

カタストロフと偏微分方程式

京大 数理解析 宇敷重広

非線型偏微分方程式は、その最も簡単な場合においても、滑らかな初期条件に対して、大域的な滑らかな解を持つとは限らない。その場合、超関数解を考えるのは自然である。この時、単なる関数として解を作るには、不連続面や特異点の出現のために困難が生じるのである。ここでは、立場を変えて、典型的な不連続面の出現の様子を、微分解析 (differential analysis) 的方法によって捉える試みについて述べる。用いる手法は、R. Thom のカタストロフ理論のうちの、static model と呼ばれるものである。

n 個の空間変数に関する、単独の quasi-linear conservation law の Cauchy 問題

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \phi(x)$$

を考えよう。 u は未知関数 $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ であり, f_i は与えられた関数 $f_i: \mathbb{R} \rightarrow$
 $\mathbb{R}$, $(i=1, \dots, n)$ で, C^∞ かつ $\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} \geq \varepsilon > 0$, また, 初
 期条件 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に入っ
 ていりものとする。

$n=1$ の場合は D. Schaeffer [5] によって, その解の
 generic な shock の型は分類されている。

この方程式の distribution の意味での解の存在と一意性は,
 Conway & Smoller [2] に示されている。我々は, ここで
 は, distribution の意味での weak solution とは, 必ずし
 も一致しないが, 定性的には同じような大域的振舞いをする
 (と考えられる) 解について考える。 $n=1$ の場合, 両者は一致
 する。

可測関数 $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ で, 次の条件 i), ii), iii)
 を満たすものを, 我々の意味での解と呼ぶことにする。

i) $H = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ とする。 $\Gamma \subset H$ で, Γ は有限個の
 n 次元正則部分多様体の和集合となっているものがせめて,

$H - \Gamma$ において, u は classical な意味で方程式 (1)
 を満たす。

ii) u は $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ の近傍で滑らかで, $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上で, 初期条
 件 (2) を満たす。

iii) $\forall p \in \Gamma$ に対し z . p の Γ の両側からの u の極根がそれぞれ存在して C^∞ であり、かつ、 Γ の p における接空間は、ベクトル $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n, \bar{\psi})$ に直交する。ここで

$$\psi_i = \int_{u_1}^{u_2} t \left(\sum_j a_j(v) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (x - a(v)t) dv,$$

$$\bar{\psi} = \int_{u_1}^{u_2} t \left(\sum_j a_j(v) \right) \left(\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (x - a(v)t) a_k(v) \right) dv$$

ここで、 $a_j(u) = f'_j(u)$, $a(u) = (a_1(u), \dots, a_n(u))$

u_1, u_2 は p におけるそれぞれの側の極根を表わす。

$n=1$ のとき、この条件は、よく知られた shock condition

$$\gamma(t) = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

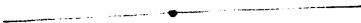
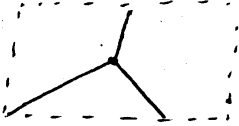
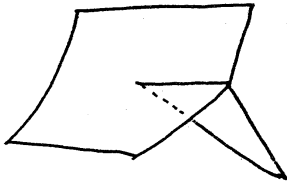
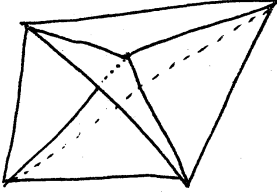
に帰着する。ただし $\gamma: t \mapsto (\gamma(t), t)$ は shock curve である。したがって、前に述べたように、我々の意味の解は shock の数が有限であることを除いて、distribution の意味の解と一致する。

Theorem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合 Ω で 次のようなものが存在する。

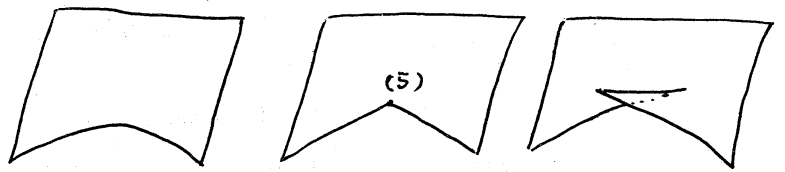
i) Ω は第一類集合である。

ii) 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) - \Omega$ に対して, ϕ を初期条件とする (i) の我々の意味の解が存在して, その不連続点の集合の閉包 $\overline{\Gamma}$ は層化集合となり, $\overline{\Gamma}$ の各点における構造は次にあげる list のうちのどれかを suspend したものに一致する。

