

概均質ベクトル空間の特異軌道と ℓ -関数

欲理 木村達雄 記

§ 1. 準備(定義, その他)

V = 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 ($\dim V = n$ とする)

$G(\subset GL(V))$ = 連結線型代数群, とするとき

対 (G, V) が 概均質ベクトル空間 (Prehomogeneous vector space, P.V. と略記する.) とは, V の代数的真部分集合 S が存在して G が $V-S$ に均質に作用していること, すなわち

$$V-S = G \cdot x \text{ for } x \in V.$$

このとき, S を (G, V) の特異点集合 (singular set) とよび S に含まれる G -軌道 (orbit) を (G, V) の 特異軌道 (singular orbit) という。以下では次の仮定をする。

仮定: G は reductive で, S は既約超曲面

(この仮定を満す例として, 既約正則概均質ベクトル空間の族があり分類ができています。この仮定を弱めた場合もある程度できていますが, そのときは多変数の ℓ -関数 $\ell_X(w)$ の考察が必要になる。)

さて仮定から $S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ なる既約多項式 $f(x)$ が存在するが, S が G -認容なことから $f(x)$ は V 上の 相対

不変多項式 (relative invariant) であり, 逆に V 上の相対不変有理式は $c f^m$ ($c \in \mathbb{C}^*, m \in \mathbb{Z}$) に限る事がわかる。

$$f(g \cdot x) = \chi(g) f(x) \quad \text{for } \forall g \in G, x \in V.$$

f に対応する指標 χ の微分を $\delta\chi$ とする。すなわち G のリー環を $\mathfrak{g}$ とするとき

$$\chi(\exp t A) = \exp t \delta\chi(A) \quad \text{for } \forall t \in \mathbb{C}^*, A \in \mathfrak{g}.$$

然らば

$$(1.1) \quad \delta\chi(A) = \frac{\deg f}{\dim V} \cdot \text{tr}_V A \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。([], [] 参照)

注) $f(x)$ は斉次多項式である。

V^* ($= V$ の dual space) には, 群 G が contragredient に作用するが G が reductive であるから (G, V^*) も P.V. かつその singular set S^* も既約超曲面である。

$$S^* = \{ y \in V^* \mid f^*(y) = 0 \} \quad \text{とすれば}$$

$f^*(g \cdot y) = \chi^{-1}(g) f^*(y)$ ($g \in G, y \in V^*$. g の V^* への作用を $g \cdot y$ と記す) が成り立つ。

$f^*(\text{grad}_x) = f^*(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ ($n = \dim V$) なる微分作用素を $f(x)^{s+1}$ に作用させると, それは V 上の character χ^s に対応する relative invariant になるから定数倍 (s に depend するので $\ell(s)$ と記す) を除いて $\overset{f^s}{=}$ 一致する。すなわち

$$(1.2) \quad f^*(\text{grad}_x) f(x)^{s+1} = \ell(s) f(x)^s \quad \text{を得る。}$$

この (s) に関する多項式を (G, V) の ℓ -関数, または ℓ -多項式という。 $\deg \ell(s) = \deg f(x)$ が成り立つ。

Singular orbits と $\ell(s)$ の関係を研究し, $\ell(s)$ を具体的に決定する方法を得るのが 本論の目標である。

$$\begin{aligned} & \text{hol. func. 係数の} \\ \mathcal{Q} &= V \text{ 上の differential operators のなす sheaf} \\ \mathcal{Q}[s] &= \left\{ P(s, x, D) = \sum_{j=0}^m P_j(x, D) s^j \mid P_j \in \mathcal{Q} \right\} \\ \mathcal{J} &= \{ P(x, D) \in \mathcal{Q} \mid P(x, D) f^s = 0 \} \\ \mathcal{J}[s] &= \{ P(s, x, D) \mid P(s, x, D) f^s = 0 \} \quad \text{とおく.} \end{aligned}$$

f の ℓ -多項式 $\ell(s)$ が $(s+\alpha)$ でわりきれれる事を示すのには次の事が いえれば 十分である。

すなわち V 上の 超関数 $\Delta(x)$ があって

- 1) $P(-\alpha, x, D) \Delta(x) = 0$ for $\forall P(s, x, D) \in \mathcal{J}[s]$
- 2) $f(x) \Delta(x) = 0$
- 3) $\Delta(x) \neq 0$.

実際 (1.2) より $\{ f^*(\text{grad}_x) f(x) - \ell(s) \} f(x)^s = 0$
すなわち $f^*(\text{grad}_x) f(x) - \ell(s) \in \mathcal{J}[s]$

従って 1) より $\{ f^*(\text{grad}_x) f(x) - \ell(-\alpha) \} \Delta(x) = 0$

従って 2) より $\ell(-\alpha) \Delta(x) = 0$. $\ell(-\alpha)$ は定数ゆえ

3) より $\ell(-\alpha) = 0$ i.e. $(s+\alpha) \mid \ell(s)$ を得る。

ここで $\Delta(x)$ は 1), 2), 3) を満たせばよいわけで, 実際には microfunction として扱う.

1) 2) 3) を満たす $\Delta(x)$ が存在するための条件をこれから調べていこう.

$f^s(gx) = \chi(g)^s f^s(x)$ において $g = \exp tA$ ($A \in \mathfrak{g}$) を代入して t で微分して $t=0$ とおけば

$$(1.3) \quad \langle Ax, \text{grad} \rangle f(x)^s = s \chi(A) f(x)^s \quad \text{を得る.}$$

($x = (x^1, \dots, x^n)$ のとき $\langle Ax, \text{grad} \rangle = \langle Ax, D \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ を意味する. 但し $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(V)$)

従って $\langle Ax, D \rangle - s \chi(A) \in \mathcal{J}[S]$ が成り立つから 1) が成り立っている

1') $\{ \langle Ax, D \rangle + s \chi(A) \} \Delta(x) = 0 \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}$
が成り立つ. (i.e. 1) $\Rightarrow$ 1')

ここで我々は次の二つの事を調べなくてはならない.

I) 如何なる条件のもとで 1) と 1') が同値になるか?

II) 如何なる条件のもとで 1') 2) 3) を満たす $\Delta(x)$ が存在するか?

その為にいくつかの概念を導入しよう.

$x_0 \in V$ に対し $V_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} T_{x_0} V / T_{x_0} G \cdot x_0 = V / \mathfrak{g} \cdot x_0$ を x_0 における normal vector space という.

V_{x_0} には isotropy subgroup $G_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{ g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0 \}$ が

作用する. V^* を V の dual とするとき

$V_{x_0}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in V^* \mid \langle \sigma \cdot x_0, y \rangle = 0\}$ を x_0 における conormal vector space という. この空間にも G_{x_0} が (但し 反傾的に) 作用する.

$T_{G_{x_0}}^* V \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x, y) \in V \times V^* \mid x \in G \cdot x_0, y \in V_x^*\}}$ を x_0 を通る orbit $G \cdot x_0$ の conormal bundle とよぶ. 但し — は $V \times V^*$ における Zariski-closure を表わす.

容易にわかるように

★ G が $T_{G_{x_0}}^* V$ に 概均質に作用する (i.e. Zariski-dense orbit が 同値 $\Downarrow$ 存在する)

★ $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V. である.

同値 $\Downarrow$

★ $T_{G_{x_0}}^* V = \overline{G(x_0, y_0)} \quad (\exists y_0 \in V^*),$ が 成り立つ.

