

円内接多角形問題について —半径公式と面積公式の統合—*

森継 修一

SHUICHI MORITSUGU†

筑波大学図書館情報メディア系

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

円内接多角形問題とは、

「円に内接する n 角形の各辺の長さ $a_1, a_2, \dots, a_n$ が与えられたとき、
その多角形の面積および外接円の半径を $a_1, a_2, \dots, a_n$ の式で表せ。」

という古典的な幾何学の問題である。本研究では、「 $n = 5$ のときの“面積公式”と“半径公式”の関係を調べること」を目的とし、その結果を報告する。

古くから知られている結果として、三角形 ($n = 3$) の場合には Heron の公式 (1 世紀) とよばれ、外接円の半径 r と三角形の面積 S がそれぞれ、

$$r = \frac{a_1 a_2 a_3}{\sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}} \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)} \quad (2)$$

と表されるので、両者を結びつけて根号部分を消去すると

$$4Sr = a_1 a_2 a_3 \quad (3)$$

が得られる。

また、四角形 ($n=4$) に対する結果は、Brahmagupta の公式 (7 世紀) とよばれ、半径および面積が

$$r = \sqrt{\frac{(a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)}} \quad (4)$$

$$S = \frac{\sqrt{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)}}{4} \quad (5)$$

と表されるので、両者を結びつけて根号のない形で表すと

$$16S^2 r^2 = (a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3) \quad (6)$$

*本研究は科研費 (25330006) の助成を受けたものである。

†moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

が得られる。ただし、上記の式 (4)(5) は、凸な四辺形の場合のみに対応している。 $n = 4$ に対しては、凸でない四辺形の場合の公式

$$r = \sqrt{\frac{-(a_1a_2 - a_3a_4)(a_1a_3 - a_2a_4)(a_1a_4 - a_2a_3)}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4)}} \quad (7)$$

$$S = \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4)}}{4} \quad (8)$$

に対しても、両者を結びつけた根号のない形

$$16S^2r^2 = -(a_1a_2 - a_3a_4)(a_1a_3 - a_2a_4)(a_1a_4 - a_2a_3) \quad (9)$$

を考慮する必要がある。

以上のことから、半径公式と面積公式の関係をひとつの式で表すには、 $k = 16S^2r^2$ (S : 多角形の面積 r : 外接円の半径) とおくと、 $n = 3, n = 4$ のそれぞれに対して、

$$k - a_1^2a_2^2a_3^2 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (k - (a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)) \\ & \times (k + (a_1a_2 - a_3a_4)(a_1a_3 - a_2a_4)(a_1a_4 - a_2a_3)) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

と表されることがわかる。

Heron, Brahmagupta の公式を $n \geq 5$ に拡張したとき、任意の n 辺形に対して、

- 面積公式は $16S^2$ の多項式で表される
- 半径公式は r^2 の多項式で表される

ことがすでに示されている [5]。特に、今回の課題である $n = 5$ の場合には、両者とも 7 次式になることが示され、具体的な多項式もすでに計算されているが、「面積と半径を結びつける公式は still missing である [4]」とされる。したがって、式 (10)(11) に相当する式が $n = 5$ の場合にも存在すれば、 $k = 16S^2r^2$ の 7 次方程式になると予想され、その具体的な形を求めることが、本研究の目標である。

2 五角形 ($n = 5$) の場合への拡張

2.1 $n = 5$ に対する半径公式

P. Pech[4](2006) が 7 次方程式の具体的な導出に初めて成功したとされるが、これより 300 年以上前の江戸時代の日本において、終結式による消去計算は和算家の得意分野であり、建部賢弘「研幾算法」(1683)・井関知辰「算法發揮 (図 1)」(1690) などが、最終的な展開形までは至らないまでも、「直径に関する 14 次方程式」を正しく導いている [3]。

和算家の方法を数式処理で実行するには、以下のように定式化する。まず、図 1 と同様に、円内接五角形を 3 つの三角形に分割し、対角線の長さを u, v とする。辺の長さの組はそれぞれ $\{a_1, a_2, u\}$, $\{u, v, a_5\}$, $\{a_3, a_4, v\}$ となり、これらが共通の外接円をもつことから、Heron の公式を適用すると、 $\mathbf{Q}(a_1, \dots, a_5)[u, v, r]$ における連立代数方程式が得られる。

$$\begin{cases} f_1 = (a_1 + a_2 - u)(a_2 + u - a_1)(u + a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + u)r^2 - a_1^2a_2^2u^2 \\ f_2 = (u + v - a_5)(v + a_5 - u)(a_5 + u - v)(u + v + a_5)r^2 - u^2v^2a_5^2 \\ f_3 = (a_3 + a_4 - v)(a_4 + v - a_3)(v + a_3 - a_4)(a_3 + a_4 + v)r^2 - a_3^2a_4^2v^2 \end{cases} \quad (12)$$

