

氏 名	よし なが まさ ひこ 吉 永 正 彦
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2835 号
学位授与の日付	平 成 16 年 5 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. (自由配置の特徴付けと Edelman-Reiner の予想)
論文調査委員	(主 査) 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 柏 原 正 樹 教 授 向 井 茂

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、組み合わせ論に於ける超平面配置に関する Edelman-Reiner 予想に完全な解答を与えるものである。

超平面配置とは有限次元の複素又は実ベクトル空間とそれに含まれる有限個の超平面の族の組の事である。与えられた超平面配置にたいしベクトル空間上の多項式を係数とするベクトル場で配置超平面族にその生成点に於て接するものを対数ベクトル場とよぶ。それら全体のなす加群は空間の係数環上の加群として反射層になるが、特に自由加群になるとき、その超平面配置を自由と呼ぶ。自由配置の理論は齋藤の創始によるものでその自由性の判定法が知られている。自由配置はその補集合が著しい位相的特徴を示すことから注目され、組み合わせ論的立場から多くの研究がなされて来た。例えば寺尾により「配置平面の補集合のポアンカレ多項式は有理一次因数に分解しその分解係数は対数ベクトル場のなす自由加群基底の次数(巾指数と呼ばれる)で与えられる」が知られている。この様に自由配置の研究は現在も活発に進展中である。特にアファインルート系との関連で1997に提出された Edelman-Reiner による予想、及び Stainlay 等による“リーマン予想”はその専門家多くの関心をあつめ、超平面配置の組み合わせ論の一つの中心的課題として研究されてきている。

ここで Edelman-Reiner 予想とは以下の通りである。 Φ^+ をあるユークリッド空間 V 上の線形形式の集合からなる正のルート系とし、その巾指数を $(e_1, \dots, e_\ell)$ とする。整数 k とルート α にたいし V の超平面 $H_{\alpha,k} := \{x \in V \mid \alpha(x) = k\}$ 及びそれらからなる配置 $A_\Phi^{[p,q]} : \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+, k \in \mathbb{Z}, p \leq k \leq q\}$ を考える(但し, p, q ($p \leq q$) は整数)。いま m を任意の非負整数, h をコクセタ数とする。この時, $A_\Phi^{[-m,m]}$ の鍾は $(1, e_1 + mh, \dots, e_\ell + mh)$ を巾指数とする自由配置であり, $A_\Phi^{[1-m,m]}$ の鍾は $(1, mh, \dots, mh)$ を巾指数とする自由配置である。

本論文に於て申請者は代数幾何学的視点から自由性の新たな特徴付けを与え、その応用として上記の Edelman-Reiner 予想を含む一連の超平面配置の自由性の証明を与えた。

自由性の新たな判定は本来大域的に定義されていた概念を層化することにより射影空間上のベクトル束という代数幾何的な対称に置き換えることによりなされる。即ち、対数ベクトル場加群が自由であるとはベクトル空間に付随する射影空間上の層として直線束の直和に分解することと同値である。この事をふまえて申請論文に於てつぎの自由性の判定法が証明されている：

$l+1$ 次元空間上に超平面配置 A が与えられたとする(但し $l \geq 3$)。 A 中の超平面 H を一つ選んでおく。この時 A が巾指数を $(1, e_1, \dots, e_\ell)$ とする自由配置になる事は次の二条件と同値である。

- i) A と H の交叉で定まる H 上の重複配置は $(e_1, \dots, e_\ell)$ を巾指数とする自由配置である。
- ii) 原点以外の H 上の各点に於て A は自由である。

この定理の証明にはベクトル束の場合に知られていたコホモロジーの消滅に関する議論が巧妙に用いられる。この判定法により A の自由性は次元に関する帰納法が適用可能となるのである。

論文審査の結果の要旨

自由配置の理論は、元来余次元 1 のディスクリミナント集合を持つパラメタ空間上のガウス-マニン接続の研究のために生まれた。その為その研究の当初よりディスクリミナントの補集合の位相との関連が研究の関心の中心にあった。即ち補集合は $K(\pi, 1)$ -空間になるか否か、そのコホモロジー環の構造について、ポアンカレ多項式の分解について、基本群の構造等などが問題となり、それらの問題の幾つかは肯定的又は否定的に解決された。また当初研究されたルート系に対応するコクセタ配置のみならず多様かつ組み合わせ論的に重要な例が生まれ、自由配置の研究はそれ自体が超平面配置の理論の中で独立した研究対象として組み合わせ論の一分野を形成するに至った。

そのなかで、Edelman-Reiner 予想はそれ以前に研究された Catalan 配置や Shi 配置に関する予想を統合一般化するひとつの中心的課題として関係する多くの研究者の注目を集め、ここ数年にわたり関連する部分的結果が発表されてきた。申請論文はそれら断片的な結果を越えて同予想に完全な解決を与えている。その仕事は超平面配置の理論に顕著な貢献を与えるものであり、当該分野から非常に高い評価を得ている。

主結果は、一般の超平面配置の自由性の新たな帰納的な判定法を与えるという一般性の高いものであり、当初の Edelman-Reiner 予想のみならず更なる応用も期待され今後の同方面発展方向を一つ示したものとして高く評価できる。また用いられた方法も従来主に用いられた組み合わせ論的な方法に代数幾何的方法も加え、方法的にも元来の研究課題であったホッジ構造との関連が視野に入るなど当該分野に更なる発展をうながすことを期待させるものである。

主論文のみならず、参考論文 1 「The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements」においては、主論文の主定理を適用するに際して必要な多重配置の自由性の判定条件を深く研究しており申請者の重要な貢献となっている。参考論文 2 「On the freeness of 3-arrangements」においては主論文では扱えない 3 次元空間上の配置についてその自由性の判定を特性多項式及び多重配置の自由性に還元するという非常に興味深い結果を与えておりそれ自体価値あるものであるのみならず、申請者の当該分野全体への深い理解と洞察力をしめしている。

申請者は大学院在学 5 年未満であり、特例を適用するに充分であるかどうかを慎重に審査をおこなった。その結果、以上のような理由により、本論文は博士（理学）の学位論文として十分なものと考えられる。論文内容とそれに関連した口頭試問を行なった結果合格と認めた。