

非線形安定論とその応用

原研 藤村 薫 (Kaeru Fujimura)

1. はじめに

2D 定常平行流に加えられた擾乱の時間的消長を考へる。擾乱振幅が無限小の極限では擾乱間 α 非線形相互作用を無視することができるので、擾乱を Fourier 分解した場合各モードを記述する方程式は 1 自由度系に帰着できる。逆に擾乱振幅が有限の場合には擾乱方程式の非線形性のため Fourier mode に対する方程式は閉じることがない。この無限自由度系をある条件の下に有限小数自由度系に reduce し、解の性質、とくに擾乱振幅の時間発展と平衡状態を調べるこれが流れの非線形安定論の課題である。

本稿では、今日まで、とりわけ過去 30 年間にわたり急速に進展してきた非線形安定論の歴史をごく大雑把に振り返り、さらに非線形論の応用例として、鉛直平板間自然対流における擾乱の高調波共鳴に対する解析を簡単に紹介する。

2. 非線形安定論の進展

取り扱う問題を明確にするため, ここで流れ関数 $\psi(x, y, t)$ に対する渦度方程式

$$\partial \Delta \psi / \partial t - J(\psi, \Delta \psi) - R^{-1} \Delta^2 \psi = 0, \quad (2.1)$$

から出発しよう。2D 定常平行主流として

$$\partial \bar{\psi} / \partial y = u(y), \quad \partial \bar{\psi} / \partial x = 0, \quad (2.2)$$

を満たす $\bar{\psi}$ を選び, ψ を $\bar{\psi}$ のまわりに摂動する: $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}(x, y, t)$. 擾乱成分 $\hat{\psi}$ は非線形擾乱方程式

$$\frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial x} - u'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}), \quad (2.3)$$

に支配される。ここでいさなり $\hat{\psi}$ を Fourier 分解すると,

$$\hat{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(y, t) e^{in\alpha x}, \quad \Phi_{-n} = \Phi_n^*, \quad (2.4)$$

各 Fourier 成分 Φ_n は

$$[\partial_t S_n + in\alpha u S_n - in\alpha u'' - R^{-1} S_n^2] \Phi_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J(\Phi_m, S_{n-m} \Phi_{n-m}), \quad (2.5)$$

から明らかたように有限自由度で閉じることはできない。こ

こに $S_n \equiv \partial^2 / \partial y^2 - n^2 \alpha^2$.

言うまでもなく (2.3) 式又は (2.5) 式で右辺を左辺に比へて無視し, $\Phi_n(y, t) = \phi_n(y) e^{-in\alpha c t}$ と置くことにより, ϕ_n に対する Orr-Sommerfeld 方程式

$$[i\alpha(u-c)S_n - i\alpha u'' - R^{-1} S_n^2] \phi_n = 0, \quad (2.6)$$

が得られる。 ϕ_n に同次境界条件, 例えば $y = \pm 1$ で $\phi_n = \phi_n' = 0$

が課せられ, (2.6) はこの BCs の下に線形固有値問題を構成する。これを解くことにより, 与えられた α に対 ($\text{Im } c = 0$ とする) 分岐点 (中立 Reynolds 数) $R = R_c$ が求まる。

多数自由度系あるいは無限自由度系を分岐点近傍において少数自由度系へ reduce する方法として, 分岐理論では Liapunov-Schmidt reduction や center manifold 法が知られており, これらの方法で reduction を行った後, さらに従属変数の非線形変換により方程式を取り扱い易い normal form に reduce し, 分岐特性を調べてゆくのが, 分岐理論における一般的解析手順である。これについては岡本久氏によって本講究録で詳細に議論されているので, ここでは流れの安定論の分野で独自に発展してきた弱非線形理論に焦点を絞る。

弱非線形理論において歴史的にみても最も中心的役割を果たしてきたのは, 1944年に Landau によって物理的考察から導入された擾乱振幅に対する方程式 (Landau 方程式, または Stuart-Landau 方程式)

$$dA/dt = \lambda_1 A + \lambda_2 |A|^2 A + \dots, \quad (2.7)$$

である。Landau は線形増幅率が位相速度に比べて十分小さく, 擾乱振幅も十分小さい状況を考え, 振幅の時間変化が $|A|^2$ のべき級数に展開できることを示唆した。さらに (2.7) を 3 次まで打ち切ると, $\text{Re } \lambda_2 < 0$ の場合 supercritical 分岐が,

$\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ のとき subcritical 分岐が得られることを示している。

非線形理論の最も飛躍的進展を遂げたのは、1960年の Stuart と Watson による Landau 方程式の導出に因っている。Stuart は線形増幅率を微小パラメータとみなし、さらに (振幅)² と増幅率を同一オーダーとすることにより、(増幅率)⁻¹ という長時間にわたる擾乱振幅の振舞いが (2.7) 式で記述できることを Navier-Stokes 方程式から矛盾なく示すことに初めて成功した。Stuart の成果を受けて共同研究者であった Watson は、(2.7) を最初から仮定して各モードを $|A|^2$ で展開した場合、(2.7) に含まれる全ての係数が厳密に決定できることを示した。

