

アンケート調査から考察する 視覚的に関連付けられた数学的性質の理解について

日本大学・理工学部 山本修一 (Shuichi Yamamoto)
College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

数学的ソフトウェアを活用して、数学的性質を視覚的に関連付けて理解させるような授業をいくつか実施している。テクノロジーを活用する数学教育の研究は 10 年以上前から多くの先行研究（例えば [1], [2]）がある。そのねらいについては、昔も今もそんなに変化はないと考えている。少なくとも、黒板やチョークで実現できない内容を、グラフィック機能や動画などのテクノロジーを用いることで数学理解を改善させたいという目標は変わらない。ただ、ここ数年のパソコンやソフトウェアの進化は目覚しく、誰もがより使い易いものに改良されて教育活用範囲も増している。

ここでは、平成 12 年度から継続的に実施している後期半期授業「教養ゼミナール」(*Mathematica* で数学を学ぶ)を通し、学生のアンケート調査を基に、学生の視覚的に関連付けられた数学的性質の理解について考察する。

この授業は、情報教育研究センターの演習室を使用し、そこに設置されるパソコンとソフトウェア *Mathematica* を活用する。最近では、学部のポータルサイトから、各自教材をダウンロードさせて主体的に学ばせるようにしている。最初に、ガイダンス (*Mathematica* を活用した数学の学び方の例) および *Mathematica* の使い方について 2 回の授業をする。

考察する学生のアンケート調査は、学期末の小テスト時に実施し、以下の選択肢 A, B, ..., F の中に同意するものがあればそれに○（複数可）を付けよというものである。「A: 数学は応用できそうであるという気持が以前より増した」「B: 数学をもっと深く勉強したいという気持になった」「C: 数学の重要性をより強く感じるようになった」「D: 数学のイメージ化ができて理解が深まった」「E: 公式の暗記から離れて数学を楽しく勉強することができた」「F: その他」

さらに、数学的性質の理解の深まりについて、深まった内容を以下の選択肢 a, b, ..., f から選択（複数可）させ、同時にその理由も書かせている。ただし、学生には理由の記載内容だけは評価の対象すると予め伝えてある。「a: 三角関数の性質（加法定理やフーリエ級数展開）」「b: 導関数の意味（役割）」「c: 関数が一次関数や 2 次関数など多項式で近似できること」「d: 積分の原理と原始関数」「e: 極限の意義」「f: その他」

最初、学生の感想として調査していただけであったが、平成 20 年度から、それまで記されていた内容を選択肢にして選択方式のアンケート調査にした。その結果、授業の単元ではない選択肢 e に関する感想も多く見られたので追加した。

下の表 1 は平成 25 年度の結果であり、表 2 は平成 24 年度と 25 年度の結果である。ただし、回答者はそれぞれ平成 24 年度 20 名（1 年生 12 名，2 年生 6 名，3 年生 2 名），平成 25 年度 35 名（1 年生 33 名，2 年生 2 名）である。

表 1 学生の同意項目

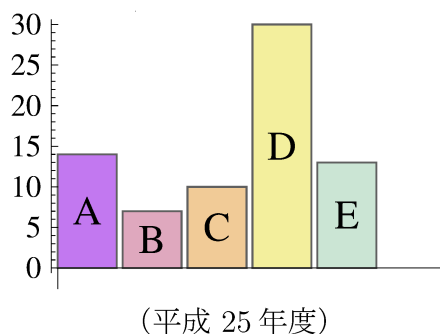
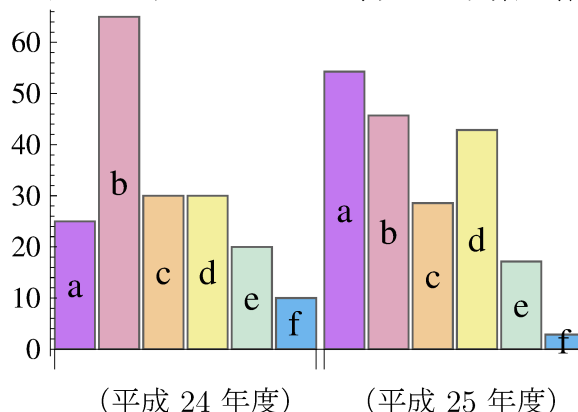


