

Nash 均衡型防御配置問題

徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部 宇野 剛史 (Takeshi Uno)

Institute of Socio-Arts and Sciences, the University of Tokushima

広島大学大学院工学研究科 片桐 英樹 (Hideki Katagiri)

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

広島工業大学情報学部 加藤 浩介 (Kosuke Kato)

Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology

1 はじめに

防御配置問題は競合環境下での最適配置問題の一つであり、防御者と侵略者と呼ばれる 2 種類の意思決定者 (DM) 間の競合を扱っている。侵略者が「主要点」と呼ばれる防御者にとって重要な地点に移動するのを防ぐために、防御者は侵略者が通過する際にそのエネルギーを低減可能な防御施設を配置する。防御配置問題の例として、「ある国の政府が主要都市への侵略者の侵攻を防ぐために防衛基地を配置する問題」や「クラッカーから機密情報を守るためにセキュリティを高めるネットワーク内の要所を定める問題」などが挙げられる。Uno と Katagiri [7] は、配置領域をグラフで表し、その中の 1 点を主要点と定め、防御者および侵略者を各々上位および下位 DM とみなすことで、2 レベル施設配置問題として定式化した。問題の概要を図 1 に挙げる。また、Uno と Kato [8] は、侵略者の初期位

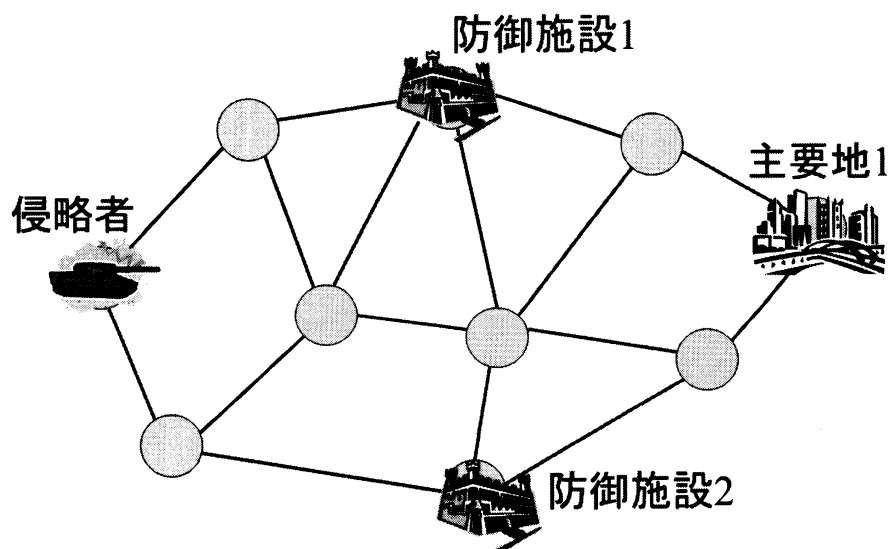


図 1: 防御配置問題の例

置及びエネルギーを確率変数で表した確率防御配置問題に拡張した。

上記の防御配置問題において、侵略者はすべての主要点に対してエネルギーを均等に配分すると仮定されている。本研究では、侵略者は主要点への侵略ルートを決める前に、エネルギー配分を決めることができると仮定する。配分の決定が防御施設の配置と同時であるとき、防御者から見た防御配置問題における最適解を、侵略者との間における Nash 均衡で表すことにする。このとき、提案する防御配置問題は、各 DM の目的関数が主要点の数だけ存在する 2 人多目的 Nash 均衡型ゲームとして定式化される。なお、ゲーム理論の詳細については、西田 [5] の書籍が参考になる。

多目的計画問題では一般にすべての目的関数を最適にする解は存在しないことから、これらを総合的に評価する必要がある。本研究では、防御者の判断に生じるあいまい性を考慮したファジィ目標を目的関数毎に与え、すべてのファジィ目標値の重み付き和により防御者及び侵略者の目的関数を統合する。

