

Hardy-Orlicz 族について

茨城大理 荷見 守助 (Morisuke Hasumi)

1. はしがき

Φ を $\mathbb{R}$ 上で定義された単調増加な凸函数で $\Phi(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = 0$ 及び $\Phi(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = +\infty$ を満たすものとする. [以下ではこの性質を持つ函数をノルム函数と呼ぶことにする.] 我々は複素平面内の単位開円板 D 上で定義された正則函数 f で, $\Phi(\log |f(z)|)$ が調和な優函数を持つものの全体を H^Φ ($0 < p < \infty$) と書き, Φ に対応する Hardy-Orlicz 族と呼ぶ. 通常の Hardy 族 H^p は $\Phi(t) = \exp(pt)$ に対応するものである. この小文では, 最近の Deeb, Khalil, Marzuq の研究 [1; 2] に関連した二三の注意を述べる. この話題に関することは今春の学会でも話したが, 若干の見落としもあったので, その訂正も兼ねることにしたい. 証明等の詳細は [4] に出る予定である.

2. Smirnov 型の条件について

D 上の正則函数 f が Nevanlinna 族 N に属するとは, $\log^+ |f|$ が D 上で調和な優函数を持つことを云ふ. これはまた条件

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$$

と同じである. N は $\Phi(t) = \max\{t, 0\}$ に対する H^Φ と同じであるから, 全ての

H^Φ は N に含まれることが分る. 従って, 全ての $f \in H^\Phi$ は半径方向の境界値を持ち, それを $f(e^{i\theta})$ と書く. さて, $f \in H^\Phi$ が Smirnov 族 N^+ に属するとは

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta$$

を満たすことを云ふ. 我々はこれと同様な条件を族 H^Φ に課してみる. 得られた結果は次の通りである.

定理 1. Φ をノルム函数とすると, $f \in H^\Phi$ に対して次は同値である.

$$(a) \quad \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \Phi(\log |f(re^{i\theta})|) d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi(\log |f(e^{i\theta})|) d\theta.$$

(b) $\Phi(\log |f(z)|)$ は準有界 (quasibounded) な調和優函数を持つ.

(c) $f \in N^+$.

証明はほぼ N^+ の時と同じと言ってよい. $H^p \subseteq N^+$ は既知であるが, 一般にはどうであらうか. 筆者はこの種の条件 (必要又は十分) を知らないので, これを問題としておく.

問題: $H^\Phi \subseteq N^+$ となるために Φ の満たすべき条件を求めよ.

3. 乗法因子について

前節で注意したやうに, H^Φ を単位円周 ∂D 上の函数空間と考えることが出来る. さて, ∂D 上の函数 g が H^Φ の乗法因子 (multiplier) であるとは, 全ての $f \in H^\Phi$ に対して $gf \in H^\Phi$ を満たすことを云ふ. H^Φ の乗法因子の全体を $M(H^\Phi)$ と表す. これについては次が成立つ.

定理 2. もし定数 K が存在して, 十分大きな全ての s, t に対して

$$\Phi(s)\Phi(t) \leq K\Phi(s+t)$$

が成立つならば, $M(H^\Phi) \subseteq H^\infty$.

証明には簡単であるが有用な次の補題が使はれる.

補題. Φ をノルム函数とすると, 任意の非負の $u \in L^1(d\theta/2\pi)$ と $A > 0$ に対し $h \in H^\Phi$ が存在して ∂D 上殆ど至る処 $|h(e^{i\theta})| \geq A$ 及び $u(e^{i\theta}) \leq \Phi(\log|h(e^{i\theta})|)$ が成立つ.

定理 3. 包含関係 $H^\infty \subseteq M(H^\Phi)$ が成立つための必要十分条件は

$$\Phi(t + \log 2)/\Phi(t) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty$$

である.

4. 包含関係について

Hardy-Orlicz 族の間の包含関係については次が成立つ.