表 2 理解が深まったと解答した授業内容



なお、表 1 の数字は各項目に同意した人数を表し、表 2 の数字は、回答者全体に対する該当する授業内容を選択した人数の割合を百分率で表したものである。

表 1 から、「D：数学のイメージ化ができて理解が深まった」と回答した学生数が突出して高いことがわかる。この傾向は調査を始めて以来変わらない。また、表 2 の平成 24 年度の傾向（割合の分布）は、b の割合が抜きん出ており、平成 22 年度，平成 23 年度（回答者は両方とも 21 名）と同じ傾向であった。また、平成 25 年度の傾向は a の割合が一番高く、b, d の割合がそれに迫るというもので、平成 21 年度もこの傾向であった。この 2 つの分布ができる理由を明確に説明できないが、後者の分布については、平成 21 年度の回答者は 61 名（1 年生 36 名，2 年生 5 名，3 年生 19 名，4 年生 1 名）であり、いずれも 1 年生が 30 名を超えたという共通点が見られる。

また、この授業の開始時から毎回、出席とアンケート用紙を配布し、いくつかの間、例えば「接線の傾きは極限值を用いないと得られないことが理解できましたか」などを用意し、それに対する理解度の調査（「よく理解できた」「理解できた」「ふつう」「理解できなかった」「全く理解できなかった」などから選択させるもの）と今日の授業の感想を自由に書かせている。

この論文では、表 1 の結果を踏まえ、表 2 で、同意者が多かった選択肢 b, a の授業内容（導関数と三角関数）に対して、その指導事例および理解が深まった理由を過去の学生アンケート（理解の深まりについての記述）から探り、(1) ソフトウェアの活用が有効に働く数学的内容を明らかにし、(2) 視覚的に関連付けられることで理解がどのように改善されたかを考察する。

2 動画を用いた導関数の指導に対する考察

表 2 にあるように、平成 22 年度，23 年度，24 年度に、学生が最も理解できた内容として『導関数の役割』を選んだ。学生は微分の考え方を高校 2 年で最初に学習する。

例えば、学習指導要領解説 ([3]) 第2節、数学IIの内容と取扱いの中の(5)微分・積分の考えで以下のように指導されている。

「ア 微分の考え」で、『関数 $f(x)$ の値の変化を極限の考えを用いて調べる活動を通して、微分係数や導関数の概念を導く』とあり、(ア) 微分係数と導関数では、関数の値の変化について具体例を通して考察させる。微分係数については、関数のグラフの接線と関連付けて扱う。その際、極限については直観的に理解させるようにする。(イ) 微分の応用では、関数の値の増加、減少についても、接線の傾きなどと関連付けて、視覚的、直観的にとらえることができるようにするとある。

上の「直感的に」「視覚的に」と記される部分を、黒板とチョークだけで指導するのは至難の業である。このことが、公式の暗記だけで済ませる学生が増加する一つの要因だと考えている。実際に、大学で微分積分学の授業を担当して、公式を適用し計算ができればそれでわかったとし、それ以上、数学の概念や原理まで学ぼうとしない学生の多さに驚くのは筆者だけではない。例えば、坂本 ([1], 5章, 5.6) はこのような観点から、Turtle Graphics によるプログラミング学習を微分法の指導に取り入れている。我々もまた、この極限のイメージ作りを支援するために、パソコンやソフトウェアを活用する必要があると強く考えている。

まず、導関数の指導にソフトウェア *Mathematica* をどのように活用したかを述べる。このソフトウェアは、 $\sin x$ を $\text{Sin}[x]$ とするなど、教科書に見られる式とよく似た用法が多く採用されており、プログラミングを通して、教科書を読む代わり（ノートに書き写すような）の学びを期待している。