以上により定式化された問題に対して、問題の特性から防御者・侵略者間におけるミニマックス定理を導く。この定理を用いた問題の解法として、本研究では、Glover [3] によって提案されたタブー探索法を用いる。タブー探索法の詳細については Reeves [6] による書籍が参考になる。さらに、問題の実行可能領域を大域的に探索するため、Hanafi と Freville [4] によって提案された戦略的振動に基づくタブー探索法を防御配置問題の特性を生かして改良することで、問題の効率的解法として提案する。

本論文の構成は次の通りである。第 2 章では、Nash 均衡型防御配置問題を 2 人多目的 Nash 均衡型ゲームとして定式化する。第 3 章では、ファジィ目標を導入することで、目的関数を統合した問題に変換する。第 4 章では、最適配置の導出に有用なミニマックス定理を示す。第 5 章では、防御配置問題の特性を取り入れた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案する。第 6 章で Nash 均衡型配置問題の数値例に対して提案解法を適用することでその有効性を示す。最後に、本論文の結論及び今後の課題を第 7 章で述べる。

2 問題の定式化

配置領域をグラフ $G = (V, E)$ で表す。ここで、 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ は n 個の点集合であり、 E は各枝 $e \in E$ に対して重み $d(e)$ が付随した枝集合を意味する。グラフ G 内には防御者が侵略者から守る必要のある k 個の主要点が存在し、それらの位置を $c_1, \dots, c_k \in V$ で表す。

防御者は各点 $v_i \in V$ 上に高々 1 つの防御施設を配置可能とし、その数を $q_i \in \{0, 1\}$ で表す。このとき、防御者の決定変数ベクトルは $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ で表される。

侵略者の初期位置は G 内の 1 点 $\xi \in V$ で与えられ、侵略者がもつ初期エネルギーの総和を γ で表す。各主要点 c_j , $j = 1, \dots, k$ までの侵略経路をパス $\mathbf{p}_j$ で表す。このとき、侵略者の決定変数はすべての主要点までのパス $\mathbf{p}_j$, $j = 1, \dots, k$ 及び各パスに振り分けるエネルギー γ_j , $j = 1, \dots, k$ で与えられる。また、 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ とおく。

j 番目の主要点 c_j に対して、侵略による被害の度合を次の関数により表す：

$$f_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j, \gamma_j) := \gamma_j - \tilde{D}(\mathbf{p}_j) - \beta \cdot W(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j), \quad (2.1)$$

ここで、 $D(p_j)$ はパス p_ξ 内の枝の重みの総和を意味し、 $\beta > 0$ は侵略者が1つの防御施設を通過する際にそのエネルギーを低減可能な能力を意味し、 $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j)$ は $\mathbf{p}_j$ 上に配置された防御施設の総数を表す。防御者及び侵略者の j 番目の目的関数は (2.1) で表される。

次に、各 DM に対する制約条件を与える。防御者は施設配置において線形制約式 $A\mathbf{q} \leq \mathbf{b}$ が与えられているものとする。ここで、

$$A := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_m)^T, \quad (2.3)$$

であり、すべての $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ に対して $a_{ij}, b_i \geq 0$ とする。一方、侵略者について、初期点から主要点 c_j までのパスの集合を SI_j とおくと、パスに関する実行可能集合は次式で表される：

$$SI = \prod_{j=1}^k SI_j. \quad (2.4)$$

また、配分されたエネルギーの総和が初期エネルギー γ 以下である制約条件が追加される。

本研究において、施設配置 $\mathbf{q}$ とエネルギー配分 γ は同時に決定され、その後で侵略者はパス $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ を決定する。与えられた $\mathbf{q}, \gamma$ に対して、侵略者はすべての主要点に対して各目的関数値を最小にするようにパスを選ぶと仮定する。このとき、パスは (2.1) における第2項及び第3項にのみ含まれることから、エネルギー配分 γ に依存しない。よって、 j 番目の主要点に対する最適なパスを $\mathbf{p}_j^*(\mathbf{q})$ と表す。また、簡単化のため、各目的関数を次のように表す：

$$f_j^*(\mathbf{q}, \gamma_j) := f_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}_j^*(\mathbf{q}), \gamma_j). \quad (2.5)$$

