

The Signature of Smoothings of Surface Singularities on Cyclic Coverings (曲面の巡回被覆型特異点のスムージング符号数)

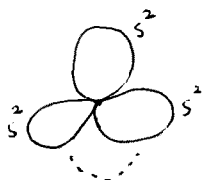
東北学院大工 足利 正 (Tadashi Ashikaga)

序論 本稿の目的は、複素解析曲面の巡回被覆から生ずる孤立特異点に関して、そのスムージング符号数と呼ばれるものを調べることにあり、特にその負値性を示すことにある。研究対象が、このように特殊なものに限定されているばかりか、それを扱う我々の方法自体も本質をつき且つ精錬されたものであるとは言い難いであろう。とはいえ、これから述べることには、筆者自身は何か不思議な興奮——もっと隠れたところがあってその一部分だけが少し見えてきたような心のざわめき——を感じている面がある。この気持ちを一番お伝えしたく思う。

まず、一般に (V, P) を 2 次元孤立超曲面特異点の芽としよう (補注 1)。 (V, P) は $\mathbb{C}^3$ の原点で、ある正則関数の零点 $f(x, y, z) = 0$ で定義されている。 $\epsilon > 0$ を十分小さな実数とし D_ϵ を $\mathbb{C}^3$ の原点中心の半径 ϵ の実 6 次元円板、また $\delta > 0$ を同じく十分小さな実数として

$$F = (f(x, y, z) = \delta) \cap D_\epsilon$$

とおく。これがいわゆる (V, P) のミルナーファイバーであって、 F は境界 $\partial F = (f(x, y, z) = \delta) \cap S^5$ を持つ、実 4 次元多様体である。よく知られたミルナーの定理 [Mi] により、 F は S^2 の何個かのブーケ $S^2 \vee \dots \vee S^2$ (μ 個) にホモトピー同値であって、この S^2 の個数 $\mu(V, P)$ はミルナー数と呼ばれる。



(注) 努力してみました。僕には平面上に S^2 のブーケを書くことはようはせんてしたので、図は S^1 のブーケを書いてしましました。すみません。

このことから $H_2(F, \mathbb{R})$ は μ 次元であるが、我々の問題にしたいのは、これの交点形式から誘導される符号数である。正確に述べると Lefschetz 双対同型 $H_2(F, \mathbb{R}) \simeq H^2(F, \partial F, \mathbb{R})$ を念頭に置きつつ、2 次形式

$$H^2(F, \partial F, \mathbb{R}) \times H^2(F, \partial F, \mathbb{R}) \xrightarrow{j} H^2(F, \partial F, \mathbb{R}) \times H^2(F, \mathbb{R}) \xrightarrow{c} H^4(F, \partial F, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

の符号数、つまり (正の固有値の個数) - (負の固有値の個数) をスムージング符号数 (もしくはミルナーファイバーの符号数) $\sigma(V, P)$ と定義する。ここに j は第 2 成分の自然な写像、また c はカップ積である。これに関して、1978 年 Durfee[D] は

予想 $\sigma(V, P) \leq 0$?

を提出した (補注 2)。この予想の根拠は筆者にはわからないが、ごくごく単純に想像すると以下になるであろうか？仮に特異点解消を行ってできる例外集合の交点形式と比較するならば、これは言うまでもなく負定値であるから、もし“スムージング”して正固有値の固有空間に対応するサイクルがまぎれこんでいても、負の固有空間が“強く”てまさか符号数が正になるようなことはない、といったことが“変な”特異点でなければ成立するであろう。

実際、符号数 $\sigma(V, P)$ を特異点解消のデータと比較したくなるのは人情というべきか、Durfee[D] は、それを Hirzebruch の符号不定数 (Signatur defect) の概念 [Hi2][Og] を用いて以下のように行っている：

即ち、 $-\sigma(V, P)$ は、 $F \setminus \partial F$ での接束の自明性から、実 3 次元多様体 ∂F の符号不足数 $\delta(\partial F)$ に一致するが、 ∂F は特異点のリンク $\mathcal{L} = (f(x, y, z) = 0) \cap S^5$ に同相であるからこれは $\delta(\mathcal{L})$ に等しい。一方、 $\mathcal{L}$ を境界にもつ自然な実 4 次元多様体として、特異点解消 $\tau: (\tilde{V}, \mathcal{E}) \rightarrow (V, P)$ による全空間 $\tilde{V}$ をとると、 $\tilde{V}$ は例外曲線 $\mathcal{E}$ にむかって変形レトラクトであるから、これによって $\delta(\mathcal{L})$ が $\mathcal{E}$ の情報に帰着される。