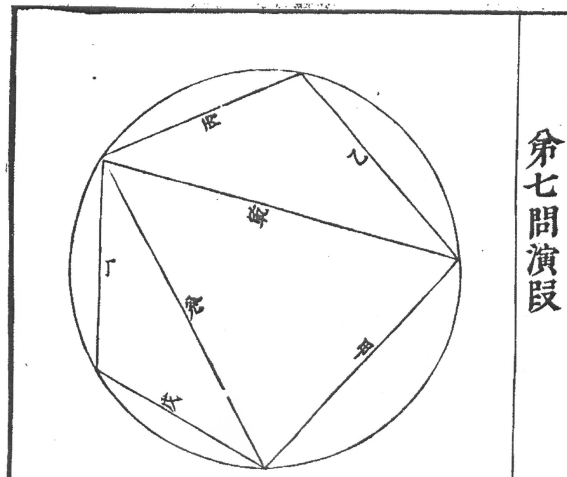


図 1: 「算法發揮」第 7 問

終結式計算により v と u を順次消去し, r のベキになっている冗長因子を除外すると

$$\begin{aligned}\Phi_r(y) &:= \text{Res}(f_1, \text{Res}(f_2, f_3, v), u)/r^\ell \\ &= B_7 y^7 + B_6 y^6 + B_5 y^5 + B_4 y^4 + B_3 y^3 + B_2 y^2 + B_1 y + B_0 \\ &= 0 \quad (y = r^2, \quad B_i \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_5])\end{aligned}\tag{13}$$

という 7 次方程式 (展開すると 2,922 項) を得る.

2.2 $n = 5$ に対する面積公式

一般には Robbins[5] の公式 (1994) とよばれるが, ここでは, Pech[4] による定式化を示し, これをもとに次節で, 面積・半径の統合公式の導出を試みる. 各変数は, 図 2 に示された座標および辺・対角線の長さとし, 五角形の面積を S で表している.

(A) 座標関係による方法

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_1 &:= (x-a)^2 + y^2 - b^2, \\ g_2 &:= (u-x)^2 + (v-y)^2 - c^2, \\ g_3 &:= (w-u)^2 + (z-v)^2 - d^2, \\ g_4 &:= w^2 + z^2 - e^2, \\ g_5 &:= s^2 + t^2 - r^2, \\ g_6 &:= (s-a)^2 + t^2 - r^2, \\ g_7 &:= (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2, \\ g_8 &:= (u-s)^2 + (v-t)^2 - r^2, \\ g_9 &:= (w-s)^2 + (z-t)^2 - r^2, \\ g_{10} &:= S - (ay + xv - uy + uz - vw)/2. \end{array} \right. \tag{14}$$

g_5, g_6 より $s = a/2$ と確定, また, $\tilde{g}_j = g_j - g_5$ ($j = 7, 8, 9$) と前処理すると変数 r は不要になるため, イデアル $I = (g_1, g_2, g_3, g_4, \tilde{g}_7, \tilde{g}_8, \tilde{g}_9, g_{10})$ に対して, 順序 $\{x, y, u, v, w, z, t\} \succ \{a, b, c, d, e, S\}$ でグレブナー基底を計算すれば, 面積 S (各辺に対応する中心角の向きに合わせた符号付き) のみたすべき方程式が求められる.