以上より、提案する防御配置問題は次の2人 k 目的 Nash 均衡型ゲームとして定式化される：

$$\left. \begin{array}{ll} \underset{\mathbf{q}}{\text{minimize}} & f_1^*(\mathbf{q}, \gamma_1), \dots, f_k^*(\mathbf{q}, \gamma_k) \\ \underset{\gamma}{\text{maximize}} & f_1^*(\mathbf{q}, \gamma_1), \dots, f_k^*(\mathbf{q}, \gamma_k) \\ \text{subject to} & A\mathbf{q} \leq \mathbf{b}, \\ & \gamma_1 + \dots + \gamma_k \leq \gamma, \\ & \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

3 ファジィ目標を導入した問題への変換

防御者の判断に生じるあいまい性を考慮して、次の線形メンバシップ関数を与えることで、「 j 番目の主要点に対して、だいたい f_j^1 よりも目的関数値を小さくしたい」というファ

ジィ目標を表す：

$$\mu_j(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \leq f_j^1, \\ \frac{y - f_j^1}{f_j^0 - f_j^1}, & \text{if } f_j^1 \leq y \leq f_j^0, \\ 0, & \text{if } y \geq f_j^0. \end{cases} \quad (3.1)$$

さらに、防御者は、各主要点 $j = 1, \dots, k$ に対する重要度に応じて重み $w_j \geq 0$ を与える。本研究では、 k 個のファジィ目標値の重み付け和により防御者及び侵略者の目的関数を統合する。このとき、(2.6) は次のように変換される：

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize}_{\mathbf{q}} \quad \sum_{j=1}^k w_j \mu_j(f_j^*(\mathbf{q}, \gamma_j)) \\ \text{minimize}_{\gamma} \quad \sum_{j=1}^k w_j \mu_j(f_j^*(\mathbf{q}, \gamma_j)) \\ \text{subject to} \quad A\mathbf{q} \leq \mathbf{b}, \\ \quad \quad \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_k \leq \gamma, \\ \quad \quad \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

4 ミニマックス定理

定理 1 問題 (3.2) には最適解が存在し、防御者の施設配置 $\mathbf{q}$ 及び侵略者のエネルギー配分 γ について、防御者のマックスミニ戦略は侵略者のミニマックス戦略と一致する。

証明：以下の証明では、西田 [5] の記述に基づく。問題 (3.2) はゼロ和 2 人ゲームとして定式化されており、侵略者のエネルギー配分は連続変数ベクトルとして表されていることから、無限ゲームの中の連続ゲームに分類される。ファジィ目標のメンバシップ関数 (3.1) 及び (3.2) より、各目的関数は γ に対して連続である。このとき、ミニマックス定理が成り立つことが知られており [5]、題意が成り立つことが証明された。 ■

上記の定理より、防御者の施設配置 $\mathbf{q}$ において侵略者が最適解を選んだ際の目的関数値は、与えられた $\mathbf{q}$ に対して、侵略者のエネルギー配分 γ を (3.2) の目的関数値が最も悪くなるように与えることで得られる。以下では、与えられた $\mathbf{q}$ に対する侵略者の最適なエネルギー配分を $\gamma^*(\mathbf{q})$ で表す。

5 解法アルゴリズム

初めに、(3.2) の厳密解を求めるための計算時間について評価する。厳密解を導出するためには、すべての施設配置に対して (3.2) の目的関数値を導出して比較する必要がある。このことは、施設配置毎に k 個の主要点までの最適なパスおよびエネルギー配分を導出する必要があることを意味する。これらのパス集合は、ワーシャル・フロイド法 [1] を用い