さて (1.3) において $S=1$, $x \in V-S$ (i.e. $f(x) \neq 0$) とすれば

$$\langle Ax, \text{grad} \log f(x) \rangle = \delta \chi(A) \quad \text{for } \forall A \in \sigma$$

が 成り立つ 故, (G, V) が 概均質な事により $\sigma \cdot x = V \quad (x \in V-S)$

従って $\text{grad} \log f(x) \in V^*$ と 考えられる. すなわち

$$(1.4) \quad V-S \xrightarrow{\text{grad} \log f} V^* \quad \text{である.}$$

今 $V \times V^*$ の中の $(n+1)$ 次元の alg. subset W を

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x, \varepsilon \text{grad} \log f(x)) \mid x \in V-S, \varepsilon \in \mathbb{C}^*\}} \subset V \times V^* \quad \text{と}$$

定義する. 以上の定義のもとで I), II) に対する解答は次のようになる. $x_0 \in V$ に対し

$$I) \begin{cases} i) G \text{ が } T_{G \cdot x_0}^* V \text{ に 概均質に作用する (i.e. } T_{G \cdot x_0}^* V = \overline{G(x_0, y_0)} \\ \text{for } \exists y_0 \in V^*) \\ ii) T_{G \cdot x_0}^* V \subset W \end{cases}$$

の二条件が満たされる (x_0, y_0) の近傍で (すなわち micro-local に考えて) 1) と 1') は同値になる.

$$II) \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta \chi(A)} (A \in \mathfrak{g}_{x_0}) \text{ が } A \in \mathfrak{g}_{x_0}^{\text{def}} = \{A \in \mathfrak{g} \mid A \cdot x_0 = 0\} \text{ のとき}$$

方によらず一定ならば 1') 2) 3) をみたす

$$\Delta(x) \text{ が存在する. 但し } \alpha = \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta \chi(A)} \quad (\delta \chi(A) \neq 0 \text{ とする.})$$

$x_0 \in V$ に対し orbit $G \cdot x_0$ が i) ii) の条件を満たすとき 'good orbit' ということにする.

注) $x_0 \in V - S$ に対しては $\mathfrak{g}_{x_0}$ は ^{semi-simple} ~~reductive~~ になるから
(仮定及び松島の定理!) $\delta \chi(A) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ である.
よって $b(S)$ を調べるには singular orbit が重要である.

次の § で I), II) の証明をやり, § 3 で $x_0 \in S$ を与えたとき $G \cdot x_0$ が good orbit かどうかを判定するためのいくつかの定理を証明付きで述べ, § 4 で実際の計算例 (木村による) を示そう.

§2. 主定理の証明

前§のおわりに述べたことをまとめると

主定理. (G, V) を G が reductive で singular set S が既約超曲面である概均質ベクトル空間とする. $x_0 \in S$ について

i) $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は概均質ベクトル空間である.

ii) $T_{G_{x_0}}^* V \subset W$

iii) $\text{tr}_{V_{x_0}} A$ と $\delta\chi(A)$ の比が $A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ のとり方によらず一定である. (但し $\delta\chi(A) \neq 0$ とする)

の三条件が成り立てば $(S + \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}) \mid \ell(S)$ である.

(M. Sato)

これを証明するには前§で述べたことにより P.6 の I), II) を証明すればよい.

まず I) を証明する.

$P(x, D) \in \mathcal{Q}$ を $P(x, D) = P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) + \dots + P_0(x, D)$,

$P_j(x, D) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} \alpha_{j_1, \dots, j_n}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$ と表わしたとき

$P_m(x, y)$ を $P(x, D)$ の principal symbol とよぶ.

($P_0(x, y)$ と表わすことにする.)

$\mathfrak{g}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid \text{tr} A = 0\}$ とおき $V \times V^*$ の alg. subset

$\tilde{W}, W'$ を次のように定義する.

$\tilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid \langle Ax, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_0\}$

$W' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid P_0(x, y) = 0 \text{ for } \forall P \in \mathfrak{f}\}$

そのとき

Lemma 1. $\widetilde{W} \supset W' \supset W$ が成り立つ.

$\therefore) \quad \langle Ax, D \rangle \in \mathcal{I} \text{ for } \forall A \in \mathcal{A}_0$ かつ $\widetilde{W} \supset W'$ は明らか.

($\langle Ax, D \rangle$ の principal symbol は $\langle Ax, Y \rangle$ である.)

さて $P(x, D) \in \mathcal{I}$ とすれば

$$P(x, D)f^S = S^m P_m(x, \text{grad} f(x))f^{S-m} + S^{m-1}(\cdot) + \dots = 0$$

S は parameter かつ S の多項式として恒等的に成り立つから

$$P_m(x, \text{grad} f(x)) = 0 \quad x \in V - S \text{ とすれば } f(x) \neq 0 \text{ かつ } \frac{\varepsilon^m}{f(x)^m} \text{ を}$$

$$\text{掛ければ } P_m(x, \varepsilon \text{grad} \log f(x)) = 0 \quad \text{i.e. } P_0(x, \varepsilon \text{grad} \log f(x)) = 0$$

$$\therefore W' \supset \{(x, \varepsilon \text{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}. \text{ 両辺の Zariski-closure をとって}$$

$$W' \supset W \text{ を得る.} \quad //$$

Lemma 2. 次の二つを仮定する.

i) $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V., すなわち その gen. pt. を y_0 とするとき

$$T_{G_{x_0}}^* V = \overline{G(x_0, y_0)}$$

ii) $T_{G_{x_0}}^* V \subset W = \overline{\{(x, \varepsilon \text{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}}$

このとき $(x_0, y_0) \in W' \subset \widetilde{W}$ の近傍で $\widetilde{W}$ と W' は一致する.

Proof)

Lemma 1 より (x_0, y_0) の近傍で W と $\widetilde{W}$ が一致することを

いえるよい. ($(x_0, y_0) \in W$ をいうために仮定 ii) が 必要なのである)

$$\text{仮定 i) より } \dim \mathcal{G}(x_0, y_0) = \dim \overline{G(x_0, y_0)} = n (= \dim V)$$

(但し $A(x_0, y_0) = (Ax_0, {}^tAy_0)$ とする. $-{}^tAy_0$ とすべきだが $-y_0$ を考えれば同じ. $A \in \mathcal{O}_0$) よって $\dim \mathcal{O}_0 \cdot (x_0, y_0) \geq n-1$, すなわち

$$\exists A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{O}_0 \quad \text{s.t.} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 x_0 & \dots & A_{n-1} x_0 \\ {}^t A_1 y_0 & \dots & {}^t A_{n-1} y_0 \end{pmatrix} = n-1$$

従って $\tilde{W}$ は (x_0, y_0) の近傍で $2n - (n-1) = n+1$ 次元以下.

他方 $W \subset \tilde{W}$ で $\dim W = n+1$ かつ W は smooth ゆえ (x_0, y_0) の近傍で W と $\tilde{W}$ は一致する. //

Lemma 3 $\mathcal{Q} \supset \mathcal{I} \supset \tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{Q}P_1 + \dots + \mathcal{Q}P_N$ とする. $\forall P \in \mathcal{I}$ に対し その principal symbol を P_σ とするとき, (x_0, y_0) の近傍で $P_\sigma(x, y) = \sum a_j(x, y) P_{j\sigma}(x, y)$ と表めせたとする. 但し $a_j(x, y)$ は (x_0, y_0) の近傍で定義された holomorphic function, $P_\sigma(x, y), P_{j\sigma}(x, y)$ は x に関して holomorphic で y に関して多項式とする. そのとき

$$\tilde{\mathcal{I}} \Delta(x) = 0 \implies \mathcal{I} \Delta(x) = 0 \quad \text{である.}$$

略証)