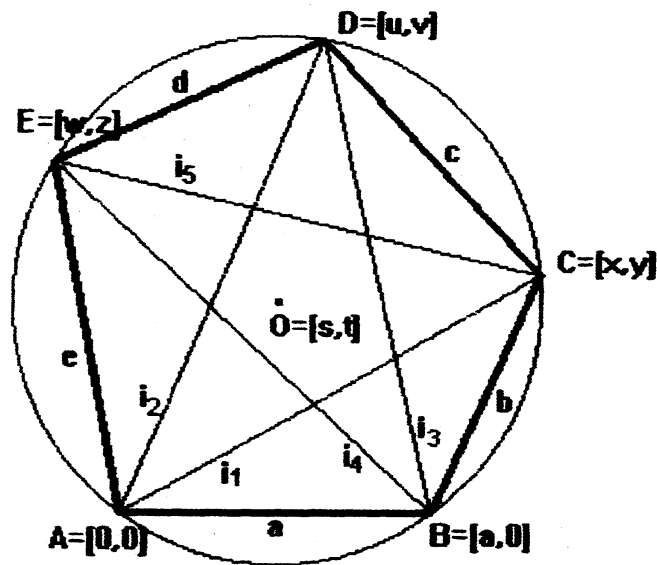


図 2: Pech[4] による定式化

(B) 対角線長の関係による方法

$$\begin{cases} h_1 := ac + bi_2 - i_1 i_3, & h_2 := bd + ci_4 - i_3 i_5, \\ h_3 := ce + di_1 - i_5 i_2, & h_4 := da + ei_3 - i_2 i_4, \\ h_5 := eb + ai_5 - i_4 i_1, & h_6 := i_1(ab + ci_2) - i_3(bc + ai_2), \\ h_7 := i_3(bc + di_4) - i_5(cd + bi_4), & h_8 := i_5(cd + ei_1) - i_2(ed + ci_1), \\ h_9 := i_2(ed + ai_3) - i_4(ea + di_3), & h_{10} := i_4(ea + bi_5) - i_1(ab + ei_5) \end{cases} \quad (15)$$

という関係があることに加えて、面積 S に対して $X = 16S^2$ とおくと、

$$\begin{cases} P &:= a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2, \\ Q &:= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4, \\ T &:= 4(abc i_2 + bcd i_4 + cde i_1 + dea i_3 + eab i_5), \\ h_{11} &:= 2P - Q + T - X \end{cases} \quad (16)$$

が成り立つので、イデアル $J = (h_1, \dots, h_{10}; h_{11})$ に対して、順序 $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} \succ \{a, b, c, d, e, X\}$ でグレブナー基底を計算すれば、 $X (= 16S^2)$ のみたすべき方程式が求められる。

方法 (A)(B) とも、Risa/Asir でグレブナー基底を計算すると、数時間～十数時間かかり、現在でもかなりの難問である。(「対称式の性質を用いて式 (16) 中の h_{11} を書き換えると、計算が高速化されて (B) の方が有利になる」というのが [4] の主旨であるが、本研究の目的には適用できないので、ここでは深入りしない。) 結果はいずれも、(記法の統一のため、式 (13) に合わせて変数名を書き換えると)

$$\begin{aligned} \Phi_S(x) &= x^7 + C_6x^6 + C_5x^5 + C_4x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (x = 16S^2, \quad C_i \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_5]) \quad (17)$$

という 7 次方程式 (展開すると 6,672 項) を得る。

3 半径公式と面積公式の統合

3.1 統合公式の計算 (グレブナー基底による方法)

面積公式の導出のための関係式から, $k = 16S^2r^2$ を変数とする式に一部修正して, 入力多項式とする.

(A) 座標関係による方法

式 (14) 中の $g_5 = 0$ に $s = a/2$, $r^2 = k/(16S^2)$ を代入, さらに g_{10} を S について解いて代入すると,

$$\tilde{g}_5 := (ay + xv - uy + uz - vw)^2(a^2 + 4t^2) - k = 0 \quad (18)$$

を得る. ここから, イデアル $I = (g_1, g_2, g_3, g_4, \tilde{g}_7, \tilde{g}_8, \tilde{g}_9; \tilde{g}_5)$ に対して, 順序 $\{x, y, u, v, w, z, t\} \succ \{a, b, c, d, e, k\}$ でグレブナー基底を計算すれば, k のみたすべき方程式が求められるはずである.

(B) 対角線長の関係による方法

Heron の公式 (3 辺 $\{a, b, i_1\}$, 外接円の半径 r) から,

$$(abi_1)^2 = r^2(a + b + i_1)(-a + b + i_1)(a - b + i_1)(a + b - i_1) \quad (19)$$

これと $k = Xr^2$ を式 (16) 中の $h_{11} = 0$ に代入して整理すると,

$$\tilde{h}_{11} := (abi_1)^2(2P - Q + T) - k(a + b + i_1)(-a + b + i_1)(a - b + i_1)(a + b - i_1) = 0 \quad (20)$$

を得る. ここから, $J = (h_1, \dots, h_{10}; \tilde{h}_{11})$ に対して, 順序 $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} \succ \{a, b, c, d, e, k\}$ でグレブナー基底を計算すれば, k のみたすべき方程式が求められるはずである.