ることにより多項式時間で求めることができる。また、最適なエネルギー配分は簡単な線形計画問題を解くことで求められる。しかし、施設配置の総数はグラフに含まれる点の数に対して指数関数的に増大するため、大規模なグラフにおいて厳密解を導出するには莫大な計算時間がかかる。本研究では、戦略的振動に基づくタブー探索法を防御配置問題の特性を生かして改良することで、(3.2)に対する効率的解法を提案する。

タブー探索法は局所探索法の一つであり、現在解 q^{now} から次の解 q^{next} への移動を繰り返すことで探索が進められる。本研究での提案解法では、 q^{now} の要素を1つを増加または減少させることをムーブと呼び、 q^{now} の近傍を1つのムーブにより移る解の集合と定義し、 $N(q^{\text{now}})$ で表す。近傍 $N(q^{\text{now}})$ の中から、 q^{next} は与えられた基準(目的関数値など)の意味で最良となる解に移動する。しかし、修正なしで探索を行うと、探索の途中で得られた局所最適解の周辺で特定のムーブが選ばれ続ける巡回に陥り、その結果限定された領域しか調査できない。そこで、探索過程においてあるムーブが選ばれた場合、その逆方向となるムーブに対してタブー制約を一定期間 T_1 だけ活性にする。タブー制約が活性であるムーブは、例えばそのムーブが近傍内において最良であったとしても選ばれることを禁止し、この状態をタブーと呼ぶ。タブーとなるムーブは探索を通して記憶される。

タブー探索法はいくつかの局所最適解を効率的に見つけるのには有効であるものの、一般に(3.2)の実行可能領域は広大であり数多くの局所最適解を含む。よって、様々な種類の局所最適解の見つけるために、戦略的振動の概念を導入する。次の関数は q の実行可能性を表し、戦略的振動において重要な役割を果たす：

$$r(q) := \max_{i=1, \dots, m} \{a_i \cdot q - b_i\} \quad (5.1)$$

防御配置問題に対する戦略的振動に基づくタブー探索法

- 手順0: 初期解 q^{now} をランダムに生成し、タブー情報や各種パラメータを初期化する。もし q^{now} が実行可能領域内に存在すれば、手順4に進む。
- 手順1: q^{now} から q^{next} へ、 q^{now} の要素を減らすムーブで移動させる。ムーブの選択基準は $r(q^{\text{next}})$ をできるだけ増加させることとする。この手順は $r(q^{\text{next}}) \geq 0$ 、すなわち、 q^{next} が実行可能領域内に移動するまで繰り返される。
- 手順2: q^{now} を q^{next} へ、(3.2)の目的関数値の改善を基準に移動させる。この手順は与えられた期間 T_2 だけ繰り返す。
- 手順3: q^{now} から q^{next} へ、 q^{now} の要素を増やすムーブで移動させる。ムーブの選択基準は $r(q^{\text{next}})$ をできるだけ増加させることとする。この手順は $r(q^{\text{next}})$ が与えられた値 r_{low} を下回るまで続ける。
- 手順4: q^{now} から q^{next} へ、 q^{now} の要素を増やすムーブで移動させる。ムーブの選択基準は(3.2)の目的関数値の改善とする。この手順は $r(q^{\text{next}}) < 0$ 、すなわち、 q^{next} が実行可能集合から外れる直前まで行う。

手順 5: 手順 2 と同じ.

手順 6: q^{now} から q^{next} へ, q^{now} の要素を増やすムーブで移動させる. ムーブの選択基準は (3.2) の目的関数値の改善とする. この手順は $r(q^{\text{next}})$ が与えられた値 r_{upp} を上回るまで続ける.

手順 7: もし手順 1 から 6 までの実行回数が予め与えられた T_3 を超えたならば, アルゴリズム終了. そうでなければ, 手順 1 に戻る.