2.1 指導事例1

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線を理解させるために、 $f(x) = x^2 - 7x + 4$, $a = 2$ とし動画1を用意した。動画1は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = m(x - 2) - 6$ が一緒に描かれる画面で、プラスキーによって m の値をクリックで移動させて、直線が接線になるように、 m の値を求めさせるものである。図1は $m = -2$ のときのイメージである。しかし、学生は見た目だけで接線と思う直線を選ぶので、皆一定ではないが、接線に対する学びのモチベーションが喚起されると考えている。

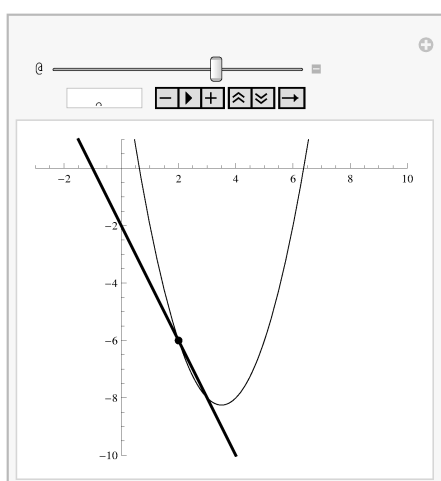


図1 直観で接線を探す動画1

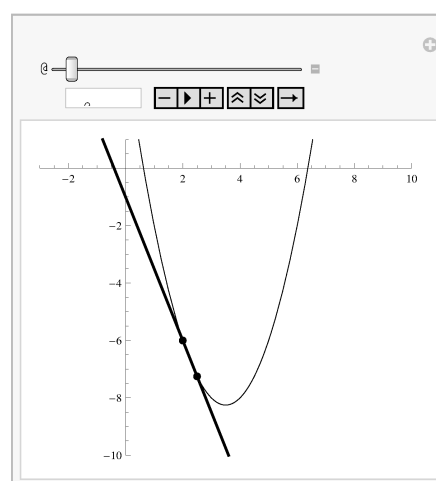


図2 接線を数学的に導く動画2

続いて $y = f(x)$ と 2 点 $(2, -6), (2 + \frac{1}{n}, f(2 + \frac{1}{n}))$ を通る直線の式で定義される関数

$$y = \frac{f(2 + \frac{1}{n}) - f(2)}{\frac{1}{n}}(x - 2) - 6$$

のグラフを一緒に描き、自然数 n の値を大きくしながら直線の挙動を観察する動画 2 (図 2 は、 $n = 2$ の場合を示す) を活用し、その操作を通して接線の傾きは極限を用いなければ表現できないことを理解させる。動画 2 を通して、動画 1 で選んだ直線と比べて、接線の傾きは

$$f'(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2 + \frac{1}{n}) - f(2)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

(微分係数) として与えられることを説明する。動画 1 については、プログラミングの操作でつまずき興味が失せないように、ポータルサイトからダウンロードさせてクリックだけで観測できるようにした。動画 2 は、極限を考察すべき手順が重要であると考え、資料教材を見て各自プログラムを作成させた。

2.2 指導事例 2

関数 $f(x)$ の導関数は、平均変化率 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に対して $h \rightarrow 0$ として導かれる。このことを視覚的に理解させるために $h = \frac{1}{n}$ とおいて、 $n \rightarrow \infty$ とする。ソフトを使用すると $f(x + \frac{1}{n})$ のグラフは $f(x)$ のグラフを左に $\frac{1}{n}$ だけ移動するので、差 $f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ のグラフは簡単に推測できる。さらに $\frac{1}{n}$ で割るのは n 倍に相当するので、 n の値が $1, 2, \dots$ と変化させたとき

$$\frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$$

のグラフの動向は追跡し易いと思われる。 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ として動画 3 を作らせて観測させた。

