

赤外発散に関連した一、二の幾何学的問題

京大・数理解 河合隆裕

関係する粒子の質量が零である場合のファインマン(型)積分の解析性を論じる際に遭遇する問題の幾何学的側面に就いて報告する。現在目標としていることは、massless particles を考慮に入れた時、massive particles によって定められるランダウ・中西多様体の近傍での S -行列の特性が (少くとも摂動論的には) massless particles を考慮に入れない場合と本質的には差が無い、と云う当然期待されるべき、併せて寧ろ逆の方向の結果が (かなり speculative な方法で) 多く報告されている、結果を示すことである。([1])

最終的には、(柏原-河合の意味での)漸近展開が適用されるべきであろう、と思うけれども、[1]ではより *à la main* な approach を用いている。何れにしても、解析的に見て $1/(k^2 - m^2 + i0)$, ($m \neq 0$) と $1/(k^2 + i0)$ とは著しく異った性質を示すことにはいくら注意してもし過ぎることはあるまい。例えば、多少揚足取り気味ではあるが、microlocal な観点からは $\delta^+(k^2) = \delta(k^2) \chi(k_0)$ という定義は余り好まし

くは無い。やはり、

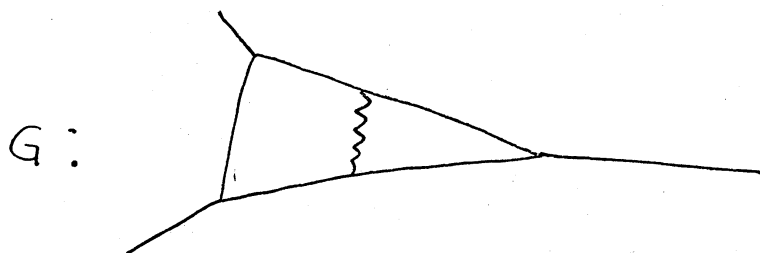
$$\delta^+(k^2) = -\frac{1}{2\pi i} \Delta(k) \Upsilon(k_0),$$

但し

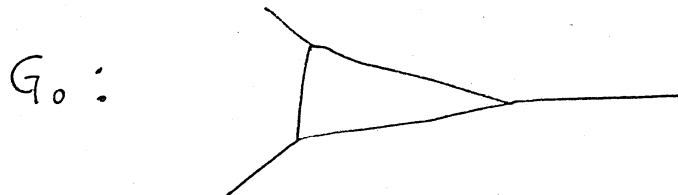
$$\Delta(k) = ((k_0 + i0)^2 - \vec{k}^2)^{-1} - ((k_0 - i0)^2 - \vec{k}^2)^{-1}$$

とすることが望ましい。(SS($\Delta(k)$))はSS($\delta(k^2)$)よりはるかに小さいことに注意。尚、SS($\delta(k^2)$)が、或いはSS($1/(k^2 + i0)$)で、 $k=0$ で任意の(実)covectorを含むと言う事実は、massless particlesの関与するprocessに於けるColeman-Norton描像と良く一致し興味深い。(この事実は、私の知る限りでは、きっちりと言明した文献は無いように思うので、些か横道に逸れるが、簡単に触れておく：

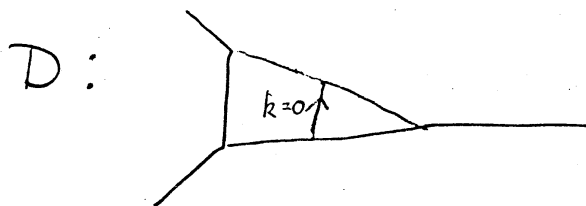
例えば次のgraph G に於いて、波線のみがmassless particleに対応しているとし、このspace-time diagramとしての実現の可能性を考えてみることにする。



今 G_0 を次のような graph とし



D_0 を, Landau-中西 rule による space-time diagram としての G_0 の実現とする。この時, 次のような diagram D が実現される, と言うのかい, 波線が massless particle に対応する, と言う事実をも考慮に入れての Coleman-Norton 描像である。勿論, $k \neq 0$ ならば, 内線のいくつかか contract された (例えば D' のような) diagram しか実現され得ない。



但し $\uparrow$ は 全く任意の実ベクトルである。



尚, [1] に於いては, Q の波線に對し,
 $1/(k^2+i0)$ 型の propagator ではなく retarded
 propagator を対応させることによって得られる

函数も重要な役割を果たしているが. この場合には
 D に於ける $\not{D}$ は light cone vector
 となる. これは $SS(1/((k_0 \pm i0)^2 - \vec{k}^2))$ の

$k=0$ での余接成分から $\pm \omega$ (但し $\omega^2=0$,
 複号同順) となることに対応している.)

さて, [1] に於いて 次の形の函数の解析
 性を調べるのが重要になる:

(1) $I(p, q)$

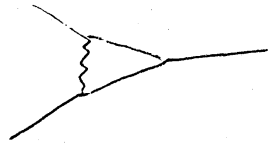
$$= \int \frac{N(p, q, k) d^4 k}{(pk+i0)(2pk+k^2+i0)(k^2+i0)(2qk+k^2+i0)(qk+i0)}$$

(ここで N はある多項式; 以下の議論ではその形は余り重要でない.)
 これは, 形式的には 次の函数 $F(p, q)$ に於いて

$p^2=m^2, q^2=m^2$ と置いた物である. 尚 $F(p, q)$ は [2]