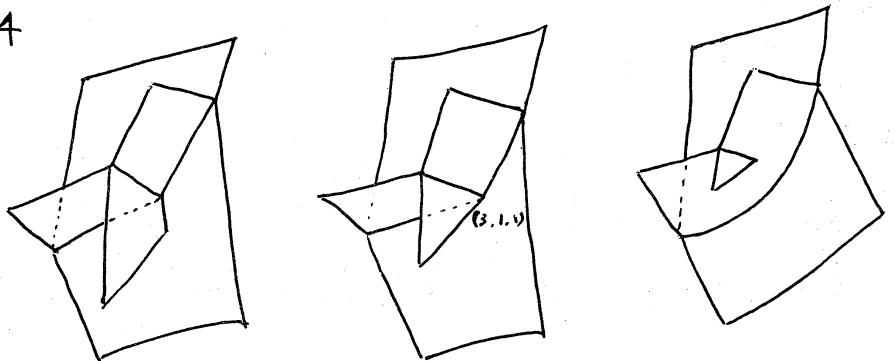
Shock の list (ここでは $n \leq 3$ の場合に出現するもののみを掲げる。 $n > 3$ の場合も 分類は同じ方法でできる)

type	codimension	transversal model
(1, 1)	1	
(3)	2	
(1, 1, 1)	2	
(3, 1)	3	
(1, 1, 1, 1)	3	

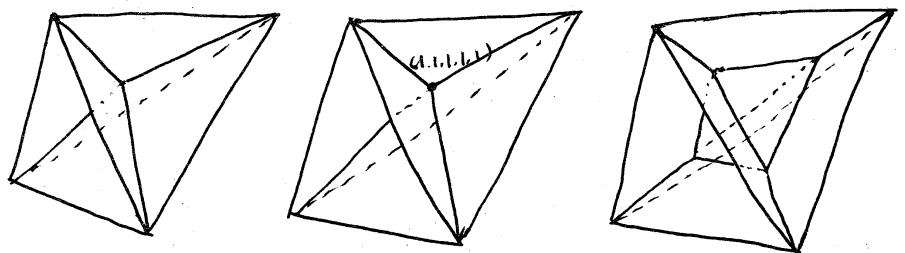
(5) 4



(3, 1, 1) 4



(1, 1, 1, 1, 1) 4



まず R. Thom のカタストロフ理論を思い出そう。

static model とは、台空間 W から C^∞ 写像の空間への可微分写像 F のことである。

$$F: W \longrightarrow C^\infty(N, M)$$

$C^\infty(N, M)$ は C^∞ 多様体 N, M の可微分写像 $f: N \rightarrow M$ 全体のなす空間で、 C^∞ トポロジーを入れておく。この

空間は、自然に Fréchet 多様体の構造をもつ。

$C^\infty(N, M) \ni f, g$ を2つの可微分写像とすると、微分同相 $h: N \rightarrow N$ と $k: M \rightarrow M$ が存在して、図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ N & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

が可換となると、 f と g は同じ (微分) 位相型をもつと言ひ $f \sim g$ と書く。これは同値関係となる。

$C^\infty(N, M)$ をこの同値関係で分類することを考える。

$M = \mathbb{R}$ のとき、 $C^\infty(N, \mathbb{R})$ は、この分類で、それぞれの類をなす部分集合に分割したとき、それらは (無限次元) 多様体となり、そのうち codimension のあまり高くないものは、

Cerf [1] の意味で、層化構造をもっており、しかも、それらの層のくっつき方が universal unfolding にまつて記述できるのである。

初期条件 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、static field (= static model) を次のように定義する。 $H = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, $C_+^\infty(\mathbb{R})$ は C^∞ 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $u \rightarrow \pm\infty$ のとき $f(u) \rightarrow +\infty$ となるもののなす $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合とする。static field $F: H \longrightarrow C_+^\infty(\mathbb{R})$ は $(x, t) \in H$ に対して、

$$F(x, t)(u) = F(x, t, u)$$

$$= - \int_0^u t \left(\sum_i a_i(v) \right) \phi(x - a(v)t) dv + t \sum_i g_i(u)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad a(u) = (a_1(u), \dots, a_n(u)),$$

$$a_i(u) = f'_i(u), \quad g_i(u) = u \cdot a_i(u) - f_i(u)$$

である。

(x, t) をとめたとき、関数 $F(x, t, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $u \rightarrow \pm\infty$ のとき f_i の convexity から $F(x, t, u) \rightarrow +\infty$ となり、 C^∞ であるから、必ず最小値をもつ。また、最小値を与える u に対して $\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 0$ となる。