その後 Stuart の増幅率展開は Stewartson & Stuart や Eagles によって多重尺度法を用いて整備され、また Watson の振幅展開は Herbert や Sen & Venkateswarulu によって改良されて今日に到っている。最近ではこれら両振動展開間の等価性や Center manifold 法と Stuart-Watson 理論の間の等価性なども明らかにされてきているが、この辺りの関係を Fig. 1 に説明するために示した。紙面の都合上これ以上詳細に言及することはできないので、詳細については例えば藤村、水島、後藤；後藤；Crack などを参照して頂きたい。

ところで、以上に説明した弱非線形理論では展開の基礎が線形段階(2.6)である。 (2.6) 式では良く知られているように、 $U=c$ とする点 $y=y_c$ を中心とした非粘性特異性は高 Reynolds 数下の粘性項によって抑えられるという粘性臨界層が中心的役割を果たしている。ここで、非線形性の寄与は粘性の影響より十分小さいことが前提条件となっている。 Lin & Benney はこれとは全く逆の状況を考えた。即ち非線形性が非粘性特異性を抑えており、粘性の影響は非線形性より十分小さく高次の寄与として扱われるといういわゆる非線形臨界層の概念を導入したのである。彼らの考えは 1969 年に Benney & Bergeron と Davis によって独立に非線形臨界層理論として確立され、現在では Stuart-Watson 理論と好対となっている。さて、free shear layer での流れで擾乱の空間発展を考えると、擾乱は最初線形増幅を行い、粘性臨界層に基づく弱非線形段階を経験した後、非線形臨界層に支配される regime に突入して振幅が平衡値に達する。この複雑な過程(粘性臨界層や非線形臨界層の各々自体が決して単純ではないので、その一方から他方への移行は複雑をさめめる)を matched asymptotic expansion を用いて接続するという非常に大規模な解析手法が Goldstein を中心とするグループで最近確立されていることを指摘して、弱非線形論の応用例に移りたい。

3. 鉛直平板間自然対流における高調波共鳴

$X = \pm L$ におかれた 2 枚の無限に広い平板に挟まれた流体層を考へる。2 平板が各々一様温度 $T_0 \pm \delta T$ に保たれている場合、温度差によつて自然対流が誘起される。本節ではこの自然対流中の擾乱の高調波共鳴を取り扱う。流体運動を $x-z$ 平面内の 2D 運動に限定する。流れ関数と温度の擾乱成分 $\hat{\psi}(x, z, t)$ と $\hat{T}(x, z, t)$ は各々次の非線形擾乱方程式及び境界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + W \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial z} - W'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - G^{-1} \Delta \hat{\psi} + G^{-1} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}), & (3.1) \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + W \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} - (PG)^{-1} \Delta \hat{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = J(\hat{\psi}, \hat{T}), & (3.2) \end{cases}$$

$$\hat{\psi} = \partial \hat{\psi} / \partial x = \hat{T} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm 1, \quad (3.3)$$

によつて支配される。ここには $W(x) \equiv x(1-x^2)/6$ は主流場であり、対応する温度分布は $T = x$ である。また $G = \frac{\gamma g L^3 \delta T}{\nu^2}$ は Grashof 数、 $P = \nu/K$ は Prandtl 数であり、 γ は熱膨張係数、 g は重力加速度、 ν は動粘性率、 K は熱伝導率である。

(3.1) - (3.3) 式に対応する線形問題は従来詳細に検討されてきたが、ここでは 3 種類の P の値に対する中立安定曲線を Fig. 2 に示した。図中、実線は定在波擾乱に対する中立安定曲線と、破線は伝播波擾乱に対する中立曲線を意味する。伝播波擾乱としては、同一位相速度を有し $\pm z$ 方向に伝播する波の対が同時に可能となる。さて、 $P=0$ の曲線 (定在波) 上

波数比 1:2 の共鳴が厳密に生ずる 2 点を +印で示した。この共鳴についてはすでに Fujimura & Miyashima が $P \rightarrow 0$ の極限である程度の解析を行っているが、如何なる P の値に対してもこの共鳴は厳密に存在し得る。ここでは Prandtl 数の影響を調べると共にさらに詳細な議論を行っている。 $P = 33.98985$ に対しては波数比 1:1:2 の共鳴が伝播波と定在波間に起るが、その点を ⊕印で示した。最後に $P = 17.99491$ に対して波数比 1:1:2:4 の共鳴が伝播波と定在波間で可能であるが図中には *印でその点を示してある。

紙面の都合上、以上の場合に対する振幅方程式の導出法を書くことができないので、多重尺度法を用いた弱非線形摂動展開を行うことにより得られた結果だけを以下に示す。

1:2 共鳴の場合、基本波の振幅を A_1 、第 1 高調波の振幅を A_2 とおくと、 A_1, A_2 の時間発展は

$$\begin{cases} dA_1/dt = [\varepsilon(\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^{(1)}) + \delta\beta_1] A_1 + [\lambda_{-12} + \varepsilon\lambda_{-12}^{(1)}] A_1^* A_2 \\ \quad + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} dA_2/dt = [\varepsilon(\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^{(1)}) + \delta\beta_2] A_2 + [\lambda_{11} + \varepsilon\lambda_{11}^{(1)}] A_1^2 \\ \quad + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2, \end{cases} \quad (3.5)$$