$\mathcal{J}, \tilde{\mathcal{J}} \in \mathcal{I}, \tilde{\mathcal{I}}$ に対応する ideal (principal symbol の) とするとき $\mathcal{O} \otimes \mathcal{J} = \mathcal{O} \otimes \tilde{\mathcal{J}} \implies \mathcal{P} \otimes \mathcal{J} = \mathcal{P} \otimes \tilde{\mathcal{J}}$ を示せばよい. ($\mathcal{O}$ は hol. func の sheaf, $\mathcal{P}$ は pseudo-differential operator の sheaf). $P = \sum_{k=-\infty}^m P_k(x, D) \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{J}$ に対し $P_m(x, y) = R_m^1 P_{1\sigma} + \dots + R_m^N P_{N\sigma}$ (但し R_m^i は $P_{i\sigma}$ の階数を l_i とするとき $m-l_i$ 階) ならば $P - R_m^1(x, D) P_1(x, D) - \dots - R_m^N(x, D) P_N(x, D) = P'$ は $(m-1)$ 階, 以下くり返して $P = (\sum_{k=-\infty}^m R_k^1) P_1 + \dots + (\sum_{k=-\infty}^m R_k^N) P_N$ を得る. これが Pseudo-diff. operator になっていることを示すには収束性の

check が必要だが略す. $P_i \Delta(x) = 0$ ($1 \leq i \leq N$) ならば

$$P \Delta = (R^1 P_1 + \cdots + R^N P_N) \Delta = 0 \text{ を得る.} //$$

Proposition 1. P.8 の Lemma 2 の仮定が成り立つとする.

microfunction $\Delta(x)$ が (x_0, y_0) の近傍で

$$(\langle Ax, D \rangle + \alpha \delta \chi(A)) \Delta(x) = 0 \text{ for } \forall A \in \mathcal{G} \text{ ならば}$$

$$P(x, D, -\alpha) \Delta(x) = 0 \text{ for } \forall P(x, D, s) \in \mathcal{J}[S]$$

Proof)

$$\tilde{\mathcal{J}} = \{ \langle Ax, D \rangle \mid A \in \mathcal{G}_0 \} \text{ において Lemma 2 と Lemma 3}$$

を使えば, Prop 1 の仮定から $P(x, D) \Delta(x) = 0$ for $\forall P(x, D) \in \mathcal{J}$

を得る. $A_0 \in \mathcal{G}$ で $\delta \chi(A_0) = 1$ なるものをもってくる. (S が

超曲面という仮定から $\delta \chi \neq 0$ かいえ, A_0 の存在が保証される.) 然らば

$$\begin{cases} \langle A_0 x, D \rangle f^s = s \delta \chi(A_0) f^s = s f^s \\ \langle A_0 x, D \rangle \Delta(x) = -\alpha \Delta(x) \end{cases} \text{ を得る.}$$

$$P(s, x, D) f^s = \sum_j P_j(x, D) s^j f^s = \sum_j P_j(x, D) \langle A_0 x, D \rangle^j f^s = 0$$

$$\therefore \sum_j P_j(x, D) \langle A_0 x, D \rangle^j \in \mathcal{J} \quad \therefore \sum_j P_j(x, D) \langle A_0 x, D \rangle^j \Delta(x)$$

$$= P(-\alpha, x, D) \Delta(x) = 0 //$$

注) (x_0, y_0) の近傍で考えるという事は micro-local に考えるということに他ならない. よって microfunction や pseudo-diff. op. の概念が必要であるが, 主定理 そのものを述べるためには (表面上) これらの概念はでてこない.

次に II) の部分 (P.6) を証明しよう.

Lemma 4. G の homogeneous space $M = G/G_{x_0}$ ($x_0 \in M$) には G -相対不変な volume element ω が存在する: $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$

$\Downarrow$

G_{x_0} の $T_{x_0}M$ における表現の determinant が G のある character χ の G_{x_0} への制限になっている: $\det_{T_{x_0}M} g = \chi(g)$ for $\forall g \in G_{x_0}$.

(i.e. リー環でいえば G_{x_0} の $T_{x_0}M$ における表現の trace が σ の character $\delta\chi$ の G_{x_0} への制限になっている.)

Proof)

$\Downarrow$) $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ となる M の volume element $\omega(x)$ が存在したとし, $x_0 \in M$ の近傍で局所座標により $\omega(x) = \rho(x) \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}_{dx}$ と表わせたとする. $g \in G_{x_0}$ は x_0 を fix するから

$\omega(gx) = \rho(gx) d(gx)$ と表わせる. $gx = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$ とすると
 $d(gx) = \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x)\right) dx$, $gx_0 = x_0$. ゆえ

$$\chi(g)\rho(x)dx|_{x_0} = \omega(gx)|_{x_0} = \rho(x_0) \cdot \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right) dx|_{x_0}.$$

$$\therefore \chi(g) = \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right) \text{ for } g \in G_{x_0}, \quad \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right) = \det_{T_{x_0}M} g \text{ より}$$

$$\chi|_{G_{x_0}} = \det_{T_{x_0}M} \text{ を得る.}$$

$$\Uparrow) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^{-1}} & M \\ \underbrace{x=gx_0} \mapsto & & \underbrace{x_0} \end{array} \quad \text{は} \quad T_x M \xrightarrow{J_{g^{-1}}} T_{x_0} M \text{ を induce する } p_g^n$$

$$\text{これはまた更に } T_{x_0}^* M \xrightarrow{J_{g^{-1}}^*} T_{gx_0}^* M \text{ を与える.}$$

$x_0 \in M$ における n -form を ω_0 とする: $\omega_0 \in \bigwedge^n T_{x_0}^* M$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^n T_{x_0}^* M & \xrightarrow{(Jg_1^*)^n} & \bigwedge^n T_{gx_0}^* M \\ \downarrow \omega_0 & \longmapsto & \downarrow (Jg_1^*) \omega_0 \end{array}$$

これで M 上の n -form が一応つくれたが $gx_0 = g'x_0$ であっても $g \neq g'$ の可能性はある。そのとき $(Jg_1^*) \omega_0 \neq (Jg_1'^*) \omega_0$ となれば不都合。

しかしながら G のある character χ があって $\chi|_{G_{x_0}} = \det T_{x_0} M$ となっているならば, $\chi(g)(Jg_1^*) \omega_0 = \chi(g')(Jg_1'^*) \omega_0$ if $gx_0 = g'x_0$ がいえる。実際 $x = gx_0 = g'x_0$ とすれば $g' = gg_1$, $g_1 \in G_{x_0}$ とかけるから $\chi(g_1)(Jg_1^*) \omega_0 = \omega_0$ for $\forall g_1 \in G_{x_0}$ を示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g=g_1} & M \quad (g_1 \in G_{x_0}) \\ \downarrow x & \longmapsto & \downarrow gx \\ T_{x_0} M & \xrightarrow{(d\varphi)_{x_0} = Jg_1} & T_{gx_0} M \end{array} \quad \text{ゆえ}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0} \longmapsto \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{gx_0}$$

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}^* M & \xrightarrow{(d\varphi^*)^n} & T_{gx_0}^* M \\ \downarrow dx_i & \longmapsto & \downarrow \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) dx_j \end{array} \quad \text{を得る。} \quad \det\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)\right) = (\det_M g_1)^{-1} = \text{注意}$$

すなわち $(Jg_1^*) \omega_0 = (\det_M g_1)^{-1} \omega_0$ となるから $\chi(g_1) (Jg_1^*) \omega_0 = \omega_0$ 。ここで得られた n -form ω が G -相対不変である: $\omega(gx) = \chi(g) \omega(x) //$

sum 4 の例.