方法 (A)(B) とも, グレブナー基底の直接計算は極めて困難と思われ, Risa/Asir, Maple いずれにおいても成功しなかった. (途中で式が爆発して, メモリ管理に関わるエラーを引き起こすか, または 100 時間程度経過しても終了しなかった.)

3.2 統合公式の計算 (終結式による方法)

外接円の半径 r と五角形の面積 S は, $y = r^2$, $x = 16S^2$ とおいたとき, 式 (13)(17) から

$$\begin{cases} \Phi_r(y) = B_7y^7 + B_6y^6 + \dots + B_1y + B_0 = 0 & (2,922 \text{ 項}) \\ \Phi_S(x) = x^7 + C_6x^6 + \dots + C_1x + C_0 = 0 & (6,672 \text{ 項}) \end{cases} \quad (21)$$

を同時にみたす. 統合公式を $k = xy$ の多項式で表すため,

$$\Phi'_r(x, k) = x^7 \Phi_r(k/x) = B_7k^7 + B_6k^6x + \dots + B_1kx^6 + B_0x^7 \quad (22)$$

とおき, $\Phi_S(x)$ と連立させて終結式により x を消去すると,

$$\Psi(k) = \text{Res}(\Phi'_r, \Phi_S; x) = A_{49}k^{49} + \dots + A_1k + A_0 \quad (A_i \in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_5]) \quad (23)$$

を得る. 終結式が 49 次になるのは, 根 x_i, y_j ($1 \leq i, j \leq 7$) のすべての組み合わせで作られる $k_{ij} = x_i y_j$ の個数に対応している. 辺の長さ a_i に何組かの数値を代入して計算してみたところ, これが (42 次式) $\times$ (7 次式) に因数分解されて, 「対応する x_i と y_i の組み合わせ $k_{ii} = x_i y_i$ ($1 \leq i \leq 7$) のみを根とする 7 次因子の方が求める統合公式になる」ということが推測された. ただし, $\Psi(k)$ は巨大な式になり, このままで

は展開された形で整理することも、因数分解を実行することも困難である。ここで、 Φ_r と Φ_S は独立ではなく、

$$\begin{cases} B_7 = \prod_{16 \text{ terms}} (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm a_5) & (\text{複合はすべての組合せ}) \\ B_0 = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6 \\ C_0 = B_7 \cdot \varphi(a)^2 \quad \text{ただし} \quad \varphi(a) = \sum_{i=1}^5 a_i^6 + 2 \sum_{i < j < k}^{10 \text{ terms}} (a_i a_j a_k)^2 - \sum_{i < j}^{10 \text{ terms}} a_i^2 a_j^2 (a_i^2 + a_j^2) \end{cases} \quad (24)$$

という構造を持つ。したがって、 Φ_r の根 $y_1, \dots, y_7$ および Φ_S の根 $x_1, \dots, x_7$ と係数の関係から、

$$\prod_{i=1}^7 k_{ii} = (x_1 y_1) \cdots (x_7 y_7) = (y_1 \cdots y_7)(x_1 \cdots x_7) = -(B_0/B_7) \cdot (-C_0) = B_0 \cdot \varphi(a)^2 \quad (25)$$

が導かれるので、求める統合公式は

$$1 \cdot k^7 + u_6 k^6 + \cdots + u_1 k - (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6 \varphi(a)^2 = 0 \quad (26)$$

という形である ($u_1, \dots, u_6$ は未知) ことまでは、推定できる。

4 統合公式の利用法 (数値例の場合)

和算における「円内接五角形問題」は、池田昌意「数学乗除往来」(1674) 遺題第3問：

「辺の長さを5寸,6寸,7寸,8寸,9寸としたとき、外接円の直径を求めよ」

に端を発している。先に挙げた建部(1683)・井関(1690)は、これに数式処理で解答したものである。一方で、コンピュータの普及以前には数値計算は困難だったらしく、(現代的に半径で表して) $r = 6.0198$ という値を求めた人は、筆者[3]以前にはいなかったようである。