この考察から得られる公式 [D, Cor.2.1] と Laufer の公式 [La] を組み合わせることにより

$$\sigma(V, P) = -\mu(V, P) + 4p_g(V, P) - b_1(\mathcal{E}) \quad (1.1)$$

が得られる。ここに、 $p_g(V, P) := \dim_{\mathbf{C}}(R^1\tau_*\mathcal{O}_{\tilde{V}})_P$ は幾何種数、また $b_1(\mathcal{E}) = \text{rank } H_1(\mathcal{E})$ である。従って $\sigma(V, P)$ を計算するには、この 3 種の不変量 $\mu(V, P)$, $p_g(V, P)$ 及び $b_1(\mathcal{E})$ を“同時に”計算すれば良いことになる。

さて冒頭にも述べたように、現段階で我々の方法で扱えるのは、一般のものではなく、巡回被覆から得られる孤立特異点、つまりその方程式が

$$f(x, y, z) = z^n + g(x, y)$$

の形をしたもののみである。この特異点は分岐曲線である $g(x, y) = 0$ の平面曲線としての特異点と、分岐次数 n のみによって決まるという意味で、一見単純なものに見えよう。とはいえ、決してトリビアルなものではなく、いや、それどころか古典的な Zariski の仕事 [Z, Chap.VIII] 以来、現在でもトポロジー、代数幾何双方の関心を引きつけている (補注 3)。

ここで扱う符号数に関しても、トポロジーの観点から次のような仕事がある。それは 1990 年の D.Newmann と J.Wahl [NW] によるものであって、彼らの動機は 2 重点 $z^2 + g(x, y)$ の時に知られていた事実 —— スムージング符号数 σ が分岐曲線 $g(x, y) = 0$ の古典リンク $(g = 0) \cap S^3$ の対称化ザイフェルト形式の符号数 ([Mu]) に一致すること ([Sh]) —— の一般次数巡回被覆への拡張を試みたもので、次の帰結を生んだ：

定理 (Newmann-Wahl) (V, P) を $f = z^n + g(x, y)$ で定義される 2 次元孤立特異点の芽とし、そのリンク $\mathcal{L}$ が $\mathbb{Z}$ - ホモロジー球面であるとする。この時

$$\sigma(V, P) = -\frac{1}{8} \text{Casson}(\mathcal{L})$$

である。特に $\sigma(V, P) \leq 0$ となる。

キャッソン不変量 $\text{Casson}(\mathcal{L})$ というのは、基本群の $SU(2)$ 既約表現の数を適当な仕方で数え上げて得られるもので、通常ホモロジー球面でなければ定義は難しい (補注 4)。一方、リンクにホモロジー球面の仮定を設けることは、方程式に対して、“ $g(x, y)$ が既約で且つ n が $g(x, y)$ のすべてのプイシューベアと互いに素” という強い条件を課することになる [NW, Prop.2.1]。とはいえ、このように符号数とキャッソン不変量のような低次元トポロジー特有の本質的不変量とを直接結び付ける問題は Atiyah の問題と呼ばれ、最近この方面の関心を呼んでいるようである (補注 5)。

前置きが長くなってしまったが、本稿の目的は、巡回被覆型特異点に対してトポロジカルな仮定を設けることなく、代数幾何的な方法で符号数の公式を与え且つ評価を行うことである。我々の定理の系として、この場合の符号数負値性予想が肯定的に解かれる：

定理 ([As3]) (C, P_0) を孤立平面曲線特異点の芽とし、その重複度を m とする。 $\{C_1, \dots, C_s\}$ を P_0 での C の局所既約成分の集合とし、 $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_\alpha}\}$ を $\{C_1, \dots, C_s\}$ の部分集合であって以下の条件 (*) をみたすものとする。即ち：

(*) C_{i_j} ($1 \leq j \leq \alpha$) は P_0 で非特異、且つ、 C_{i_j} ($1 \leq j \leq \alpha$) の P_0 での接線は他の $C_1, \dots, C_s$ のどの接線とも相異なる。