で記述される。ここに $\varepsilon \equiv G_0^{-1} - G^{-1}$, $\delta = \alpha - \alpha_0$ であり、 $(\alpha, G) = (\alpha_0, G_0)$ として Fig. 2 + 印の基本波側の値をとる。(3.4), (3.5) では分岐パラメータ ε , δ のどのような形で方程式の係数に

含まれる α を示した $T=0$ 、以下で簡単に

$$\begin{cases} dA_1/dt = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1, & (3.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_2/dt = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2, & (3.7) \end{cases}$$

の形を用いる。

1:1:2 共鳴の場合も同様で、 A_1 と A_2 を 1 対の伝播波擾乱の振幅、 A_3 を定在波擾乱の振幅とすると、

$$\begin{cases} dA_1/dt = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1, & (3.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_2/dt = \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2, & (3.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_3/dt = \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3, & (3.10) \end{cases}$$

また、1:1:2:4 共鳴の場合では 1 対の伝播波振幅を A_1, A_2 、波数比 2:4 の関係にある定在波の振幅を A_3, A_4 とおくと、

$$\begin{cases} dA_1/dt = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 \\ \quad + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1 + \lambda_{-441} |A_4|^2 A_1 + \lambda_{-2-34} A_2^* A_3^* A_4, & (3.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_2/dt = \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 \\ \quad + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2 + \lambda_{-442} |A_4|^2 A_2 + \lambda_{-1-34} A_1^* A_3^* A_4, & (3.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_3/dt = \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2 + \lambda_{-34} A_3^* A_4 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 \\ \quad + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3 + \lambda_{-443} |A_4|^2 A_3 + \lambda_{-1-24} A_1^* A_2^* A_4, & (3.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA_4/dt = \lambda_4 A_4 + \lambda_{33} A_3^2 + \lambda_{-114} |A_1|^2 A_4 + \lambda_{-224} |A_2|^2 A_4 \\ \quad + \lambda_{-334} |A_3|^2 A_4 + \lambda_{-444} |A_4|^2 A_4 + \lambda_{123} A_1 A_2 A_3, & (3.14) \end{cases}$$

が得られる。ここで Chebyshev 多項式展開を用いることに

よって (3.6) - (3.14) 式に含まれる全ての係数値を決定した。

(I) 1:2 共鳴 $O(2)$ 直交対称群の作用の下に不変な normal form が求められ、分岐特性に関する非常に詳細な解析が行われている。(Dangelmayr; Dangelmayr & Armbruster; Proctor & Jones; Armbruster, Guckenheimer & Holmes; Okamoto & Taverne)
以下では最も単純な3通りの平衡解を示すにとどめる。

$A_n(t) = a_n(t) e^{i\vartheta_n(t)}$, $n=1, 2$; $\Theta \equiv \vartheta_2 - 2\vartheta_1$ とおくと $da_1/dt = da_2/dt = d\Theta/dt = 0$ を満足する平衡解として以下のものが得られる。

① Pure mode (P): $a_1 = 0$, $a_2^2 = -\lambda_2/\lambda_{-222}$

② Mixed mode (M): $\Theta = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} a_1^2 [\lambda_{11}(-1)^m + \lambda_{-112} a_2] = -[\lambda_2 a_2 + \lambda_{-222} a_2^3], \\ \lambda_{-111} a_1^2 = -[\lambda_1 + \lambda_{-12}(-1)^m a_2 + \lambda_{-221} a_2^2] \end{cases}$$

③ Traveling wave (T):

$$\begin{cases} a_2^2 = (\lambda_2 + 2\lambda_1)\lambda_{11} / [2\lambda_{-112}\lambda_{-12} + 4\lambda_{-111}\lambda_{-12} - \lambda_{11}(2\lambda_{-221} + \lambda_{-222})], \\ a_1^2 = -2\lambda_{-12}a_2^2/\lambda_{11}, \quad \Theta = \cos^{-1}[-(\lambda_1 + \lambda_{-111}a_1^2 + \lambda_{-221}a_2^2)/\lambda_{-12}a_2]. \end{cases}$$

$P = 10^{-5}$, 1, 10 の場合の分岐曲線を Figs. 3-5 に示す。図中実線は安定な平衡解を、破線は不安定な平衡解を意味する。

(II) 1:1:2 共鳴 Hopf 分岐と定常解への分岐が同時に起こる問題について行われている両分岐間の相互作用が調べられ、とくに Taylor-Couette 流の問題において詳細な研究が行われてきた。(Langford; Langford & Iooss; Iooss & Langford; Langford; Golubitsky & Stewart; Golubitsky & Langford)

$A_n = a_n e^{i\vartheta_n}$, $n=1, 2, 3$; $\Theta \equiv \vartheta_3 - \vartheta_1 - \vartheta_2$ とおくと, 平衡解として以下の2種類の容易に求められる。