各辺の長さが上記の値のとき、半径公式 $\Phi_r(y) = 0$ から半径を数値的に計算すると、実数解が5個得られる。面積公式 $\Phi_S(x) = 0$ から同様に5個の実数解が得られるが、「面積の値と半径の値との対応」や「凸五角形の場合はどれか」が容易には判別できない。そこで、統合公式も合わせて用いて、(面積(符号付), 半径)の組を求めてみることにする。それぞれの値がみたすべき方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} \text{半径公式} & 5810802381759375y^7 - \cdots - 11948427342082473984000000 & = 0 \\ \text{面積公式} & x^7 - \cdots - 1360512306447018480615234375 & = 0 \\ \text{統合公式} & k^7 - 4712980k^6 + \cdots - 2797545222432657266282496000000000000 & = 0 \end{cases} \quad (27)$$

これらを数値計算で解くと、いずれも実数解を5個持つことが分かるが、値の組み合わせが不明なので、 $k = xy = (16S^2)(r^2)$ という関係式に基づき、 $5 \times 5 \times 5 = 125$ とおりについて、

$$\left| S_i \cdot r_j - \frac{\sqrt{k_\ell}}{4} \right| < 10^{-6} \quad (28)$$

となるものを拾い出すと

$$\begin{aligned} [S_i, r_j] &= [10.47633365, 6.035515309], \\ &[16.78535280, 4.505907128], \\ &[23.09053708, 4.602116876], \\ &[30.69973405, 4.802909240], \\ &[82.47639518, 6.019756631] \end{aligned} \quad (29)$$

が得られ、最後の組が凸五角形に対応していることが分かる。この数値例からも、 $k = (16S^2)(r^2)$ といった変数 k が、面積と半径の関係を結びつける統合公式を与えていると考えられる。

5 終結式による方法（再論）： a_i^2 の基本対称式による表現の利用

与えられた問題の設定から、辺の長さ a_i は入れ換えが可能なので、半径公式・面積公式とも、各係数は a_i^2 の対称式となっている。したがって、式 (21) の各係数を a_i^2 に関する 5 次の基本対称式で表すことが可能であり、実際、より簡潔な表現に書き改めることができる。

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_r(y) = \tilde{B}_7 y^7 + \tilde{B}_6 y^6 + \cdots + \tilde{B}_1 y + \tilde{B}_0 = 0 & (81 \text{ 項}) \\ \tilde{\Phi}_S(x) = x^7 + \tilde{C}_6 x^6 + \cdots + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_0 = 0 & (153 \text{ 項}) \end{cases} \quad (30)$$

ただし、 $\tilde{B}_i, \tilde{C}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_5]$, $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$, $\dots$, $s_5 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2$ である。このとき、終結式により $k = xy$ の 1 変数多項式を求めると、

$$\tilde{\Psi}(k) = \tilde{A}_{49} k^{49} + \cdots + \tilde{A}_0 \quad (2,093,279 \text{ 項}) \quad (\tilde{A}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_5]) \quad (31)$$

となる。これは、Maple14(Win64), Xeon(2.93GHz) $\times$ 2, 192GB の計算環境の下、約 15 分で展開・整理した形を求めることができた。統合公式が存在するのであれば、同じく係数を a_i^2 の基本対称式で表した環で因数分解できると考えられ、それは実際、

$$\psi(k) = k^7 - 4s_3 k^6 + \cdots - s_5^3 (8s_3 - 4s_1 s_2 + s_1^3)^2 \quad (63 \text{ 項}) \quad (32)$$

という形（上記の計算環境で CPU, 実時間とも約 80 時間）で求めた。この式 (32) を、本研究の目的であった「円内接五角形に対する半径公式と面積公式を統合した新たな公式」と呼んでよいのではないかと考えている。図 3 には Maple からの出力をそのまま掲載して、 $\psi(k)$ の全項を示した。

6 まとめと今後の課題

n	面積公式 [1]	半径公式 [2]
5	7 次	7 次
6	7 次 $\times$ 7 次	7 次 $\times$ 7 次
7	38 次 [†]	38 次

[†] 終結式の展開はされていない

表 1: 円内接 n 角形に対する各公式の形状

円内接五角形について、面積 S と外接円の半径 r を同時に表す公式 ($k = 16S^2 r^2$ に関する 7 次方程式) を、終結式の因数分解により求めた。「辺長の自乗 a_i^2 の基本対称式による表現」を係数にとることで、簡略な公式が得られたが、その幾何学的解釈は未知である。