余談) 例えば $G = SL(2, \mathbb{R})$ が $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ と

作用する場合を考える。このとき G -相対不変な volume element は存在しない。

実際 $\omega(x) = p(x) dx$ が $\omega(gx) = \chi(g) \omega(x)$ となれば $g = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考えることにより

$p(x) = e^{ax+b}$ の形。他方 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考えると $e^{-\frac{a}{x}+b} \frac{dx}{x^2} = \chi(1, -1) e^{ax+b} dx$ 矛盾。

よって $\text{tr}_{T_{x_0} M} A = 2a$ for $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ($x_0 = 0$ 原点), したがって $\mathfrak{g}$ の character $\delta \chi \equiv 0$.
 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Lemma 5. $x_0 \in V$ を通る G -orbit $G \cdot x_0$ の上に G -相対不変な volume element ω ($\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$) が存在すれば V 上の $G \cdot x_0$ に support をもつ 超関数 $\Delta(x)$ で G -相対不変なものが存在する. ($\Delta(gx) = \frac{\chi(g)}{\det_V g} \Delta(x)$)

(Proof)

distribution の言葉で説明する. $f' \in V_{\mathbb{R}} (V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$ 上の compact supported C^∞ -function とするとき

$$f' \mapsto \int_{G \cdot x_0} f'|_{G \cdot x_0} \omega = \int_V f(x) \Delta(x) dx_1 \cdots dx_n \quad \text{は } G \cdot x_0 \text{ に}$$

support をもつ distribution $\Delta(x)$ を定義する. (これは algebraic hyperfunction である.) これから G -相対不変なことを示そう.

$$\begin{aligned} f'_g(x) = f'(gx) \text{ とおくと} \quad & \int_{G \cdot x_0} f'(x_1) \omega(x_1) = \int_V f(x) \Delta(x) dx \\ & \parallel \\ & \int_{G \cdot x_0} f'_g(x_1) \omega(gx_1) \quad \int_V f'_g(x) \Delta(gx) d(gx) \\ & \parallel \qquad \parallel \\ & \chi(g) \int_{G \cdot x_0} f'_g(x_1) \omega(x_1) \quad (\det_V g) \int_V f'_g(x) \Delta(x) dx \\ & \parallel \qquad \parallel \\ & \chi(g) \int_V f'_g(x) \Delta(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{従って } \Delta(gx) = \frac{\chi(g)}{\det_V g} \Delta(x) \text{ を得る.}$$

Proposition 2. $x_0 \in V$ における isotropy subalgebra $\mathfrak{f}_{x_0}$ の元 A のとり方によらず $\text{tr}_{V_{x_0}} A$ と $\text{sx}(A)$ の比が一定である

仮定する: $\text{tr}_{V_{x_0}} A = \alpha \delta \chi(A)$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ (このとき $\alpha \in \mathbb{Q}$ と
なる) そのとき $G \cdot x_0$ に support をもつ (i.e. $f \Delta = 0$ if $x \in S$) V の
超関数 $\Delta(x)$ で $\{ \langle Ax, \text{grad} \rangle + \alpha \delta \chi(A) \} \Delta(x) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}$
となるものがある.

Proof) $\text{tr}_{V_{x_0}} = \text{tr}_V - \text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}}$ ($\mathfrak{g}_{x_0} = T_{x_0} G x_0$) であるから
仮定より $\text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = \text{tr}_V A - \alpha \delta \chi(A)$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ を得る.
群の言葉でいえば $\det_{T_x G x} g = (\det_V g) \cdot \chi(g)^{-d}$ である. (すべ
て G の universal covering group, $G x_0$ の covering space で考える)
よって Lemma 4 により $G x_0$ 上に $\omega(gx) = (\det_V g) \cdot \chi(g)^{-d} \omega(x)$
なる volume element が存在する. 従って Lemma 5 により
 $\Delta(gx) = \frac{(\det_V g) \chi(g)^{-d}}{\det_V g} \Delta(x) = \chi(g)^{-d} \Delta(x)$ なる超関数 $\Delta(x)$ がある.
この式を t (但し $g = \exp tA$, $A \in \mathfrak{g}$) に関して微分して $t=0$
とあくと $\langle Ax, \text{grad} \rangle \Delta(x) = -\alpha \delta \chi(A) \Delta(x)$ を得る. //

以上で II) が証明され, 結局 主定理 (P. 7) の証明が
完了した. 主定理の条件のうち i) と iii) は具体的に
計算可能な量である. 特に iii) の比が一定ということは
$$\frac{\text{tr}_{\mathfrak{g}_{x_0}} A}{\text{tr}_V A} = \left(\frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta \chi(A)} \right) \frac{\deg f}{\dim V} - 1$$
 が一定という事と同じで, これは
 $\mathfrak{g}_{x_0}$ を求めれば計算できる. しかし ii) はそのままではわからない.
よって ii) が成り立つための条件を 次の § で調べよう.

§3. Singular orbit の conormal bundle が W に含まれる 為の条件

$x_0 \in S$ をとり $x = x_0 + \varepsilon x'$ とおくとき

$f(x) = \varepsilon^k f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(\ast)$, $f_{x_0}(x') \neq 0$ によって $f(x)$ の $x_0 \in V$ における localization $f_{x_0}(x')$ を定義する. x' が勝手に動くとき x もそうであるから このような f_{x_0} は必ず存在する.

このとき f_{x_0} が k 次の斉次多項式であることは容易にわかる.

Lemma 1. 相対不変式 $f(x)$ の character を χ とするとき, f の $x_0 \in V$ における localization f_{x_0} は G_{x_0} の作用に関して character χ に対応する相対不変式で, しかも $f_{x_0}(x') = f_{x_0}(x'')$ if $x' \equiv x'' \pmod{\mathfrak{g} \cdot x_0}$ が成り立つ. よって f_{x_0} は (G_{x_0}, V_{x_0}) の相対不変式である.

Proof) $g \in G_{x_0}$, $x = x_0 + \varepsilon x'$ とすると, $g \cdot x = x_0 + \varepsilon g x'$ かつ

$$f(gx) = \varepsilon^k f_{x_0}(gx') + \varepsilon^{k+1}(\ast)$$

$$\stackrel{\parallel}{\chi(g)} f(x) = \varepsilon^k \chi(g) f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(\ast) \quad \text{両辺を } \varepsilon^k \text{ で}$$

わって $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば $f_{x_0}(gx') = \chi(g) f_{x_0}(x')$ を得る.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ に対し $\exp \varepsilon A \in G$ かつ

$$f(\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x')) = \exp \varepsilon \chi(A) \cdot f(x_0 + \varepsilon x')$$

そして $\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x') = x_0 + \varepsilon \{x' + Ax_0\} + \varepsilon(\ast)$ かつ

両辺を展開すれば $\varepsilon^k f_{x_0}(x' + Ax_0) + \varepsilon^{k+1}(\dots) = \varepsilon^k f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(\dots)$

よって 両辺を ε^k で割って $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$f_{x_0}(x' + Ax_0) = f_{x_0}(x') \quad (A \in \mathfrak{g}) \quad //$$

Lemma 1 の Cor. (G_{x_0}, V_{x_0}) が P.V. ならば, character χ に対応する 相対不変多項式が定数倍を除いて 唯一つ 存在する.

$\therefore$) 概均質ベクトル空間の相対不変式は character で定まることより.

★ ここで大切な事は, もとの相対不変式の具体的な形を知らなくても, localization の具体的な形が この Cor. からわかる場合が多いことである.

Lemma 2. (G, V) を勝手な (何も仮定しない) 概均質ベクトル空間とする. S をその singular set, f を相対不変式の 一つ とする. そのとき $V - S \xrightarrow{\text{grad log } f} V^*$ (P.5 参照) が generically surjective (i.e. image の Zariski-closure が 全体と一致) であることと $H \log f (= \text{Hessian of } \log f) \neq 0$ とは同値. $\deg f \geq 2$ なる $Hf (= \text{Hessian of } f) \neq 0$ と同値.