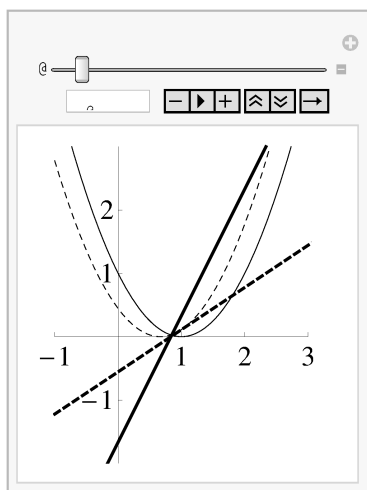


図 3 導関数を導く動画 3

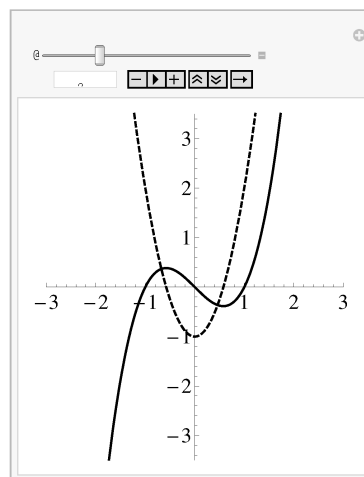


図 4 関数とその導関数の関係を示す動画 4

図 3 は、 $n = 3$ のときで、 $y = f(x)$ のグラフを $\frac{1}{3}$ だけ左に移動させたグラフが点線で、点線のグラフと $y = f(x)$ のグラフの差が太い点線で、それを 3 倍して描かれるグラフ

が太い実線であることを示す. n を大きくすると太い実線は直線 $y = 2x - 2$ に近づくことが観察される. 次に同じことを $f(x) = \sin x$ に対しても動画を作らせ観察させた.

さらに視点を変えて, 性質 A「導関数の値 (太い実線が近づいていくグラフ) が正 (負) の値をとるとき, $y = f(x)$ のグラフ (細い実線) が増加 (減少) している」ことを観察させる. すなわち, この $y = f(x)$ のグラフを画面上に残して, 導関数のグラフを導く動画 3 によって, 導関数の大事な性質も一緒に視覚的に, 直感的に理解させるのが目的である.

動画 4 では, $y = f(x) = x^3 + ax$ とその導関数のグラフを同一画面上に描いて導関数の性質 A を観察させた. この動画 4 を通して, 実数 a の値によってグラフの形状が変わっても, 上の性質が維持されること及び $x = \alpha$ における導関数の値が関数のグラフ上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の傾きを表すことを視覚的にとらえさせるためである. 図 4 は, $a = -1$ のとき, $x = 0$ において, 導関数の値が -1 で, $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(0, 0)$ における接線の傾きが, ちょうど -1 であることを示す.

2.3 学生が記述した理解の深まりと考察

指導事例 2.1 の結果として, 以下のような記述 (平成 25 年度と平成 26 年度の授業直後に実施する出席とアンケートにある感想) が見られる.

- (a1) 2 点が近づくのを利用して曲線に似た接線を描くことができた.
- (a2) 接線に微分係数を使う意味が図的に理解できた.
- (a3) アニメーションを使って直線の変化を見ることで, 今まであいまいであった接線の概念がよく分かった.
- (a4) 接線の傾きを求めるときに, なぜ微分係数を求めるのかなんて, これまで考えたことがなかったがその理由がよくわかった. グラフやアニメーションを通して視覚的に理解できた. n の値を大きくすることで段々と直線が接線に近づいていき, 極限をとると限りなく一致することが目で見て理解できた. でも, それは限りなく近づいているけれども完全に一致することもないのだとわかった.
- (a5) どんどん直線が接線になるのが興味深かったです. 目でわかるのは楽しいです.

上の感想から, 動画がもたらす視覚効果によって, 接線の意味が理解できただけでなく, 接線を極限と関連付けて理解できるようになり, その結果, 今まで形式的に扱っていた極限のとらえ方が進歩したことが伺える. また, 動画がもたらす視覚効果によって, 学ぶ楽しさも追加されたと考えられる.