① Pure mode (P): $a_1 = a_2 = 0$, $a_3^2 = -\lambda_3 / \lambda_{-333}$, 又は

$$a_1^2 = -\lambda_{11r} / \lambda_{-111r}, a_2 = a_3 = 0, \text{ 又は } a_1 = 0, a_2^2 = -\lambda_{22r} / \lambda_{-222r}, a_3 = 0.$$

② Mixed mode (M): $a_1 = a_2$, $\Theta = m\pi$, $m=0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} a_1^2 = -[\lambda_{11r} + \lambda_{-23r}(-1)^m a_3 + \lambda_{-331r} a_3^2] / (\lambda_{-111r} + \lambda_{-221r}), \\ [(\lambda_{-111r} + \lambda_{-221r})\lambda_{-333} - 2\lambda_{-113r}\lambda_{-331r}] a_3^3 \\ - [\lambda_{12}(-1)^m \lambda_{-331r} + \lambda_{-113r}\lambda_{-23r}(-1)^m] a_3^2 \\ + [(\lambda_{-111r} + \lambda_{-221r})\lambda_3 - (\lambda_{12}\lambda_{-23r} + 2\lambda_{-113r}\lambda_{11r})] a_3 - \lambda_{12}\lambda_{11r}(-1)^m = 0. \end{cases}$$

なお, $a_1 \neq a_2$ の $a_1 a_2 \neq 0$ というモードについては, 乱数 ε initial guess として用いた Newton 法による数値計算を行って組織的に搜した。現在までのところ3モード, 7モード, 得られた分岐曲線を Fig. 6 に示す。

(Ⅲ) 1:1:2:4 共鳴 $A_n = a_n e^{i\vartheta_n}$, $n=1, 2, 3, 4$, $\Theta_1 \equiv \vartheta_4 - \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3$,

$\Theta_2 \equiv \vartheta_3 - \vartheta_1 - \vartheta_2$, $\Theta_3 \equiv \vartheta_4 - 2\vartheta_3$ とおくと以下の4つモードが可能である。

① Pure mode (P): $a_1^2 = -\lambda_{11r} / \lambda_{-111r}$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ 又は $a_2 \neq 0$, $a_1 = a_3 = a_4 = 0$.

② Pure mode (P2): $a_4 \neq 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ [(I) ① と同-]。

③ Mixed mode (M2): $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$ [(I) ② と同-]。

④ Traveling wave (T2): $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_4 \neq 0$, $\Theta_3 \neq m\pi$, $m=0, 1, 2$ [(I) ③ と同- モード]。

⑤ Symmetric mixed mode (M)

$$a_1 = a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, a_4 \neq 0, \phi_1 = k\pi, \phi_2 = m\pi,$$

⑥ Traveling wave (T)

$$a_1 \neq a_2, a_1, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, a_4 \neq 0, \phi_1 \neq k\pi, \phi_2 \neq m\pi.$$

なお、⑤、⑥に陽に解を表現することかできていない。ここでは Newton 法を用いた数値計算により対応する解を求め、それらの安定性を調べた。得られた分岐曲線を Figs. 7-10 に示す。非対称 ($a_1 \neq a_2$) な Mixed mode は現在までひとつも見つかっていない。

4. まとめ

本稿では流れの非線形安定論の歴史的進展を概観し、弱非線形理論の応用例として鉛直平板間自然対流における高調波共鳴の解析を簡単に紹介した。この自然対流系では異なる3種類の共鳴、即ち波数比1:2の定在波間共鳴、1:1:2の伝播波/定在波間共鳴、及び1:1:2:4の伝播波/定在波間共鳴が可能である。ここではこれら共鳴時の振幅方程式を示し、その平衡解と安定性を調べ、数値計算結果を分岐曲線として示した。紙面の都合上、2節、3節ともとを足らずの通り、解析の大部分と関連した研究紹介の大部分を割愛せざるを得なかった。ため、分岐理論的アプローチを用いなくてもこのように