非負整数 α は、上の条件 (*) を満たす最大値にとっておく。もし、この部分集合 $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_\alpha}\}$ が空ならば $\alpha = 0$ とおく。

さて (V, P) を (C, P_0) で分岐する n 重巡回被覆特異点 ($n \geq 2$) の芽とする。つまり $g(x, y)$ を (C, P_0) の定義方程式とする時、 (V, P) は $f(x, y, z) = z^n + g(x, y)$ で定義される特異点とする。この時スムージング符号数 $\sigma(V, P)$ は次式を満たす：

$$\sigma(V, P) \leq -\frac{1}{3}(m^2 - 3m - 2)n - 1 + \frac{m^2 + \gcd(m, n)}{3n} - \frac{4\alpha}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \left\langle \frac{mj}{n} \right\rangle - \alpha \cdot \gcd(m, n)$$

ここに $\gcd$ は最大公約数、また記号 $\langle mj/n \rangle$ は有理数 mj/n の小数部分 $(mj/n) - [mj/n]$ を表すものとする。

しかも上の式において等号が成立するのは、 (C, P_0) が性質 $\alpha = m$ を満たすとき、つまり通常 m 重点である時に限る。

この定理の証明方法を詳細するのが以下の目的であるが、一口で言うと (V, P) の Hirzebruch-Jung 解消 のデータで $\sigma(V, P)$ を与える (1.1) 式の三つの不変量を具体的に記述することがその要点である。

系 (V, P) を正則関数 $f(x, y, z) = z^n + g(x, y)$ の芽とし、且つ (V, P) は高々孤立特異点とする。この時

$$\sigma(V, P) \leq 0$$

が成り立つ。さらに $\sigma(V, P) = 0$ となるのは、 (V, P) が非特異点の芽である時に限る。

証) $\text{mult}(V, P) \leq 3$ の時は知られている ([To2][As2]) 故、 $n \geq 4$ 且つ $m \geq 4$ と仮定してよい。すると、定理を用いて $\sigma(V, P) < 0$ を導くのは容易な計算である。

1. Hirzebruch - Jung 解消 (補注 6)

(V, P) を $f = z^n + g(x, y)$ で与えられる孤立特異点とする。よく知られた方法により、 f 即ち g は代数的であると仮定してよい ([Mi] [BK, Chap.III])。考察する分岐曲線の特異点 $g(x, y)$ をいったん $\mathbf{P}^2$ 内の点 P_0 で局所的に実現しておき、この閉包に、 P_0 を通らない一般超平面 $H_1, \dots, H_k$ を加えた $\mathbf{P}^2$ の被約因子

$$B_0 = \overline{(g(x, y))} + H_1 + \dots + H_k$$

の次数が n の倍数に、つまり B_0 が $d_0 n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ ($d_0 \in \mathbf{Z}$) と線形同値になるようにする。こうすると、 $\mathbf{P}^2$ 上の直線束 $L_0 = d_0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ の全空間 $V(L_0)$ 内に、 B_0 で分岐する n 重巡回被覆

$$V(L_0) \supset S_0 \xrightarrow{\pi_0} W_0 = \mathbf{P}^2$$

が作られる。 $W_0 \xleftarrow{\tau_1} W_1 \xleftarrow{\tau_2} W_2 \dots$ を B_0 の特異点及びこれらに無限に近い特異点でのブローアップの繰り返し、 B_i を B_{i-1} の全変換 ($i = 1, 2, \dots$) とすると、有限回 (r 回とする) の操作で B_r の被約スキーム B_r^{red} は正規交叉となる。 $S_i = S_{i-1} \times_{W_{i-1}} W_i$, $L_i = \tau_i^* L_{i-1}$ とおく。自然な写像 $\pi_i : S_i \rightarrow W_i$ は、 B_i を分岐曲線とする $V(L_i)$ 内に作られた n 重巡回被覆となっている。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & V(L_0) & & V(L_1) & & & V(L_r) \\
 & \cup & & \cup & & & \cup \\
 P \in & S_0 & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & S_r & \xleftarrow{\rho'} \tilde{S} \xleftarrow{\rho''} S^* \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
 P_0 \in & W_0 & \longleftarrow & W_1 & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & W_r & \\
 & \cup & & \cup & & & \cup \\
 & B_0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & B_r &
 \end{array}$$