Proof) $\varphi(x) = \text{grad log } f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in V^*$ とおくと $\varphi_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \log f = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1, \dots, n)$ である. f が相対不変式であることより $\exists x \in V - S$ s.t. $\det(d\varphi)_x \neq 0$ ならば $\forall x \in V - S$ につい

ても なる. ($\because \det(d\varphi)_{gx} = (\det v_g)^{-2} \cdot \det(d\varphi)_x$)

$$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right) = \det\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \log f\right) = \text{Hess. of } \log f \text{ 中}$$

前半は証明された. $r = \deg f > 1$ とすると

$$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)\right) = \det\left(\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_n}, & \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}, & \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 0, & \dots, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}, & \dots, & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}, & \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, & \dots, & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}, & \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n}, & 1 \end{vmatrix} \quad *$$

$$\text{ここで Euler の恒等式により } (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}) \frac{\partial f}{\partial x_i} = (r-1) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}) f = r f \quad \text{中}$$

$$x_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \\ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{r-1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{r-1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ r \end{vmatrix}$$

従って

$$* = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) \cdot \frac{1}{f(x)^n} \left(1 - \frac{r}{r-1}\right)$$

$$\therefore \det(d\varphi)_x = \frac{-1}{r-1} \cdot \frac{H_f(x)}{f(x)^n} \quad \therefore \det(d\varphi)_x \neq 0 \leftrightarrow H_f(x) \neq 0 //$$

$$\star \deg f = 1 \text{ のときは } \det(d\varphi)_x \neq 0 \iff \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$$

Proposition 1. $x_0 \in V$ に対し (G_{x_0}, V_{x_0}) が P.V. かつ $\dim V_{x_0} = 1$ かつ $\dim V_{x_0} \geq 2$ かつ localization f_{x_0} の Hessian $\neq 0$ ならば $T_{G_{x_0}}^* V \subset W \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}$

(Proof)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x' \in V - S \text{ とする. } \operatorname{grad}_x \log f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_{x'} \log f(x_0 + \varepsilon x') \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_{x'} \log \varepsilon^k f_{x_0}(x') \left\{ 1 + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j h_j(x') \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x') + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_{x'} \log \left\{ 1 + \varepsilon \sum_{j \geq 1} \varepsilon^{j-1} h_j(x') \right\} \end{aligned}$$

従って

$$W \ni (x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = (x_0 + \varepsilon x', \operatorname{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x') + \operatorname{grad}_{x'} \log \{1 + \varepsilon(\cdot)\})$$

ここで $\varepsilon \mapsto 0$ とすれば, W は closed かつ $(x_0, \operatorname{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る. さて (G_{x_0}, V_{x_0}) の singular set を S_{x_0} とするとき $x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ なら $f_{x_0}(x') \neq 0$ かつ $f(x_0 + \varepsilon x') \neq 0$ (かつ $\varepsilon \neq 0$). S は超曲面であつたから $x_0 + \varepsilon x' \in V - S$ かつ $\forall x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ に対して

$(x_0, \operatorname{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る. 仮定と Lemma 2 より

$$V_{x_0} - S_{x_0} \xrightarrow{\operatorname{grad} \log f_{x_0}} V_{x_0}^* \text{ は generically surjective かつ}$$

$$(x_0, V_{x_0}^*) \subset W. \quad (gx, g^* \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = (gx, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(gx))$$

かつ $(x, y) \in W$ なら $g(x, y) = (gx, g^*y) \in W$ かつ $\forall g$. 従って

$$(gx_0, g^* V_{x_0}^*) = (gx_0, V_{gx_0}^*) \subset W \quad \therefore T_{G_{x_0}}^* V \subset W //$$

注) $\dim V_{x_0} \geq 2$ かつ $\deg f_{x_0} = 1$ なら $\operatorname{grad} \log f_{x_0}$ は gen. surj. には ならない. 更に

$(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. になっていることもいえる. すなわち localization の Hessian が消えなければ good-orbit である.

Corollary : $x_0 \in V$ に対し (G_{x_0}, V_{x_0}) が 既約正則極均質ベクトル空間 なら Gx_0 は good orbit である.

∴) 既約正則 P.V. の任意の相対不変多項式 は その Hessian $\neq 0$ より
 $\star G_{x_0} \hookrightarrow GL(V_{x_0})$ の image $\overline{G_{x_0}}$ が reductive で singular set S_{x_0} が 既約超曲面 ならば good orbit であることがわかる.

$x_0 \in V$ における localization の Hessian $\neq 0$ なら good-orbit であることがわかったが, 次に Hessian $= 0$ になっている場合の判定法を考えよう.

G が reductive と仮定しているから, G の V への作用と, その V^* への反傾的な作用は 互いに G の 自己同型 (内部とは限らぬ) でうつりあえる. すなわち $(G, V) \cong (G, V^*)$ as P.V. である. (すなわち (G, V) と (G, V^*) は 同じもの と 考えることができる)

さて $x_0 \in V$ に対し $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. であると仮定すると その generic pt y_0 があるが, G^*y_0 を V^* の orbit と 考えて ($V = (V^*)^*$ と考える) conormal bundle $T_{G^*y_0}^* V^* (< V \times V^*)$ を 作ったとき, $T_{Gx_0}^* V = T_{G^*y_0}^* V^*$ となることを まず示そう.

定義 かつ $T_{G^*y_0}^* V^* = \{(x, y) \in V \times V^* \mid y \in G^*y_0, \langle x, \eta^*y \rangle = 0\}$

で $\langle x_0, \eta^*y_0 \rangle = \langle \eta x_0, y_0 \rangle = 0$ より $(x_0, y_0) \in T_{G^*y_0}^* V^*$.

conormal bundle は G 軌道だから $T_{G^*x_0}^* V = \overline{G(x_0, y_0)} \subset T_{G^*y_0}^* V^*$

$\dim G(x_0, y_0) = n$ ゆえ V^* の方からみて conormal vector space $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$

は P.V. で $x_0 \in (V_{y_0}^*)^* \subset V$ が gen. pt. i.e. $T_{G^*y_0}^* V^* = \overline{G(x_0, y_0)}$

よって $T_{G^*x_0}^* V = \overline{G(x_0, y_0)} = T_{G^*y_0}^* V^*$ を得る.

このことある V の orbit $G \cdot x_0$ と V^* の orbit $G^* \cdot y_0$ が対応する

事がわかる. (G, V) と (G, V^*) を同一視すれば $G^* \cdot y_0$ は V

のある orbit $G \cdot x_0'$ と同一視できる. このとき $G \cdot x_0$ と $G \cdot x_0'$ は

互いに conormal bundle で対応する orbits という.

Proposition 2. $G \cdot x_0$ と $G \cdot x_0'$ を conormal bundle で対応する orbits とすれば

$$T_{G^*x_0}^* V \subset W \iff T_{G^*x_0'}^* V \subset W$$

Proof) 上に述べた議論から $W \subset V \times V^*$ が V と V^* に
関して対称になっている事を示せば十分.

Lemma 3.

$$W = \{(x, y) \in V \times V^* \mid x \in V-S, y \in V^*-S^*, \langle \eta_0 x, y \rangle = \langle x, \eta_0^* y \rangle = 0\}$$

(— は Zariski-closure in $V \times V^*$)

Proof) $\subset$ の証明. (G, V) は正則ゆえ $\text{grad log } f(x) \in V^*-S^*$
($x \in V-S$) よって $\forall \varepsilon$ に対して $\varepsilon \text{ grad log } f(x) \in V^*-S^*$, 所以

(1.3) より $\langle Ax, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x) \rangle = 0$ for $\forall A \in \mathcal{O}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{tr} A = 0\}$

の証明:

$x \in V - S$, $y \in V^* - S^*$, $\langle \mathcal{O}_0 x, y \rangle = 0$ とする.

$y_1 = \operatorname{grad} \log f(x)$ とおくと $\langle Ax, y_1 \rangle = \delta x(A) = 0$ for $\forall A \in \mathcal{O}_0$ かつ

もし $\langle x, y_1 \rangle = 0$ とすると $\langle \mathcal{O} x, y_1 \rangle = \langle V, y_1 \rangle = 0$ より $y_1 = 0$

他方 $y_1 \in V^* - S^*$ かつ矛盾. よって $\langle x, y_1 \rangle \neq 0$. $\varepsilon = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, y_1 \rangle}$ と

おくと $\langle \mathcal{O} x, y - \varepsilon y_1 \rangle = \langle V, y - \varepsilon y_1 \rangle = 0$

$\therefore y = \varepsilon y_1 = \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)$ //

このことから Prop 2 が証明された.