引き続いて、同様のアプローチによる六角形の場合の計算を模索しているものの、「49 次の終結式を得たのち、これを因数分解する」というステップが極めて実行困難であろうと予想される。面積および半径公式の次数については、Robbins[5] の予想（のちに定理）により、

$$d_n = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \binom{2n+1}{j} \quad (33)$$

すなわち、 $d_1, d_2, d_3, \dots = 1, 7, 38, 187, 874, \dots$ とおいたとき、 $(2n+1)$ 角形に対して d_n 次、 $(2n+2)$ 角形に対して $2d_n$ 次 ($= d_n$ 次 $\times d_n$ 次 に因数分解される) であることが証明されている。具体的に計算されている部分を表 1 に示した。統合公式もこれらと同じ次数をもつものと予想される。

$$\begin{aligned}
& k^7 - 4 s_3 k^6 + (-28 s_1 s_5 - 2 s_1^2 s_4 + 6 s_3^2) k^5 + (-8 s_2^2 s_5 + 4 s_1^2 s_3 s_4 \\
& + 52 s_1 s_3 s_5 - 32 s_4 s_5 - 10 s_1^2 s_2 s_5 - 4 s_3^3 - s_1^4 s_5) k^4 + (\\
& -2 s_1^2 s_3^2 s_4 - 2 s_1^4 s_3 s_5 + 12 s_1^3 s_4 s_5 + 148 s_1^2 s_5^2 - 20 s_1 s_3^2 s_5 \\
& - 192 s_2 s_5^2 + s_3^4 + s_4^2 s_1^4 - 64 s_1 s_2 s_4 s_5 + 16 s_2^2 s_3 s_5 \\
& + 4 s_1^2 s_2 s_3 s_5 + 64 s_3 s_4 s_5) k^3 + (2 s_1^4 s_2 s_4 s_5 - 576 s_5^3 \\
& - 12 s_1^3 s_3 s_4 s_5 - 4 s_1 s_3^3 s_5 + 28 s_1^3 s_2 s_5^2 - 80 s_1 s_2^2 s_5^2 \\
& - 8 s_2^2 s_3^2 s_5 - 2 s_1^5 s_5^2 - 8 s_1^2 s_3 s_5^2 - 8 s_1^2 s_2^2 s_4 s_5 \\
& + 128 s_2 s_3 s_5^2 - s_1^4 s_3^2 s_5 + 64 s_1 s_4 s_5^2 - 32 s_4^2 s_1^2 s_5 \\
& + 6 s_1^2 s_2 s_3^2 s_5 - 32 s_3^2 s_4 s_5 + 64 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) k^2 + (-16 s_1^4 s_4 s_5^2 \\
& - 64 s_1 s_3 s_4 s_5^2 + 256 s_4^2 s_5^2 - 384 s_3 s_5^3 - 128 s_2^2 s_4 s_5^2 \\
& + 192 s_1 s_2 s_5^3 - 48 s_1 s_2^2 s_3 s_5^2 - 48 s_1^3 s_5^3 + 64 s_2 s_3^2 s_5^2 \\
& - 2 s_1^5 s_3 s_5^2 + 16 s_2^4 s_5^2 - 12 s_1^2 s_3^2 s_5^2 - 8 s_1^2 s_2^3 s_5^2 \\
& + 20 s_1^3 s_2 s_3 s_5^2 + s_1^4 s_2^2 s_5^2 + 96 s_1^2 s_2 s_4 s_5^2) k - 16 s_1^2 s_2^2 s_5^3 \\
& + 8 s_1^4 s_2 s_5^3 - 64 s_3^2 s_5^3 - s_1^6 s_5^3 + 64 s_1 s_2 s_3 s_5^3 - 16 s_1^3 s_3 s_5^3
\end{aligned}$$

図 3: $n = 5$ に対する統合公式 $\psi(k)$ の全項

なお, Maley 他 [1] は, 面積公式について $n = 8$ (38 次 $\times$ 38 次) まで議論しているが, Resultant の関数を含んだ式のままで表しているため, 具体的に展開するには至っていないため, 七角形の場合は, 現時点で見込みが立っていない。

参 考 文 献

- [1] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.
- [2] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, **18**(1), 2011, 3–9.
- [3] 森継修一: 円内接多角形問題と「算法発揮 (1690)」における解について, 京都大学数理解析研究所講究録, **1815**, 2012, 124–132.
- [4] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Gainesville, Springer, 2006, 44–58.
- [5] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.