指導事例 2.2 については, 平成 24 年度の小テストとアンケートに, 以下のような感想が見られた.

- (b1) 高校のときは, 導関数の求め方などを暗記するだけでイメージを持っていなかったが, 今回, 実際にグラフにしながらやったことによってイメージすることができ, 公式がどのようなことを表わしていたのかを理解するのに役にたった.
- (b2) *Mathematica* を使用することにより, グラフの動きを目できちんと確認することができた. よって, どのような動きをして導関数になるのかということをグラフについて理解することができた. これは, 今までの黒板での数学の授業ではわかりにくく, *Mathematica* を使用した授業だからこそ理解できたと思う.
- (b3) 導関数と言われても, 何をするのかよく理解していなかったが, *Mathematica* を

用いることでイメージしやすく、導関数が正のときに元のグラフが増加し、負のときに減少することがわかった。

(b4) 高校のときは、導関数の求め方などを暗記するだけでイメージを持っていなかったが、今回、実際にグラフにしながらやったことによってイメージすることができ、公式がどのようなことを表わしていたのかを理解するのに役にたった。

(b5) 今まで、導関数は単に微分すればいいもの、単に元の関数の傾きを表したものという認識でしかなかったが、*Mathematica* を用いて動くアニメーションや色の付いたグラフを用いることで、元の関数の変化の様子を表しているもの、機械的に行っていた微分操作は実際にはこんなことをやっていたんだといったことが理解でき、より理解が深まった。

このように、丸暗記していた導関数の公式の意味、また、導関数の役割がわかったので、理解が深まったことがわかる。

また、関数とその導関数のグラフを同一画面上に同時に見せるようにした効果で理解が深まった理由を以下のようにより具体的に述べた記述（平成 22 年度と平成 23 年度）が見られた。

(c1) 高校の頃に習ったグラフでは、増減表を基にして書いているのであまり実感がわかなかったが、*Mathematica* を使用して直接関数と導関数のグラフをかくことで両者の特徴を改めて確認できた。導関数と元の関数の関係はそういうものであることは頭では理解していたが、視覚的に確認できることでより一層導関数との関係が理解できた。

(c2) 原始関数と導関数が正負によって、原始関数の増減に関わるということが視覚的にわかった。導関数をアニメーション化することによって、イメージができるようになった。導関数は微分という解釈から、導関数は元の式との関係を導く関数であることに気付かされました。

(c3) 今まで、関数の導関数がグラフの形（極値など）を決定していることを、頭の中でイメージできていなかったが、今回の *Mathematica* を用いた授業を通して、導関数の振る舞いと関数の振る舞いとの関連性が、アニメーションまたはグラフとして見ることでできたので、理解が深まったと感じた。

また、導関数など、数学そのものに対する学び方が変わり、理解が深まったという以下のような記述（平成 23 年度）もあった。

(d1) 導関数が、元の関数のある点での傾きを示すことを、高校まで習って公式によって問題を解いてきたが、なぜそうなるのかを考えたことはなかった。今回、この授業で、アニメーションによって動きのあるグラフを見ることができ、自分が今まで何を計算していたのかを目で見て理解することができ微分や導関数のイメージが変わった。

(d2) 高校生の頃から、どうして微分や積分という考え方があるのかと疑問に感じていた。解法に関しては教わり問題を解く練習はしてきたが、微分や積分が何を表わしているかまでは教わらなかった。「傾きを求めるには微分をする」「面積を求めるためには積分をする」くらいのことはしか教わらなかった。「なぜ、傾きを求めることができるのか」「なぜ、積分すると面積を求めることができるのか」不思議に思っていた。しかし、今回、この授業を受けて完全に理解できたと自分は感じている。また、数学はおもしろく、まだまだ学んでいきたいと思った。