多くの場合 Prop 1 と Prop 2 によって conormal bundle が W に含まれることが証明できるが, Prop 1 と Prop 2 の条件がともに成り立たない場合, すなわち conormal bundle で対応する orbits の localization の Hessian が両方とも消えてしまう場合でも, conormal bundle が W に含まれる事を証明できるときがある.

$x_0 \in S$ における localization が x_n^k という形をしている場合を考えよう. すなわち $f(x_0 + \varepsilon x) = \varepsilon^k \cdot C x_n^k + \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x) + \dots + \varepsilon^{\deg f} f(x)$.

$\dim V_{x_0} \geq 2$ とすれば, 明らかに $\operatorname{Hess} f_{x_0} = 0$ である.

ここで $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ なる形のものに制限して考えても

$f(x_0 + \varepsilon x') \neq 0$ である. 実際 $\{x \in V \mid f(x) = 0\} \cap \{x \in V \mid x_n = x_0\} \neq \emptyset$

(G reductive, S 既約超曲面, $\dim V \geq 2$ という仮定から $\text{Hess } f \neq 0$, 特に $\deg f \geq 2$, f 既約 がいえるから)

$V^{(1)} = \{x \in V \mid (x - x_0)_n = 0\}$ または その V_{x_0} への image を $V_{x_0}^{(1)}$ と記す事にすると $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ には character χ に対応する相対不変式が存在する. 特に $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ が 概均質 ならば, それは定数倍を除いて unique である. それは明らかに $(k+1)$ 次以上であるが, 特に $(k+1)$ 次になっている場合を考えよう. すなわち

$$f(x_0 + \varepsilon x') = \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x') + \varepsilon^{k+2}(\dots), \quad f_{x_0}^{(1)}(x') \neq 0, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

そこで $x = (x', x_n)$ とおき $f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', x_n)$ を x_n に関して

Taylor 展開すると

$$f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + f_{x_0}^{(1)'}(x', 0) \cdot \frac{x_n}{1!} + \dots \quad \text{となる. 但し ' は } x_n \text{ に}$$

よる微分を表わす. よって $x = (x', x_n)$ とするとき

$$\text{grad}_x f_{x_0}^{(1)}(x) = \left(\frac{\text{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n)}{\frac{\partial}{\partial x_n} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n)} \right) = \left(\frac{\text{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(\ast)}{f_{x_0}^{(1)'}(x', 0) + x_n(\ast\ast)} \right)$$

となる.

一般に $x \in V - S$ に対し $\varphi(x) = \text{grad} \log f(x) \left(= \frac{\text{grad } f(x)}{f(x)} \right)$ と

おけば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $(x, \varepsilon \varphi(x)) \in W$ となる事に注意しよう.

$$\text{grad } f(x_0 + \varepsilon x) = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad}_x f(x_0 + \varepsilon x)$$

$$= \varepsilon^{k-1} \cdot C \cdot k \cdot x_n^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^k \left(\frac{\text{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(\ast)}{f_{x_0}^{(1)'}(x', 0) + x_n(\ast\ast)} \right) + \varepsilon^{k+1}(\ast\ast\ast)$$

従って

$$\varepsilon \varphi(x_0 + \varepsilon x) = \frac{\varepsilon^k \cdot C \cdot k \cdot x_n^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\text{grad}_{x'} f_{x_0}(x', 0) + x_n(*)}{f_{x_0}^{(1)'}(x', 0) + x_n(**)} \right) + \varepsilon^{k+2}(***)}{\varepsilon^k \cdot C \cdot x_n^k + \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x) + \varepsilon^{k+2}(\dots)}$$

特に $x = \begin{pmatrix} x' \\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}} x_n \end{pmatrix}$ ($k \geq 2$) とおくと

$$\varepsilon \varphi(x_0 + \varepsilon \begin{pmatrix} x' \\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}} x_n \end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix} \text{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + \varepsilon(*) \\ C \cdot k \cdot x_n^{k-1} + f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + \varepsilon(*) \end{pmatrix}}{f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}(*) \quad (* \text{の負の項あり})} \quad \text{ゆえ}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \varphi(x_0 + \varepsilon \begin{pmatrix} x' \\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}} x_n \end{pmatrix}) = \left(\frac{\text{grad}_{x'} \log f_{x_0}^{(1)}(x', 0)}{x_n^{k-1} \cdot C \cdot k \cdot \frac{1}{f_{x_0}^{(1)}(x', 0)}} \right) \quad (k \geq 2)$$

すなわち $(x_0, \left(\frac{\text{grad}_{x'} \log f_{x_0}^{(1)}(x', 0)}{x_n^{k-1} \cdot C \cdot k \cdot \frac{1}{f_{x_0}^{(1)}(x', 0)}} \right)) \in W$ ($\because W$ closed)

ここで x_n は任意にとれる (但し $k \geq 2$ と仮定) から $\text{grad}_{x'} \log f_{x_0}^{(1)}(x', 0)$ が generically surjective なる (i.e. $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ の χ に対応する相対不変式が $(k+1)$ 次でかつ Hessian $\neq 0$) $(x_0, V_{x_0}^*) \subset W$, $\therefore T_{G \cdot x_0}^* V \subset W$ がいえる。以上をまとめて

Proposition 3. $x_0 \in V$ における localization f_{x_0} が x_n^k ($k \geq 2$) の形で, $V_{x_0}^{(1)} = \{x \in V_{x_0} \mid x_n = 0\}$ とおくとき $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ が概均質で, χ に対応する相対不変式の次数が $(k+1)$ 次, かつその Hessian $\neq 0$ とする。そのとき $T_{G \cdot x_0}^* V \subset W$ である。

§4. $GL(7)$ の 3 次 skew-tensor 表現 $(GL(7), \square)$ の $\mathfrak{h}$ -関数

以上の理論を実際の空間に適用して $\mathfrak{h}$ -関数を計算してみよう。既約正則な P.V. $GL(7)_{\square}$ を例にとろう。

$GL(7)$ の base を $u_1, \dots, u_7$ とするとき $(GL(7), \square)$ は $u_{i_1} \wedge u_{j_1} \wedge u_{k_1}$ ($1 \leq i_1 < j_1 < k_1 \leq 7$) を base とする 35 次元の空間である。

Orbits は全部で 10 個ある。([] 参照) その代表点と次元を列挙すると

- I) 0 (0 次元), II) $u_{11} \wedge u_{21} \wedge u_{31}$ (13 次元), III) $u_{11} \wedge (u_{22} \wedge u_{42} + u_{32} \wedge u_{52})$ (20 次元) IV) $u_{11} \wedge (u_{22} \wedge u_{52} + u_{32} \wedge u_{62} + u_{42} \wedge u_{72})$ (21 次元)
 V) $u_{11} \wedge u_{22} \wedge u_{62} + u_{22} \wedge u_{32} \wedge u_{42} + u_{32} \wedge u_{11} \wedge u_{52}$ (25 次元)
 VI) $u_{11} \wedge u_{22} \wedge u_{32} + u_{42} \wedge u_{52} \wedge u_{62}$ (26 次元)
 VII) $u_{22} \wedge u_{32} \wedge u_{42} + u_{11} \wedge (u_{22} \wedge u_{52} + u_{32} \wedge u_{62} + u_{42} \wedge u_{72})$ (28 次元)
 VIII) $u_{11} \wedge u_{32} \wedge u_{42} + u_{22} \wedge u_{52} \wedge u_{62} + u_{11} \wedge u_{22} \wedge u_{72}$ (31 次元)
 IX) $u_{22} \wedge u_{32} \wedge u_{52} + u_{32} \wedge u_{42} \wedge u_{62} + u_{11} \wedge u_{22} \wedge u_{72} - u_{11} \wedge u_{42} \wedge u_{52}$ (34 次元)
 X) $u_{22} \wedge u_{32} \wedge u_{42} + u_{52} \wedge u_{62} \wedge u_{72} + u_{11} \wedge (u_{22} \wedge u_{52} + u_{32} \wedge u_{62} + u_{42} \wedge u_{72})$ (35 次元)