で導入された ファインマン型の函数の内, 先程

のグラフ Q に於いて



と云う部分

に対応する特異性の内の leading な部分である。([1])

$$F(p, q) = \int \Phi(p, q, k) d^4k, \quad \text{但し}$$

$$(2) \quad \Phi(p, q, k)$$

$$= \frac{N(p, q, k)}{(pk + i0)((p+k)^2 - m^2 + i0)(k^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)(qk + i0)}.$$

[尚, $N(p, q, k)$ を具体的に記すと, その次数は, 上の
函数を (紫外発散は別として) 収束させるに十分な
だけある事は容易に示し得るから. 以下ではこの
点に就いては立ち入らない。]

以下, 本稿では紫外発散はすべて無視す
ることとする。さて, この時 $I(p, q)$ に通常の
microfunction に対する積, 積分の理論を
適用することを考えてみると, 被積分函数の積の
well-definedness は一般論では保証され得
ないことが判る。では どうしたら良いか? ここで
柏原-河合による “ W_0 型の結果” を使ってみる。([3];
尚, Adv. Math. 34 (1979), 163-184 も参照。)

即ち 次のような関係式を満たす実ベクトル

(P, Q, K, u, v) が存在するか否かを調べる

43. $(p(n), q(n), k(n), \alpha_j(n) (j=1, \dots, 5))$

は実とは限らない。 $SS(I)$ が (3) を満たす

$(P, Q; u, v)$ なる点で尽きられる, と云うのか, " W_0 型"

の結果"の一つの帰結
である。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & p(n) \rightarrow P \\
 & q(n) \rightarrow Q \\
 & k(n) \rightarrow K \\
 & \alpha_1(n) p(n) k(n) \rightarrow 0 \\
 & \alpha_2(n) (2p(n) k(n) + k(n)^2) \rightarrow 0 \\
 & \alpha_3(n) k(n)^2 \rightarrow 0 \\
 & \alpha_4(n) (2q(n) k(n) + k(n)^2) \rightarrow 0 \\
 & \alpha_5(n) q(n) k(n) \rightarrow 0 \\
 & \alpha_1(n) k(n) + 2\alpha_2(n) k(n) \rightarrow u \\
 & 2\alpha_4(n) k(n) + \alpha_5(n) k(n) \rightarrow v \\
 & \alpha_1(n) p(n) + 2\alpha_2(n) (p(n) + k(n)) \\
 & \quad + 2\alpha_3(n) k(n) + 2\alpha_4(n) (q(n) + k(n)) \\
 & \quad + \alpha_5(n) q(n) \rightarrow 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

勿論、今 (1) の右辺の被積分函数の分母は $+i0$ 型故、(3) に方々ける $\alpha_j(n)$ に何らかの条件が更に課せられることを期待することは自然である。そのような付帯条件を課した陳述を通常 " $W_0(+)$ 型の結果" と呼んでいる。([3]) だが、不幸にして、[3] に於いて述べられた予想は未だに証明されていない。

だが、幸い、(1) に就いては、 $W_0(+)$ を持ち出すこともなく、(3) の関係式のみにから、もし

$P \times Q$ ($P^2 \sim m^2$, $Q^2 \sim m^2$) ならば、 $u=v=0$, 即ち $I(p, q)$ は $p \times q$ ならば *mass-shell* の近傍で解析的、を示し得る。(計算の詳細は略す。(3) の各式を種々組合せるだけの初等的なものである。)

同様に $\Gamma(p, q)$ を調べようとすると、今度は $\Gamma(p, q)$ は ($p \times q$ でも) 解析的でなく、 W_0 型の結果ではなく、 $W_0(+)$ 型の予想を使わないと望む結果が出てこない。併作、このような基本的な所に数学的な "予想" を持ち込んで物理学者に満足して頂けるとは思い難い。勿論、 $W_0(+)$ 型の予想を用いて望ましい結果が得られる、と云うこと

は 数学屋にとっては 甚だ encouraging である；
 少くとも 我々は 余り 見当外れのことを 予想してい
 る訳ではあるまい ——

結局 [1] では、多少 tricky な、但し W_0 型の
 議論のやり方から見て 自然な、又、絶対に物理学
 者から tricky と言われる心配は無い、方法で
 この計は 切り抜くこととした： $k = r\Omega$ ($|\Omega| = 1$) と
 極座標に移って (r, Ω) -空間での積分と見做
 して議論を進めている。この積分に就いては、
 $W_0(+)$ 、或いは W_0 を持ち出すずに 一般論
 が適用できるからである。[何故 此が tricky
 か と言えは、

$$\frac{1}{k^2 + i0} = \frac{1}{r^2(\Omega^2 + i0)}$$

と云う書き換えに於いて、右辺の $i0$ と左辺の $i0$ とは
 意味が違ふ、或いは より基本的には k -space
 と (r, Ω) -space は 同相でないから、2つの函数
 が等しい、と云うことの 意味が 明確でないか
 らである。]

何れにしても、再び このような形で W_0 、
 或いは $W_0(+)$ 型の幾何学か。今迄とは かなり

違った文脈で現われてきたことは、 W_0 型の議論の自然さを反映しているように思われて 私にとっては嬉しいことである。

文献

- [1] Kawai, T. and H. P. Stapp, Infrared finiteness and analytic structure, in preparation.
- [2] Stapp, H. P., Exact solutions of the infrared problem, Phys. Rev., D, 28 (1983), 1386-1418.
- [3] Kashiwara, M. and T. Kawai, On holonomic systems for $\prod_{l=1}^N (f_l + \sqrt{-1})^{\alpha_l}$, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 15 (1979), 551-575.