これら記述に、まさに「実感した気持ち」が込められている。そして全体的な特徴は今まで学習してきた数学的性質に、それなりのイメージが追加され、それが『輝いた』ことで理解が深まったと考えられる。微分法の学習では、「関数の極限」というそれまで培ってこなかったものをイメージする必要がある。例えば、微分法の公式を式の変形だけで「わかった」と理解するにはそれなりのセンスが必要な気がする。しかし、指導事例 2.1 や指導事例 2.2 のように、極限の指導において動画を活用すれば、より多くの学生に、それぞれの学習状況下で「理解が深まった」と思わせる効果が認められる。

3 動画を用いた三角関数の指導に対する考察

ここでは、表 2 にあるように、平成 21 年度、25 年度に学生が最も理解できた『三角関数の性質』について考察する。三角関数は三角比に引き続き、高校 2 年生で三角関数のグラフや加法定理を学習する。学習指導要領解説 ([3]) の第 2 節 数学 II の内容と内容の取扱い (4) 三角関数では、導入にあたり「数学 I」で定義した三角比の拡張になること、また、その周期性を理解させるとあり、その際、回転運動や波動など具体的な事象と関連させ、三角関数の有用性を認識させることが大切とある。

特に、三角関数は公式ばかりが強調されて教えるにいとされる。そこで、三角関数を波動と関連付けて、加法公式や和を積に直す公式の有用性を視覚的に理解させるために、パソコンやソフトウェアの活用を考える ([4],[5] を参照)。

3.1 指導事例 1

三角関数 (i) $\sin(x+t)$ のグラフで、 t の値を変化させるとどのような現象が起きるかを観察させる動画 5 と (ii) $\sin x \cos t$ のグラフで、 t の値を変化させるとどのような現象が起きるかを観察させる動画 6 を活用して、三角関数を図形が動く波動現象と関連付けた。さらに (iii) $\sin(x-t)$ や (iv) $\cos x \sin t$ の動画を問題として作らせた。動画 5 では、 $\sin x$ のグラフが少しづつ左に移動するように描かれる (図 5 は $t=1$ の状況を示す) がこの現象は移動波と呼ばれる波を表す。動画 6 では、 $\sin x$ のグラフが上下に縮小拡大を繰り返す動き (図 6 は $t=1$ の状況を示す) として変化し、点 $x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ が固定される定在波になる。

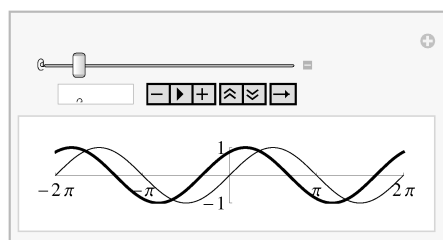


図 5 移動波を示す動画 5

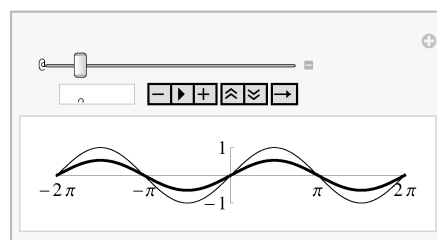


図 6 定在波を示す動画 6

3.2 指導事例 2

2 つの定在波 $\sin x \cos t$ と $\sin x \cos t$ の合成 (和) が導く動画 7 を作らせて、その挙動を観察させた。このとき、点線の定在波と実線の定在波が合成されて、太線の $y = \sin x$ のグラフが左に移動するように観察される (図 7 は $t = 0.5$ の状況を示す)。この挙動

を加法公式

$$\sin x \cos t + \cos x \sin t = \sin x \cos t$$

に関連付けて理解させるようにした。

また、これに追加して和を積に直す公式

$$\frac{1}{2} \sin(x+t) + \frac{1}{2} \sin(x-t) = \sin x \cos t$$

を説明し、この変化を考察させてから、動画 8 を問題として作らせ観察させた。この動画 8 では、 t の値が変化すると、左に移動する点線のグラフと右に移動する実線のグラフの和が太線のグラフを描き（図 8 は $t = 0.5$ の状況を示す）、その結果 $y = \sin x$ の太線のグラフが、高さが全体的に少しずつ低くなっていき、 $-\sin x$ のグラフまで下がる。それから逆に高さが増えていき最初のグラフにもどる繰り返しの挙動が観察される。

