分は (6) に沿って})$$

と置こう。

$$\mu \delta_k^{\pm}(\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) = \int_{\mp\infty}^0 \{H, H^{(k)}\} d(t - t^0) \quad (\text{積分は (6) に沿って})$$

さて、

$$\delta_k^{\pm}(\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) - \delta_k^{\pm}(\pi; \phi_2^0, t^0; \bar{\omega}) \sim \varepsilon(\omega - \bar{\omega})$$

であることが、以下と同様の計算により分かる。したがって、方程式 (7) は次の方程式と同値になる：

$$\begin{aligned}\delta_1 &= O(\omega - \bar{\omega}) + O(\mu) \\ \mu \delta_2 &= \mu O(\omega - \bar{\omega}) + O(\mu^2) + 1/2 (\omega^2 - \bar{\omega}^2)\end{aligned}\quad (8)$$

ただし

$$\begin{aligned}\delta_k &:= \delta_k^- (\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) - \delta_k^+ (\pi; \phi_2^0, t^0; \omega) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \{H, H^{(k)}\} d(t - t^0) \quad (\text{積分は(6)に沿って})\end{aligned}$$

さて,

$$\{H, H^{(2)}\} = \mu \varepsilon I_2 (1 - \cos \phi_1) \cdot \frac{\partial B}{\partial \phi_2}$$

であるから, これに(6)を代入して計算を実行すると

$$\delta_2 = 2\pi \omega^2 \frac{\cos \phi_2^0}{\sinh(\pi \omega / 2\sqrt{\varepsilon})}$$

$$\text{同様に, } \{H, H^{(1)}\} = \mu \varepsilon I_1 \sin \phi_1 \cdot B$$

であるから, これに(6)を代入して計算を実行すると

$$\delta_1 = 2\pi \frac{\sin t^0}{\sinh(\pi / 2\sqrt{\varepsilon})} - \delta_2$$

を得る。したがって, 方程式(8)は

$$\begin{aligned}\delta_2 &= O(\mu) + \frac{O(\omega - \bar{\omega})}{\mu} = 2\pi \omega^2 \frac{\cos \phi_2^0}{\sinh(\pi \omega / 2\sqrt{\varepsilon})} \sim e^{-1/\sqrt{\varepsilon}} \\ \delta_1 + \delta_2 &= O(\mu) + \frac{O(\omega - \bar{\omega})}{\mu} = 2\pi \frac{\sin t^0}{\sinh(\pi / 2\sqrt{\varepsilon})} \sim e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\end{aligned}$$

と同値である。よって

$$\omega - \bar{\omega} = O(\mu^2), \quad \mu = O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}) \quad (9)$$

とすると, この方程式を ϕ_2^0 と t^0 に関して解くことができる。

こうして, $\omega, \bar{\omega}$ が条件(9)を満たすとき, トーラス T_{ω} の不安定多様体(whisker) Y_{ω}^+ と $T_{\bar{\omega}}$ の安定多様体(whisker) $Y_{\bar{\omega}}^-$ は互いに交わることが分かった。

トーラスの族 T_{ω_k} ($k=1, 2, \dots, N$)は, $\omega_k - \omega_{k+1} = O(\mu^2)$ のとき, Arnoldのいわゆる推移鎖(transition chain)をなす。これによって, トーラス T_{ω_1} の任意の近傍に点がとれて, その点は, トーラスの族 T_{ω_k} ($k=1, 2, \dots, N$)の安定多様体 $Y_{\omega_k}^-$, 不安定多様体 $Y_{\omega_k}^+$ の近くに沿って, 次々と(非常にゆっくりとした速度で)移動することができ, 最後のトーラス T_{ω_N} の近傍に到達することができる。詳しくは, 文献(2)を見られたい。

最後に次の注意をしておこう。トーラスの族 T_{ω_k} ($k=1, 2, \dots, N$)は, $\omega_k - \omega_{k+1} = O(\mu^2)$ を満たしさえすれば何でもよいことに注意しよう。したがって, (5)の解は I_2 軸に沿って, I_2 方向にどのような運動も実際に可能である。

文 献

- (1) V.I. Arnold: Dynamical system III, Springer (1988)
 - (2) : Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Sov. Math. Dokl. 5(3) (1964), pp581-585
 - (3) G. Gallavotti: Quasi-integrable mechanical systems, Les Houches, Session XLIII (1984), pp542-624
 - (4) A. Lichtenberg-M. Liebermann: Regular and stochastic motion, Springer (1983)
 - (5) J. Moser : Recent development in the theory of Hamiltonian systems, SIAM Review, 28 (1986), pp459-485
 - (6) N. Nekhoroshev : An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surv. 32.6 (1977) pp1-65
 - (7) T. Niwa: 力学系, 紀伊国屋書店 (1981)
 - (8) : 近可積分 Hamilton 系のエルゴード問題, 数学 (1988) pp69-77
- * 詳しい文献表に関しては, 上の (1) または (8) の文献表を見て下さい。