ここで I) ~ IX) が singular orbits である。

代表点は isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ が標準形になるようにとてある。相対不変式は 7 次式である。([], [] 参照)

各々の orbits を調べてみよう。

I) 0次元

ここでは $G_{x_0} = G$, $V_{x_0} = V$, $V_{x_0}^* = V^*$ ゆえ P.19 の Cor. より good orbit である事がわかる.

$$(1.1) \text{より } \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta X(A)} = \frac{\text{tr}_V A}{\delta X(A)} = \frac{\dim V}{\deg f} \quad \text{従って この orbit かゝるは}$$

$$\phi(s) \text{の因子 } (s + \frac{\dim V}{\deg f}) = (s + \frac{35}{7}) = (s+5) \text{ が得られる.}$$

注) 既約正則概空間 $\underbrace{\text{ベクトル空間}}_{\text{ベクトル}}$ に対しては 原点と $(s + \frac{\dim V}{\deg f})$ が常に対応する.

(G, V^*) の generic pt. は V の gen. pt. でもあるから conormal bundle による対応 (P.20) は $I) \longleftrightarrow X)$ である.

II) 13次元

$$G_{x_0} \sim (SL(3) \times GL(4)) \cdot (G_a)^{12} \quad \text{であり}$$

(G_{x_0}, V_{x_0}) は V_{x_0} の base $w_1, \dots, w_{22}$ を 適当にとれば

$$(w_1, \dots, w_{22}) \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} SL(3) \times GL(4) \\ \square \otimes \square \end{array} & * \\ \hline 0 & \begin{array}{c} GL(4) \\ \square \end{array} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 18 \\ \} 4 \end{array} \right\} \text{となる.}$$

$$\frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta X(A)} = 4 \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0} \quad \text{ゆえ } (s+4) \text{ と対応する. good orbit}$$

になることは conormal bundle で $II) \longleftrightarrow IX)$ と対応すること (これは IX) の方から調べると容易) 及び §3 の Prop 1 (IX) の $\text{codim} = 1$) と

Prop 2 より 得られる. $\deg f_{x_0} = 5$ である.

III) 20次元

$$G_{X_0} \sim (GL(1) \times Sp(2) \times GL(2)) \cdot U(14)$$

注) $U(m)$ は m 次元 unipotent 群 の 意味.

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(u_2 \wedge u_4 \wedge u_6 - u_3 \wedge u_5 \wedge u_6), \omega_2 = u_2 \wedge u_3 \wedge u_6, \omega_3 = u_2 \wedge u_5 \wedge u_6$$

$$\omega_4 = u_3 \wedge u_4 \wedge u_6, \omega_5 = u_4 \wedge u_5 \wedge u_6, \omega_6 = \frac{1}{2}(u_2 \wedge u_4 - u_3 \wedge u_5) \wedge u_7$$

$$\omega_7 = u_2 \wedge u_3 \wedge u_7, \omega_8 = u_2 \wedge u_5 \wedge u_7, \omega_9 = u_3 \wedge u_4 \wedge u_7, \omega_{10} = u_4 \wedge u_5 \wedge u_7, \omega_{11} = u_1 \wedge u_6 \wedge u_7$$

$$\omega_{12} = u_2 \wedge u_6 \wedge u_7, \omega_{13} = u_3 \wedge u_6 \wedge u_7, \omega_{14} = u_4 \wedge u_6 \wedge u_7, \omega_{15} = u_5 \wedge u_6 \wedge u_7 \quad \text{は}$$

$\sqrt{X_0} (V_{X_0}^*)$ の base 上 あり (G_{X_0}, V_{X_0}) は

$$(\omega_1, \dots, \omega_{15}) \begin{pmatrix} GL(1) \times Sp(2) \times GL(2) & \emptyset & \times \\ \square \otimes \square \otimes \square & & \\ 0 & GL(1) \times GL(2) & \times \\ & \square^* \otimes \square & \\ 0 & 0 & GL(1) \times Sp(2) \times GL(2) \\ & & \square \otimes \square \otimes \square \end{pmatrix}$$

の形をしてあり $V_{X_0} \ni x = \sum_{i=1}^{15} x_i \omega_i$ とすると, localization f_{X_0}

は

$$\begin{aligned} f_{X_0}(x) = & (x_1 x_7 - x_2 x_6) x_{14} x_{15} + (x_1 x_9 - x_4 x_6) x_{12} x_{15} - (x_2 x_9 - x_4 x_7) x_{15}^2 \\ & - (x_4 x_{10} - x_5 x_9) x_{12}^2 - (x_2 x_{10} - x_5 x_7) x_{12} x_{14} + (x_1 x_{10} - x_5 x_6) x_{12} x_{13} \\ & - (x_2 x_{10} - x_5 x_7) x_{13} x_{15} + (x_2 x_8 - x_3 x_7) x_{14}^2 - (x_3 x_9 - x_4 x_8) x_{12} x_{14} \\ & - (x_1 x_8 - x_3 x_6) x_{13} x_{14} + (x_3 x_9 - x_4 x_8) x_{13} x_{15} + (x_3 x_{10} - x_5 x_8) x_{13}^2 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{X_0} = 0$ かつ $\text{Hess } f_{X_0} = 0$ となる。

しかし conormal bundle で III) $\leftrightarrow$ VIII) が対応し (これは

VIII) の方が調べるのが容易) VIII) が good orbit であるから §3 の Prop 2 により good orbit であることがわかるが, $\frac{h_{X_0} A}{\delta \chi(A)} (A \in \mathfrak{o}_{X_0})$ は一定にならない。

IV) 21次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times Sp(3)) \cdot (G_a)^6$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = GL(1) \times Sp(3)$ は既約正則概均質ベクトル空間
 $\square \otimes \square$

ゆえ P.19の Cor. より IV) は good orbit である。

$$\frac{t_{V_{x_0}} A}{S(A)} = \frac{7}{2} \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0} \text{ ゆえ } (S + \frac{7}{2}) \text{ と対応する.}$$

conormal bundle による対応は IV) $\longleftrightarrow$ VI) である。

V) 25次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times GL(1) \times SL(3)) \cdot U(14)$$

$$\omega_1 = u_4 \wedge u_5 \wedge u_6, \omega_2 = u_1 \wedge u_4 \wedge u_7, \omega_3 = u_2 \wedge u_5 \wedge u_7, \omega_4 = u_3 \wedge u_6 \wedge u_7,$$

$$\omega_5 = (u_1 \wedge u_5 + u_2 \wedge u_4) \wedge u_7, \omega_6 = (u_2 \wedge u_6 + u_3 \wedge u_5) \wedge u_7, \omega_7 = (u_1 \wedge u_6 + u_3 \wedge u_4) \wedge u_7$$

$$\omega_8 = u_4 \wedge u_5 \wedge u_7, \omega_9 = u_5 \wedge u_6 \wedge u_7, \omega_{10} = u_4 \wedge u_6 \wedge u_7 \quad \text{が } V_{x_0}, \text{ または } V_{x_0}^*$$