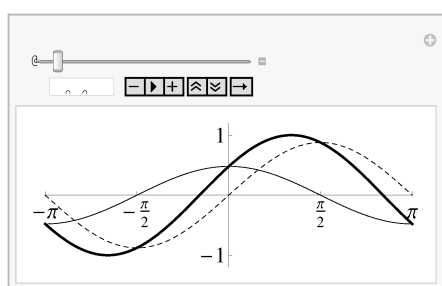


図 7 定在波の合成を示す動画 7

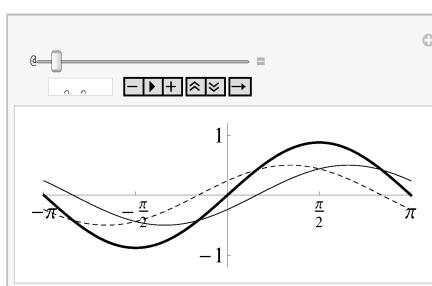


図 8 移動波の合成を示す動画 8

3.3 学生が記述した理解の深まりと考察

学生の理解が深まった理由に、以下のような記述（25 年度）が目立つ。三角関数または三角関数の公式から、始めて体験するような波動現象が産み出されることを知って三角関数の理解が深まったと思われる。

- (a1) いつもと違い波に例えて考えることができたので理解することができました。
- (a2) 三角関数の公式をグラフに表したことにより理解が深まった。
- (a3) 加法定理を用いることで、波が左に動いていくことや上下に動くことをアニメーションを通して確認することができた。
- (a4) 式で見るだけでは見えにくい変化を図で見るとよくわかり、それによって三角関数への理解が深まった。
- (a5) 波の合成をアニメーションで示すとき、イメージしづらいものが多かったが今回試してみてもわかりやすく理解できた
- (a6) t の値を変えるとグラフがそのまま上下左右に動くのはおもしろいと思いました。もっと複雑な式で t の値を変えてみたいと思いました。
- (a7) 三角関数の加法定理なども、目でみることでより深く理解できるようになった気がしました。

また、今までの学びが、視覚的な関連付けによってより理解が深まったことが感じ取れる以下のような記述（平成 21 年度）もある。

- (b1) 暗記して道具として使っていた三角関数の公式（加法定理など）も、*Mathematica* により視覚的に表現することによって、本来の意味を理解することができた。勉強になっ

たというより、楽しいという気持ちが強かった。

(b2) 加法定理は高校の時難しかった記憶があり、*Mathematica* で動くグラフを見て、値の変わりでこんな風にグラフが変わっていくのかと思うことができた。

(b3) 三角関数のグラフの波のようなアニメーションを見ることによって、 $\sin$ と $\cos$ の関係がイメージしやすくなった。

(b4) $\sin$ 波や $\cos$ 波を実際にパソコンの画面で見ることにより、微分、積分の公式だけでなく、なぜ、そうなるのかという波の性質を知ることができた。

(b5) 加法定理はただ暗記するものだと思っていたが、*Mathematica* を使って仕組みや原理を理解することができた。

また、フーリエ級数展開に関する以下のような記述（平成 25 年度）もある。一度、他の教科で学習した経験をもつ 2 年生や 3 年生に多く見られた。

(c1) 積や加法定理などは、紙の上にも書いても動かすことができず、経験的（視覚的）な理解ができずにいた。中でもフーリエ級数展開は、この授業で学習しているときにちょうど専門科目でも学習していたので理解がより深まった。

(c2) 三角関数の多項式の場合自分でグラフを描くことは難しいので、*Mathematica* を用いることでより簡単に関数の形を理解することができました。

(c3) フーリエ級数展開が授業を聞いただけではわからなかったけど、実際に関数を近似してみても図にすると、いろいろな関数を三角関数で表示できたので理解を深められたと思う。