$S \subset H \times \mathbb{R}$ を

$$S = \{ (x, t, u) \in H \times \mathbb{R} \mid \frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 0 \}$$

と定義すると、 S は $H \times \mathbb{R}$ の中の $n+1$ 次元正則部分多様体となる。

ほとんどすべての初期条件 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$u(x, t) = F(x, t, \cdot) \text{ を minimize する } u \text{ の値}$$

としたとき u は H 上ほとんど到るところ定義され、直接計算することによって、我々の意味での解となることが確かめられる。この解のグラフは S の部分集合となる。

次に Jet の概念を導入して、 H の点も、その解の特異性によって分類することを考える。

k を正の整数とする。 u に関する jet 写像

$$j_k F : H \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^R$$

を $j_k F(x, t, u) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u), \dots, \frac{\partial^k F}{\partial u^k}(x, t, u) \right)$ によって定義する。

$\alpha = (k_1, \dots, k_m)$ を multi-index としたとき

$$J_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m-1} \times \prod_{l=1}^m \mathbb{R}^{k_l} \text{ とおす。}$$

$$j_\alpha F : H \times \mathbb{R}^m \longrightarrow J_\alpha(\mathbb{R})$$

を $j_\alpha F(x, t, u_1, \dots, u_m)$

$$= (F_1 - F_2, \dots, F_{m-1} - F_m, j_{k_1} F_1, \dots, j_{k_m} F_m)$$

として定義する。ただし $F_i = F(x, t, u_i)$ 。 $\dim J_\alpha(\mathbb{R})$

$= N_\alpha = m-1 + |\alpha|$ である。方程式 $j_\alpha F = 0$ は

N_α 個の方程式系をまとめて書いたものである。

この定義したとき、 $F(x, t)$ の属する $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の層化構造の strata と、 $(x, t, u_1, \dots, u_m)$ において $j_\alpha F = 0$ となるような multi-index α との間に密接な関係があることがわかる。

$C_+^\infty(\mathbb{R})$ 層化構造は、ここでは特に、minimizing points に関係している bifurcation strata のみを扱うことにし、 $j_\alpha F = 0$ の根としては、 $u_1, \dots, u_m$ の全て異なっており、しかも、 $u_1, \dots, u_m$ は全て minimizing point になっているもののみを考える。また $j_\alpha F = 0$ と言うとき、常に、長さ $|\alpha|$ より大きな multi-index β に対しては、 $j_\beta F = 0$ は (x, t) において根をも

たないとする。 α に対応する関数, 即ち $j_\alpha F = 0$ が, 根をもつ(上で述べた意味で)関数の $C_+^\infty(\mathbb{R})$ における(上に述べた意味での)stateのcodimensionは $|\alpha| - 1$ である。ほとんどもすべとの初期条件 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, static field F は $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の codimension $> n+1$ のstateとは交わらないことが, 次の transversality theorem によって保障される。

Theorem $|\alpha| > n+2$ とする任意の multi-index α が与えられたとき, 第一類集合 $\Omega' \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ が存在して, 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) - \Omega'$ に対して, $j_\alpha F = 0$ となる, $u_1, \dots, u_m$ がすべと異なる解は存在しない。

次に, これらの static field F が, ほとんどもすべとの初期条件 ϕ に対して $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の bifurcation state に transversal に交わることが示せて, $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の universal unfolding から, 前記の結果を得る。また, これらの shock を出現させるような example を作りことは $n=1$ の場合の解の family を構成することによって簡単にできる。

REFERENCES

- [1] J.Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudoisotopie, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970).
- [2] E.Conway and J.Smoller, Global solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equations in Several Space Variables, Communication on Pure and Applied Math. vol XIX, 95-105 (1966).
- [3] P.D.Lax, Hyperbolic Systems of Conservation laws II, Communication on Pure and Applied Math. vol X, 537-566 (1957).
- [4] J.Mather, Right Equivalence, Warwick Univ. (1973).
- [5] D.Schaeffer, A regularity theorem for conservation laws, to appear.
- [6] M.Shiota, Transformations of Germs of Differentiable Functions through Changes of Local Coordinates, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ. vol 9, No.1, (1973).
- [7] R.Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin (1972).
- [8] R.Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, BAMS (1969)