定理 4. Φ と Ψ をノルム函数とするとき, $H^\Phi \subseteq H^\Psi$ が成立つための必要十分条件は

$$\Psi(t)/\Phi(t) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty$$

である.

5. これまでの研究との関係

Deeb 他の研究 [1; 2] では, 小論とは多少異なった定義を用ゐてゐる. 即ち, 函数 $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ について次の性質を考へる.

M1) φ は連続, 単調増加で定数ではない.

M2) $\varphi(0) = 0$.

M3) $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$, $s, t \in [0, \infty)$.

M4) D 上の任意の正則函数 f に対して, $\varphi(|f|)$ は D 上の劣調和函数である.

[2] に於ては, M1), M2), M3) を満たす φ を考へ, モジュラス函数と呼んでゐる. そして, D 上の正則函数 f で, 殆ど全ての半径に沿つての極限值を持ち,

且つ

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \varphi(|f(re^{i\theta})|) d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi(|f(e^{i\theta})|) d\theta < +\infty$$

(但し $d\sigma(t) = dt/2\pi$ とおく) を満たすものの全体を $H(\varphi)$ と書いて, φ に対応する Hardy-Orlicz 族と呼んでゐる. しかし, 本質的な議論を行ふためには, Jensen の不等式などを考へてみれば分るやうに, 性質 M4) を仮定することが自然であると思はれる. 従つて, M1), M2) (これは省略可能), M4) を満足する φ から始めるのがよいと思はれる. 実際次が成り立つ.

補題. M1) を満たす函数 $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ について次の命題は同値である.

- (a) D 上の任意の正則函数 $f(z)$ に対して, $\varphi(|f(z)|)$ は D 上で劣調和である.
- (b) $\varphi(e^t)$, $-\infty < t < +\infty$, は凸函数である.

従つて, φ が M1), M2), M4) を満たすことと, $\varphi(e^t)$ が §1 の意味でノルム函数であることとは同等である. 以下では, φ はこの条件を満たすものとし, 函数空間 $H[\varphi]$ を次で定義する: $H[\varphi]$ は D 上の正則函数 f で $\varphi(|f|)$ が D 上で調和優函数を持つものの全体. §2 の結果を参照すれば次を得る.

命題 1. φ が M1), M2), M4) を満たすとすれば,

- (a) $H[\varphi] = H^\Phi$, 但し $\Phi(t) = \varphi(e^t)$.
- (b) $H(\varphi) = H[\varphi] \cap N^+$.

命題 2. 定数 K が存在して, 十分大きな s, t に対し $\varphi(s)\varphi(t) \leq K\varphi(st)$ が成立すると仮定する. このとき, $M(H[\varphi]) = H^\infty$ なるための必要十分条件は $\varphi(t)$ が十分大きな t において準線形 (quasi-linear), 即ち, 定数 C が存在して十分大きな全ての s, t に対して $\varphi(s+t) \leq C(\varphi(s) + \varphi(t))$ が成立つことである.

命題 3. $H(\varphi) = H^1$ なるための必要十分条件は

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t < \infty \quad \text{且つ} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t > 0$$

なることである.

命題 4. $M1), M2), M3), M4)$ を満たす φ で

$$H^1 \subsetneq H(\varphi) \subsetneq \bigcap_{0 < p < 1} H^p$$

を満足するものが, 無数に存在する.

命題 2, 3, 4 は或る意味で, [1; 2] の結果の改良になってゐる.

参考文献

- [1] W. Deeb, M. Marzuq, $H(\varphi)$ spaces, *Canad. Math. Bull.* 29 (3) (1986), 295-301.
- [2] W. Deeb, R. Khalil, M. Marzuq, Isometric multiplication of Hardy-Orlicz spaces, *Austral. Math. Soc.* 34 (1986), 177-189.
- [3] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, 1970.
- [4] M. Hasumi, S. Kataoka, Remarks on Hardy-Orlicz spaces, 投稿中.
- [5] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, 1962.
- [6] M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, 1961.