

ファレイ分数のべき和の漸近展開について

九大数理 (D3)

吉元 昌己 (Masami Yoshimoto)

本稿は、ファレイ分数のべき和の漸近展開をこれまでに知られていたものよりも更に詳しい誤差項まで求めた結果を示すものである。

位数 $[x]$ のファレイ分数を、 $(0, 1]$ 区間の既約分数列で分母の大きさが x 以下のものを小さい順に並べ直したもので定義し、その集合を F_x とする：

$$F_x := \{ p_v = a_v/c_v \mid 1 \leq a_v \leq c_v \leq x, (a_v, c_v) = 1 \}.$$

以下 p_v は位数 $[x]$ のファレイ分数とする。

$\Phi(x)$ をオイラー函数 $\phi(m)$ の、 $M(x)$ をメービウス函数 $\mu(m)$ の和函数とする：

$$\Phi(x) := \sum_{n \leq x} \phi(n), \quad M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

このとき F_x の定義より

$$\#F_x = \Phi(x) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + E(x),$$

$$\text{ここで} \quad E(x) = \begin{cases} O(x \log x) & (\text{Mertens}) \\ O(x (\log x)^{2/3} (\log \log x)^{4/3}) & (\text{Walfisz}) \end{cases}$$

が成立する。

記号

$z \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{N}$ とする。

$$S_z(x) := \sum_{m \leq x} M\left(\frac{x}{m}\right) \frac{1}{m^z} = \sum_{m \leq x} \mu(m) \sum_{n \leq x/m} \frac{1}{n^z}.$$

特に $S_0(x) = 1$, $S_{-1}(x) = \Phi(x)$ 。

$$U_z^{(R)}(x) := \sum_{m \leq x} \overline{B}_R\left(\frac{x}{m}\right) \frac{\mu(m)}{m^z},$$

ここで $B_R(x)$ は R 次のベルヌーイ多項式, $\overline{B}_R(x) = B_R(x - [x])$ は周期的 R 次ベルヌーイ多項式。特に $U(x) = U_1^{(1)}(x)$ 。

$\operatorname{Re} z > 1$ のとき,

$$C_z^{(R)}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_R\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\mu(n)}{n^z}.$$

また

$$\begin{aligned} D(x) &:= \sum_{n \leq x} \overline{B}_1\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{x}{n} \\ &= O(\log^2 x) \quad (\text{trivially}). \end{aligned}$$

以下簡単の為、 $A > 0$ を計算可能な絶対定数とし、 $\delta(x)$ を

$$\delta(x) = \delta_A(x) := \exp(-A(\log x)^{0.6} (\log \log x)^{-0.2})$$

とする。このとき、素数定理と $M(x) = O(x\delta(x))$ は同値。また

$\Phi(x)$ の残余項 $E(x)$ は

$$E(x) = -xL(x) + O(\delta(x))$$

と表わすことができる。

本稿の目的である漸近展開については、以下のニコラスの結果が知られている：

Known results ([Mik1], Thm 3; [Mik2], Thms 3, 4).

$$(i) \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} p_{\nu}^{-\lambda}$$

$$= \begin{cases} \frac{\Phi(x)}{1-\lambda} + O(x \exp(-c(\log x)^k)) & \text{if } \lambda < 0 \\ & (\frac{1}{2} < k < \frac{11}{21}) \\ \frac{\Phi(x)}{1-\lambda} + \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} x^{1+\lambda} + O(x) & \text{if } 0 < \lambda < 1 \\ \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} - \frac{3}{\pi^2(\lambda-1)} x^2 + O(x^{\lambda}) & \text{if } 1 < \lambda < 2 \\ \frac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} + O(x^{\lambda}) & \text{if } \lambda \geq 2. \end{cases}$$

$$(ii) \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} p_{\nu}^{-1} = \frac{x^2}{2\zeta(2)} \left\{ \log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right\} + O(x \log^2 x),$$

ここで γ はオイラ一定数。

上の結果に対し、素数定理とワルフィスの方法及び結果を用いることで、更に小さな誤差項まで求めることができる。

定理 1. $z \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{N}$ とする。このとき $\operatorname{Re} z \neq 1$ ならば

$$\mathcal{U}_z^{(R)}(x) = \begin{cases} C_z^{(R)}(x) & \text{if } \operatorname{Re} z > 1 \\ 0 & \text{if } \operatorname{Re} z < 1 \end{cases} + O(x^{1-\operatorname{Re} z} \delta(x)),$$

また $\operatorname{Re} z = 1$ の場合

$$\mathcal{U}_z^{(R)}(x) = O((\log x)^{2/3} (\log \log x)^{4/3})$$

が成立する。

定理 2.