の base であり (G_{x_0}, V_{x_0}) を この base で表現すると

$$(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \begin{array}{|c|c|c|} \hline GL(1) \times GL(1) \times SL(3) & 0 & \times \\ \hline \square \otimes \square \otimes \square & GL(1) \times GL(1) \times SL(3) & \times \\ \hline 0 & \square^* \otimes \square \otimes \square & \\ \hline 0 & 0 & GL(1) \times GL(1) \times SL(3) \\ \hline & & \square \otimes \square \otimes \square \\ \hline \end{array}$$

$$x = \sum_{i=1}^{10} x_i \omega_i \text{ とすれば}$$

$$f_{x_0}(x) = 2(x_5 x_9 x_{10} + x_6 x_8 x_{10} - x_7 x_8 x_9) - (x_4 x_8^2 - x_2 x_9^2 - x_3 x_{10}^2)$$

で $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_0} = 0$ ゆえ $\text{Hess } f_{x_0} = 0$ となってしまう。 $\frac{t_{V_{x_0}} A}{S(A)}$ は一定にならない。

conormal bundle で V) $\longleftrightarrow$ VII) が対応する。

VI) ²⁶次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times SL(3) \times SL(3)) \cdot (G_a)^6$$

$$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \begin{matrix} GL(1) \times SL(3) \times SL(3) \\ \square \otimes \square \otimes \square \end{matrix} \text{ は既約正則 P.V. かつ VI) は}$$

good orbit である. ($\deg f_{x_0} = 3$)

$$\frac{\text{tr}_{x_0} A}{\delta X(A)} = 3 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_{x_0} \text{ かつ } (5+3) \text{ と対応する.}$$

conormal bundle による対応は VI) $\leftrightarrow$ IV) である.

VII) 28次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times SL(3)) \cdot U(12)$$

$$\omega_1 = (u_2 \wedge u_5 - u_3 \wedge u_6) \wedge u_7, \quad \omega_2 = (u_3 \wedge u_6 - u_4 \wedge u_7) \wedge u_5$$

$$\omega_3 = (u_2 \wedge u_5 - u_4 \wedge u_7) \wedge u_6, \quad \omega_4 = u_2 \wedge u_6 \wedge u_7, \quad \omega_5 = u_4 \wedge u_5 \wedge u_6, \quad \omega_6 = u_3 \wedge u_5 \wedge u_7$$

$$\omega_7 = u_5 \wedge u_6 \wedge u_7 \quad \text{が } V_{x_0} \text{ (or } V_{x_0}^*) \text{ の base である. } (G_{x_0}, V_{x_0})$$

$$\text{は } (\omega_1, \dots, \omega_7) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} GL(1) \times SL(3) \\ \square^* \otimes \square \end{matrix} & \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} GL(1) \\ \square^* \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$\text{で } f_{x_0}(x) = x^2, \quad (x = \sum_{i=1}^7 x_i \omega_i) \text{ である.}$$

$$V_{x_0}^{(1)} = \{ \sum x_i \omega_i \mid x_7 = 0 \} \text{ には } G_{x_0} \text{ が作用するが}$$

$$(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)}) = \begin{matrix} GL(1) \times SL(3) \\ \square^* \otimes \square \end{matrix} \text{ で } \chi \text{ に対応する相対不変式は}$$

3次式, かつその Hessian $\neq 0$ ($\because GL(3)$ は既約正則 P.V.)

よって p.23 の Prop 3 により $T_{G_{x_0}}^* V \subset W$ がいえる. として 明らか

に $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V. ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ が gen. pt.) かつ good orbit
で $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ は $V)$ に属するから conormal bundle による対応
は $V) \leftrightarrow VII)$.

$$\frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{SX}(A)} (A \in \mathcal{O}_{x_0}) = \frac{5}{2} \text{ かつ } (S + \frac{5}{2}) \text{ と対応する.}$$

VIII) 31次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot U(10)$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \begin{smallmatrix} GL(1) & \times & GL(1) & \times & SL(2) & \times & SL(2) \\ \square & \otimes & \square & \otimes & \square & \otimes & \square \end{smallmatrix}$ は 既約正則 P.V. かつ
good orbit である.

$$\text{そして } \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{SX}(A)} (A \in \mathcal{O}_{x_0}) = 2 \text{ かつ } (S + 2) \text{ と対応する.}$$

conormal bundle による対応は $VIII) \leftrightarrow III)$ である.

IX) 34次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot (G_a)^8$$

$\dim V_{x_0} = 1$ かつ §3 の Prop 1 より good orbit である.

$$\frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{SX}(A)} = 1 (A \in \mathcal{O}_{x_0}) \text{ かつ } (S + 1) \text{ と対応する. conormal}$$

bundle による対応は $IX) \leftrightarrow II)$ である.

注) (G, V) 既約正則 P.V. なら $\text{codim} 1$ の orbit からは 常に $(S+1)$
がでてくる. すなわち $\frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{SX}(A)} = 1 (A \in \mathcal{O}_{x_0})$. 他方 $\text{SX}(A) = \frac{\deg f}{\dim V} \text{tr}_V(A)$
だったから このことより $\deg f = \frac{\text{tr}_{V_{x_0}} A}{\text{tr}_V A} \dim V (A \in \mathcal{O}_{x_0}, x_0 \text{ は } \text{codim} 1 \text{ の}$
orbit の点) が得られる. こめが いめゆる 次数公式 である.

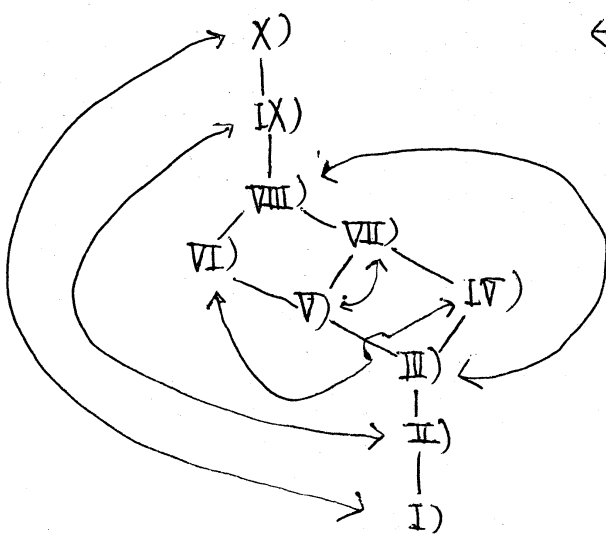
ついでに X) における isotropy subgroup について述べておくと
 $G_{X_0} \sim (G_2)$. 従って $GL(7)/(G_2) \sim V-S$ は松島の
 定理により affine variety になり, 従って S は超曲面であるこ
 とがわかる. $GL(7)$ は既約表現ゆえ S は既約超曲面になること
 が証明され, 我々の仮定 (P.1) が満たされていることがわかる.

注) (G_2) は rank 2 の例外群

$\deg \ell(S) = \deg f = 7$ が知られているから, 以上で $\ell(S)$
 が完全に求まった. すなわち

$$\ell(S) = (s+1)(s+2)(s+\frac{5}{2})(s+3)(s+\frac{7}{2})(s+4)(s+5)$$

singular orbits との対応は $I) \leftrightarrow (s+5)$, $II) \leftrightarrow (s+4)$
 $III) \leftrightarrow X(+)$, $IV) \leftrightarrow (s+\frac{7}{2})$, $V) \leftrightarrow X(+)$, $VI) \leftrightarrow (s+3)$
 $VII) \leftrightarrow (s+\frac{5}{2})$, $VIII) \leftrightarrow (s+2)$, $IX) \leftrightarrow (s+1)$ であった.
 orbits の closure による包含関係は下図のようになっている.



$\longleftrightarrow$ EP は conormal bundle
 による対応を表わす.

注) この例ではすべて
 good orbit であったか
 $TG_0 V \not\subset W$ となるような
 概均質ベクトル空間の例
 もある.