6 数値実験

本章では, 提案解法を Nash 均衡型防御配置問題の数値例に適用することでその有効性を示す. ネットワーク N の規模はノード数 $n = 100$ 及びエッジ数 1000 とし, N 内の主要点数を $k = 3$ とする. 各枝 $e \in E$ において, d_e を $\{1, \dots, 100\}$ 内で無作為に与えた.

防御者について, 防御施設に関する係数を $\beta = 20$ とし, 制約条件数を $m = 30$ とする. : また, (2.2) において, 各 a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ は $\{1, \dots, 100\}$ 内で無作為に与え,

$$b_i = \theta_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad (6.1)$$

とする. ここで, θ_i , $i = 1, \dots, m$ は $[0.1, 0.3]$ 内で無作為に与えた.

一方, 侵略者について, 侵略エネルギーの初期値を $\gamma = 600$ とする.

前章で述べたタブー探索法において, タブー期間を $T_1 = 20$ とする. また, アルゴリズムの手順 2 及び 4 において, $T_2 = 7$ 及び $T_3 = 100$ とおく.

第 3 章で述べた目的関数の統合において, ファジィ目標 (3.1) を規定するメンバシップ関数のパラメータを $f_1^j = 25$, $f_0^j = 150$, $j = 1, 2, 3$ と与えた. また, 各主要点に対する重みを $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$ とおいた. 提案解法を数値例 2 つに適用した計算結果を表 1 に示す. ここで, 使用した計算環境は, Dell Studio XPS 8100 (CPU: Inter^R CORETM i7-860 2.80GHz $\times$ 2, RAM: 6.00GB) である. 表 1 より, 数値例 1 において結果に多少ばらつきがみられるものの, 全体的に精度の高い解が提案手法により得られていることがわかる.

表 1: 計算結果

数値例	最良値	平均値	最悪値	平均計算時間 (秒)
1	0.445	0.430	0.416	43.5
2	0.537	0.537	0.537	37.6

7 おわりに

本研究では、防御配置問題に対して、侵略者が主要点に対して配分するエネルギーを自由に決定できる条件を加えることで、Nash 均衡型防御配置問題に拡張した。定式化された2人ゼロ和ゲームに対するミニマックス定理を導き、この定理を用いた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案し、数値例に適用することでその有効性を示した。

本研究では目的関数の構造として比較的単純なものを用いているため、エネルギー配分を求めることができたが、現実の防御配置問題の例に応用する際には、分野に応じて目的関数を定義する必要がある。その場合にはミニマックス定理の証明を新たにする必要があり、ミニマックス定理が得られたとしても最適なエネルギー配分を導出するための解法が必要となる。様々な状況に対応できる Nash 均衡型防御配置問題の解法の提案については今後の課題である。

参考文献

- [1] TH Cormen, CE Leiserson, RL Rivest: Introduction to Algorithms, MIT Press (1990).
- [2] D Dubois, H Prade: Operations on Fuzzy Numbers, Int J Systems Sci, vol 9, pp 613-626 (1978).
- [3] F Glover: Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence, Computers & Operations Research, vol 5, pp 533-549 (1986).
- [4] S Hanafi, A Freville: An Efficient Tabu Search Approach for the 0-1 Multidimensional Knapsack Problem, European J Operational Research, vol 106, pp 659-675 (1998).
- [5] 西田俊夫: ゲームの理論, 第5章「無限ゲーム」, 日科技連 (1973).
- [6] CR Reeves: Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Blackwell Scientific Press, Oxford (1993).
- [7] T Uno, H Katagiri: Single- and Multi-Objective Defensive Location Problems on a Network, European J Operational Research, vol 188, pp 76-84 (2008).
- [8] T Uno, K Kato: An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Stochastic Defensive Location Problems, Proc 2011 IEEE Int Conf Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011), pp 879-883 (2011).