(i) $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ とする。このとき

$$\begin{aligned} S_z(x) = & \begin{cases} 0 & \operatorname{Re} z > 0 \\ \frac{x^{1-z}}{(1-z)\zeta(1-z)} & \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} 0 & \operatorname{Re} z \geq -1 \\ \sum_{r=1}^{\ell} \frac{(-1)^r}{r} \binom{-z}{r-1} C_{1-z-r}^{(r)}(x) x^{1-z-r} & \operatorname{Re} z < -1 \end{cases} \\ & - \begin{cases} 0 & -\operatorname{Re} z \notin \mathbb{N} \\ \frac{(-1)^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \binom{-z}{-\operatorname{Re} z-1} x^{1-i\operatorname{Im} z} \mathcal{U}_{1-i\operatorname{Im} z}^{(-\operatorname{Re} z)}(x) & -\operatorname{Re} z \in \mathbb{N} \end{cases} \\ & + O(x\delta(x)), \end{aligned}$$

ここで

$$\ell = -[\operatorname{Re} z] - 1.$$

$$(ii) -S'_{-1}(x) = \sum_{m \leq x} M\left(\frac{x}{m}\right) m \log m$$

$$= \frac{x^2}{2\zeta(2)} \left\{ \log x - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right\} - xD(x) + O(x\delta(x)).$$

定理3 (Main Theorem)

(i) $z \in \mathbb{C}, \neq 0, 1$ とする。このとき

$$\sum_{v=1}^{\Phi(x)} p_v^z = \frac{\Phi(x)}{1+z}$$

$$+ \begin{cases} 0 & \operatorname{Re} z > 0 \\ \frac{\zeta(-z)}{(1-z)\zeta(1-z)} & \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 0 & \operatorname{Re} z \geq -1 \\ \zeta(-z) \sum_{r=1}^{\ell} \frac{(-1)^r}{r} \binom{-z}{r-1} C_{1-z-r}^{(r)}(x) x^{1-z-r} & \operatorname{Re} z < -1 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 0 & -\operatorname{Re} z \notin \mathbb{N} \\ \zeta(-z) \frac{(-1)^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \binom{-z}{-\operatorname{Re} z - 1} x^{1-i\operatorname{Im} z} \bigcup_{1-i\operatorname{Im} z}^{(-\operatorname{Re} z)}(x) & -\operatorname{Re} z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$+ O(x\delta(x)),$$

ここに

$$\ell = -[\operatorname{Re} z] - 1.$$

$$(ii) \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{p_{\nu}} = \frac{x^2}{2\zeta(2)} \left\{ \log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right\} - xD(x) - \gamma xU(x) + O(x\delta(x)).$$

定理 4.

$$\begin{aligned} D(x) &= U(x) \log x + O((\log x)^{4/3} (\log \log x)^{8/3}) \\ &= O((\log x)^{5/3} (\log \log x)^{4/3}). \end{aligned}$$

系

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{p_{\nu}} = \frac{x^2}{2\zeta(2)} \left\{ \log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right\} + O(x(\log x)^{\frac{5}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}).$$

参考文献

- [K-K-Y] S. Kanemitsu, T. Kuzumaki and M. Yoshimoto,
Some sums involving Farey fractions II,
to appear.
- [Mik 1] M. Mikołás, Farey series and their connection
with the prime number problem I, Acta Sci.
Math. (Szeged) 13 (1949), 93-117.
- [Mik 2] _____, _____ II, _____ 14 (1951), 5-21.

[Wal] A. Walfisz, Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.