豊富な分岐現象を弱非線形漸近理論を用いて記述しようとい
うことをある程度は demonstration することによって示したのではないかと考えている。

最後に Hopf / steady state interaction に関する文献を研究会の折にお教之頂いた岡本久博士に深く感謝致します。

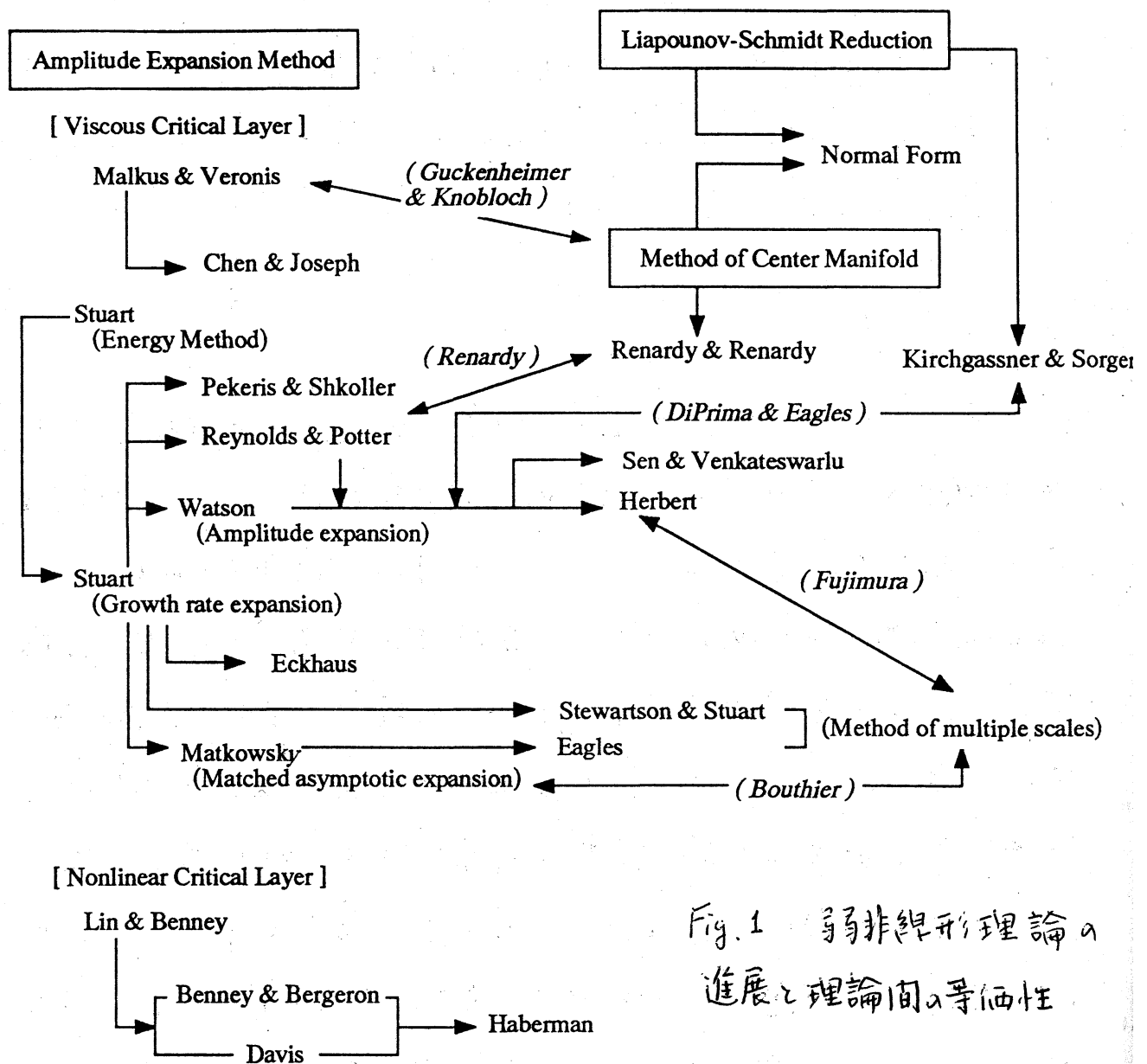


Fig. 1 弱非線形理論の
進展と理論間の等価性

References

- Armbruster, D., Guckenheimer, J. & Holmes, P. 1988 *Physica* 29D, 257
- Benney, D.J. & Bergeron, R.F. 1969 *Stud. Appl. Math.* 48, 181
- Bouthier, M. 1984 *Quart. Appl. Math.* 41, 407
- Chen, T.S. & Joseph, D.D. 1973 *J. Fluid Mech.* 58, 337
- Craik, A.D.D. 1985 *Wave interactions and fluid flows* (Cambridge Univ. Press)
- Dangelmayr, G. 1986 *Dyn. Stab. Systems* 1, 159
- Dangelmayr, G. & Armbruster, D. 1986 *Cont. Math.* 56, 53
- Davis, R.E. 1969 *J. Fluid Mech.* 36, 337
- DiPrima, R.C. & Eagles, P.M. 1977 *Phys. Fluids* 20, 171
- Eagles, P.M. 1973 *J. Fluid Mech.* 57, 149
- Fujimura, K. 1989 *Proc. R. Soc. Lond.* A424, 373
- Fujimura, K. & Mizushima, J. 1987 in *Nonlinear wave interactions in Fluids* ed. Miksad, R.W., Akylas, T.R. & Herbert, T. AMD-Vol.87, 123
- Fujimura, K., Mizushima, J. & Gotoh, K. 1985 *Nagare* 4, 213 [in Japanese]
- Goldstein, M.E. & Leib, S.J. 1988 *J. Fluid Mech.* 191, 481
- Goldstein, M.E. & Leib, S.J. 1989 *J. Fluid Mech.* 207, 73
- Goldstein, M.E. & Leib, S.J. 1989 *J. Fluid Mech.* 207, 97
- Golubitsky, M. & Langford, W.F. 1988 *Physica* 32D, 362
- Golubitsky, M. & Stewart, I. 1986 *SIAM J. Math. Anal.* 17, 249
- Gotoh, K. 1986 in *Sciences of turbulent phenomena* (Univ. Tokyo Press) [in Japanese]
- Guckenheimer, J. & Knobloch, E. 1983 *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 23, 247