(c4) 三角関数を足し合わせることにより、進行波や体在波を表せることがイメージ的に理解できるようになった。黒板上では三角関数を足し合わせても決して動かすことはできないので、実際に *Mathematica* で実際にパラメータを動かしてアニメーションで見ることが理解の助けになった。

以上のことから、理解が深まった理由は、(1) 三角関数が波という自然現象と結び付いたり、(2) 学習してきた公式や概念などに視覚的に関連付けが行われて内容そのものが『輝いた』ことによると考えられる。授業者としては、(1) より (2) を期待する向きがあるが、(1) もモチベーションなど、従来の尺度で測れない理解の深まりであると考える。

4 まとめ

今回の考察を通して、例えば、導関数など、極限と結び付く概念や三角関数が複雑に合成される場合のように、グラフの形状がどうなるか、見えにくい、または動きが伴うなど、一般に、イメージしにくい数学に対して、その理解を促すようにソフトウェアを使用すれば、かなりの効果を認めることができる。

学生のアンケート調査による記述から、学生の理解が深まった理由を以下のように考えることができる。(1) 数式だけでイメージできない学生は、その時点で暗記に走り、それ以上理解しようとしめない傾向にあるが、視覚的なイメージのおかげで理解できた部分があり深まりを感じた。(2) 今まで学習してきた数学的な性質に対して、視覚的な関連付けがなされ、それによって理解が深まったと感じた。

どちらも、数学のイメージ化によって理解が改善された結果である。

理解の深まりという観点から述べると、b や c (2.3 と 3.3) で表示される記述で述べられる理解の深まりに対して、誰もがそのまま深まりを認めることができる。一方、a (2.3 と 3.3) にある記述 に対しては、学生はイメージすらなかったものにイメージが追加されたので理解が深まったと感じてこのように回答したと思われるが、イメージの追加だけでは数学的に理解が深まったとは言えないという考え方もある。

高橋 ([2]) は数学教育において求められているコンピュータ利用について、グラフィックによる教育活動の支援のほかに、「数学における実験的作業」をあげている。また、山本 ([6]) は「数学実験」の有効性を説いている。このような視点に立てば a で述べられる理解の深まりも、数学的活動の結果であり評価されてもよい。

数学のよさは、論理的に結論を導き出せることでありそのための手法を学習するのが本筋である。しかし、2.3 の a3, a4 や c また 3.3 で記される多くの理解の深まりは通常の教え方で達成するのは難しい。むしろ、このような理解ができてこそ、数学のよさ、演繹手法のよさを味わえることもある。また、2.3 の a5, d2, 3.3 の a6, b1 にあるように、テクノロジーを活用することで、数学の楽しさや面白さそして数学をもっと学びたいという力を引き出させることも可能である。

近年、アクティブ・ラーニングに象徴されるように、数学をもっと学びたい、理解を深めたい、何かと結び付けたいと主体的に働く力は、数学的活動と結び付いて増々重要になっているが、視覚的に関連付けられた数学的性質の理解はこれらの力をより育むと考えている。

参考文献

- [1] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦: テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997.
- [2] 高橋正, 数式処理システムの数学教育への応用, 数式処理 J.JSSAC, Vol 6, No 4, 2-17, 1998.
- [3] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版 (第2版), 2010.
- [4] 山本修一, 深石博夫, 動くグラフによる視覚から入る数学の授業実践 - Web 教材と MathReader を利用して -, 数学教育学会誌, 臨時増刊, 秋季例会論文集, 130-132, 2004.
- [5] 山本修一, Mathematica を活用する数学教育 - 数学的性質の視覚的に関連付けられた理解の上に -, 日本大学理工学部一般教育教室彙報, 第 82 号, 15 - 25, 2007.
- [6] 山本芳彦, 数学実験入門, 岩波書店, 2000.