- Haberman, R. 1972 *Stud. Appl. Math.* 51, 139
- Herbert, T. 1980 *AIAA JI* 18, 243
- Herbert, T. 1983 *J. Fluid Mech.* 126, 167
- Iooss, G. & Langford, W.F. 1980 *Annals NY Acad. Sci.* 357, 489
- Kirchgässner, K. & Sorger, P. 1969 *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 22, 183
- Landau, L.D. 1944 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 44, 339
- Langford, W.F. 1979 *SIAM J. Appl. Math.* 37, 22
- Langford, W.F. 1983 in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* ed. Barenblatt, G.I., Iooss, G. & Joseph, D.D. (Pitman) 215
- Langford, W.F. & Iooss, G. 1980 in *Bifurcation problems and their numerical solutions* ed. Mittelman, H.D. & Weber, J. (Birkhauser) 103
- Leib, S.J. & Goldstein, M.E. 1987 *Bull. APS Meeting* FD3
- Lin, C.C. & Benney, D.J. 1964 in *Proc. XIth Intl. Congr. Appl. Mech.* ed. by Görtler, H. (Springer) 797
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 *J. Fluid Mech.* 4, 225
- Matkowsky, B.J. 1970 *SIAM J. Appl. Math.* 18, 872
- Okamoto, H. & Tavener, S.J. 1990 preprint
- Pekeris, C.L. & Shkoller, B. 1969 *J. Fluid Mech.* 39, 629
- Proctor, M.R.E. & Jones, C.A. 1988 *J. Fluid Mech.* 188, 301
- Renardy, Y. 1989 *Phys. Fluids* A1, 1666
- Renardy, M. & Renardy, Y. 1988 *Physica* 32D, 227
- Reynolds, W.C. & Potter, M.C. 1967 *J. Fluid Mech.* 27, 465
- Sen, P.K. & Venkateswarlu, D. 1983 *J. Fluid Mech.* 133, 179
- Stewartson, K. & Stuart, J.T. 1971 *J. Fluid Mech.* 48, 529
- Stuart, J.T. 1958 *J. Fluid Mech.* 4, 1
- Stuart, J.T. 1960 *J. Fluid Mech.* 9, 353
- Watson, J. 1960 *J. Fluid Mech.* 9, 371

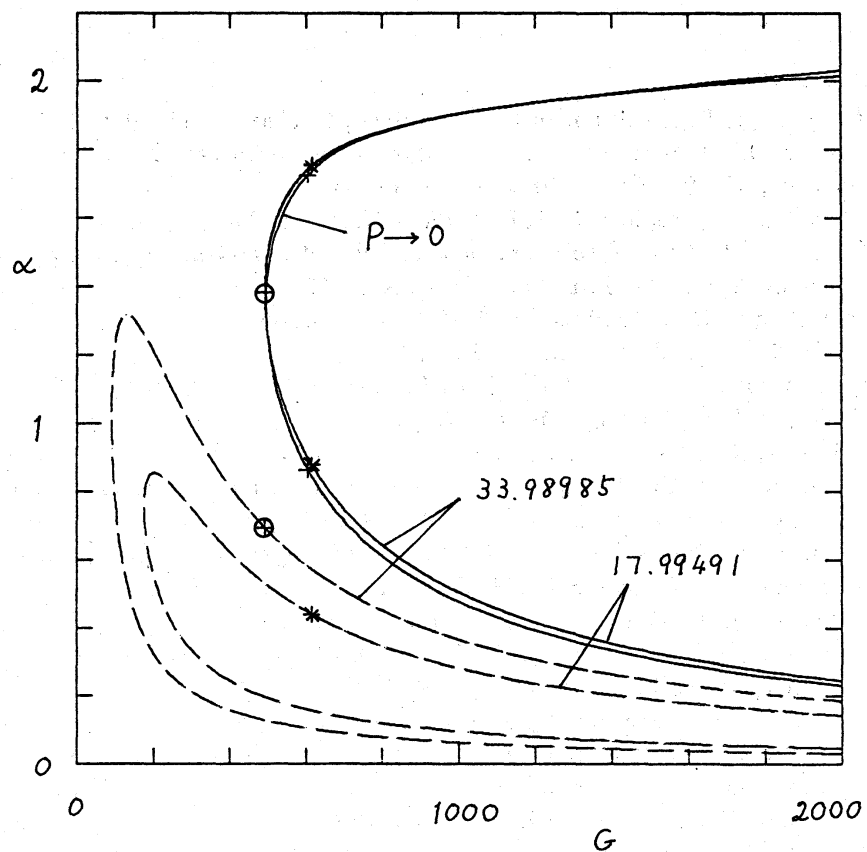


Fig. 2 中立安定曲線と3種類α共鳴条件

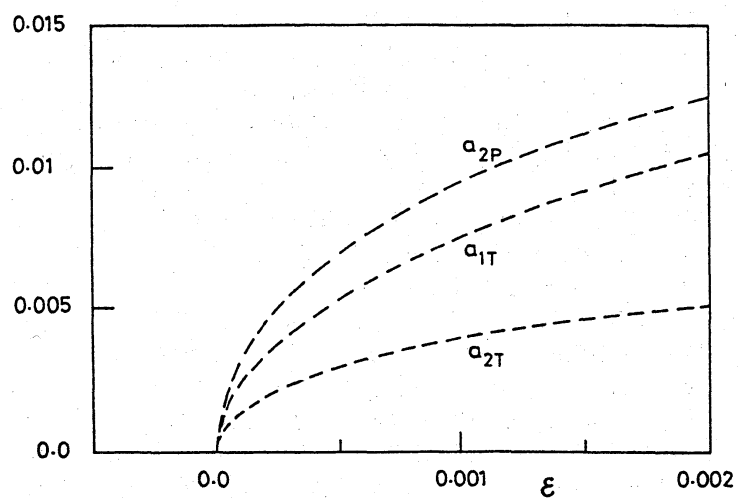


Fig. 3 1:2共鳴α/分岐曲線. $P=10^{-5}$

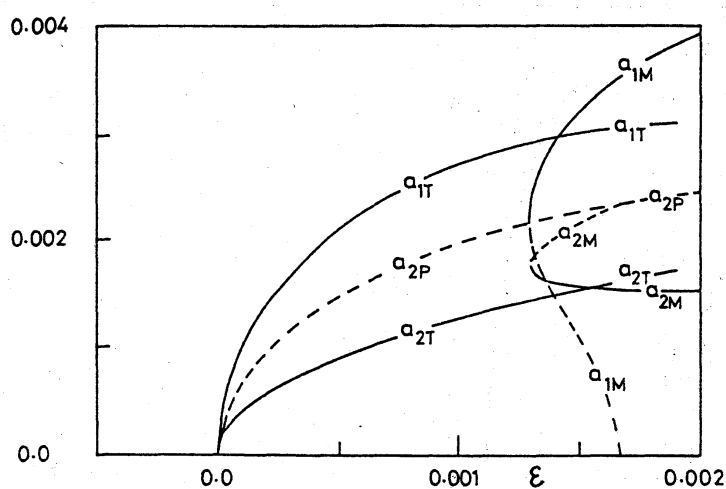


Fig. 4 1:2 共鳴 \$\alpha\$ 分岐曲線, $p=1.0$

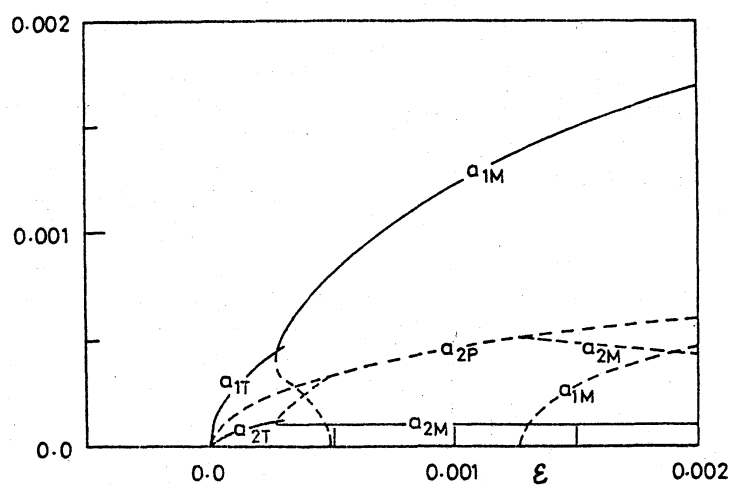


Fig. 5. 1:2 共鳴 \$\alpha\$ 分岐曲線, $p=1.0$.

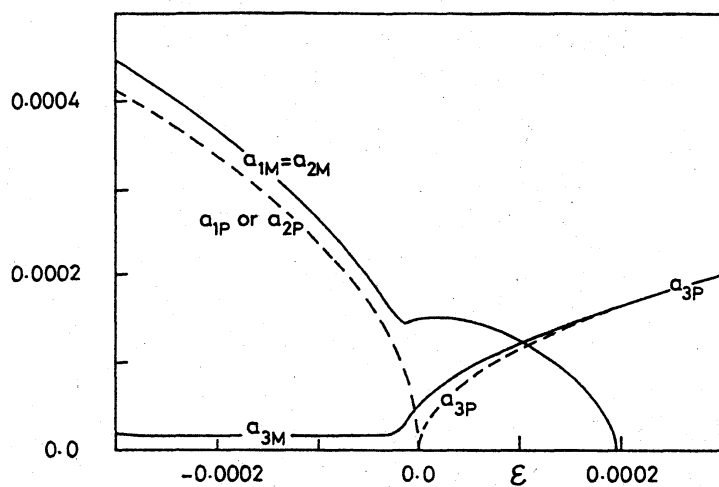


Fig. 6 1:1:2 共鳴 \$\alpha\$ 分岐曲線

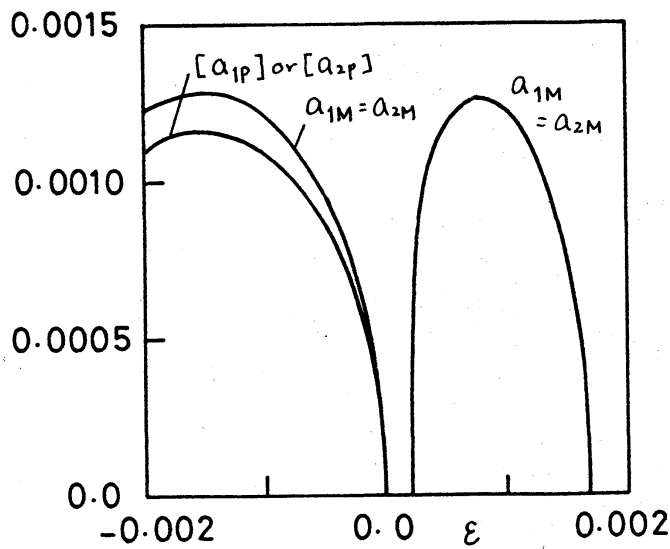


Fig. 7. 1:1:2:4 共鳴の
分岐曲線. []内は不安定平衡解,
それ以外は安定平衡解

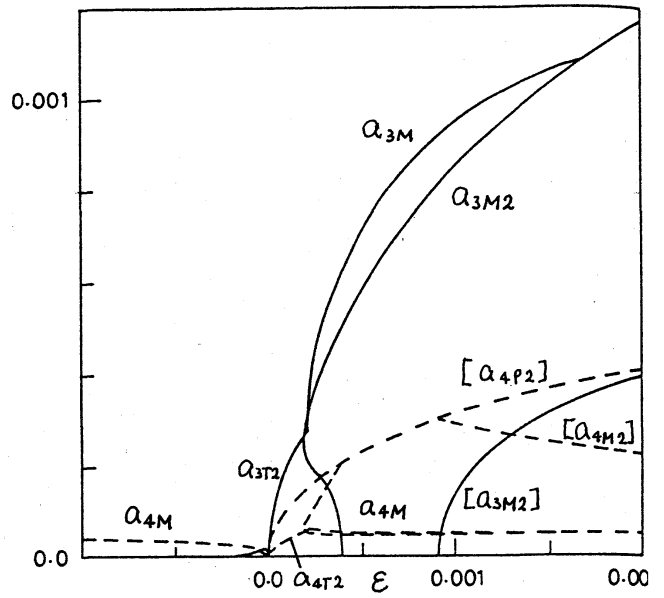


Fig. 8. Fig. 7 に対応
する a_3, a_4 の平衡解

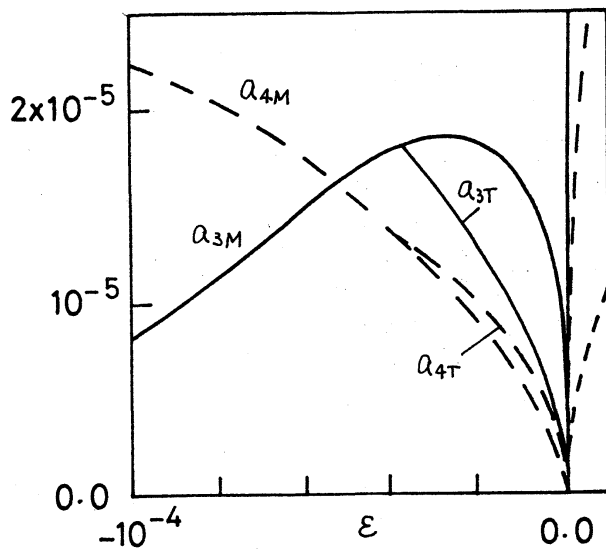


Fig. 9
Fig. 8 の拡大図

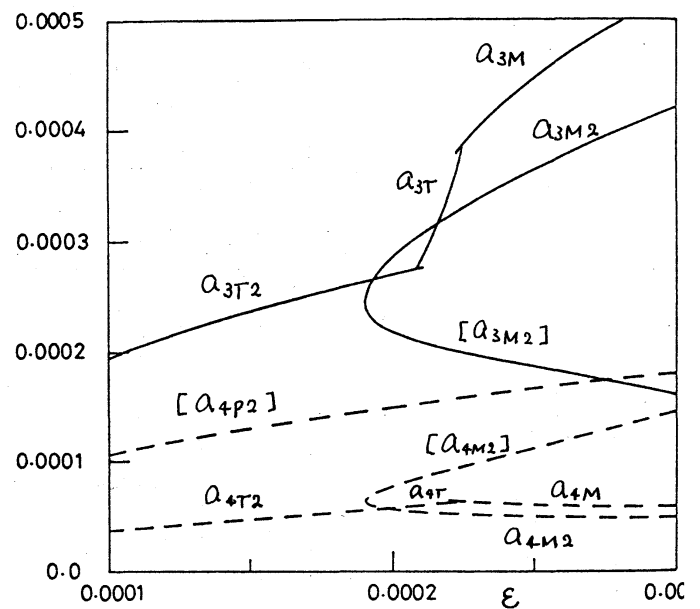


Fig. 10
Fig. 8 の拡大図