ここで注意を要することは、 $2 \leq i \leq r$ に対しては B_i は一般に非被約因子であるから、 S_i は一般に非正規曲面となっていることである。しかし S_r に対しては、 B_r^{red} の正規交叉性から、その正規化 $\rho' : \tilde{S} \rightarrow S_r$ をとれば $\tilde{S}$ には高々孤立巡回商特異点しか現れず、この特異点は負型連分数展開によって長さの決まる有理曲線のツリー（いわゆる Hirzebruch-Jung の紐）を用いて解消できる。それを $\rho'' : S^* \rightarrow S$ と書く。以上のような一連の操作を、最初に与えられた特異点 $P \in S_0$ についてのみ実行して得られる解消過程を P の Hirzebruch-Jung 解消と呼ぶ。

さて、我々が最初に目標とすることは、(1,1) で述べた 3 つの不変量 $\mu(P)$, $p_g(P)$ 及び $b_1(\mathcal{E})$ を π_r の分岐曲線 B_r の情報で書くことである。そのために B_r の既約分解を

$$B_r = \sum_{i=r_0}^0 E_i + \sum_{i=1}^r m_i E_i$$

と書いておこう。ここに $\tilde{B}_r := \sum_{i=-r_0}^0 E_i$ の部分が B_r の $\tilde{\tau}_r := \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ による固有変換であり、また、 E_i は τ_i の例外曲線の $\tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_r$ による固有変換とする。従って、 $\mathbf{E}_r := \sum_{i=1}^r E_i$ が $\tilde{\tau}_r$ の例外曲線（の被約スキーム）であり、また m_i は τ_i のブローアップの中心 P_{i-1} での B_{i-1} の重複度に一致している。

補題 1

$$p_g(P) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^r \left[\frac{m_j^i}{n} \right] \left\{ -\frac{2i}{n} B_r E_j + 2 + E_j^2 + \sum_{k=1}^r \left[\frac{m_k^i}{n} \right] E_k E_j \right\}.$$

ここに $[]$ はガウス記号を示す。この補題の証明はまず $p_g(P) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ であるのは当然だが、 $\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_{S_r})$ 及び $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = \chi(\mathcal{O}_{S^*})$ はすぐわかるのでこれは $\chi(\mathcal{O}_{S_r}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ に等しい。 $\chi(\mathcal{O}_{S_r})$ は直線束 L_r の言葉で書ける。また $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}})$ の方も、 $(\pi_r \rho')_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ が Esnault-Viehweg の公式 [E] より L_r を適当にツイストした直線束の直和で書けるので計算可能というわけである（補注 7）。

補題 2

$$b_1(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^r \{ 2 - 2\gcd(m_i, n) + \sum_{-r_0 \leq j \leq r, j \neq i, E_j \cap E_i \neq \emptyset} (\gcd(m_i, n) - \gcd(m_i, m_j, n)) \} + \sum_{1 \leq i < j \leq r, E_j \cap E_i \neq \emptyset} (\gcd(m_i, m_j, n) - 1).$$

例外集合 $\mathcal{E}$ は今の場合 $(\pi_r \rho' \rho'')^{-1}(E_r)$ に一致しているが、これのトポロジカルな性質は観察できるのでこの補題も示せる。あと一つ残ったミルナー数 $\mu(P)$ は少し工夫が必要であり次節で行う。

2. 非孤立特異点のミルナー数

今、我々は解消途中に現れた非正規曲面 S_r を見て、もとの孤立特異点 P のミルナー数を推し測ろうとしている。このような事態に陥った者なら誰でも非正規特異点に対してミルナー数を

定義したくなるであろう。以下に行うのはまさにその事であるが、ただし我々がこれを実行できる理由は、あくまで今扱っている巡回被覆曲面という特殊事情からで、しかもその位相幾何的な意味も不明である (補注 8)。ヒントになるのは、次の S.Tan[Ta] による簡単な補題である。

Tan の補題 B を非特異曲面上の被約曲線とし、その全ミルナー数 (即ち各孤立特異点のミルナー数の総和) を $\mu(B)$ 、 B の位相的オイラー数を $e(B)$ とすると

$$\mu(B) = -2\chi(\mathcal{O}_B) + e(B)$$

となる。

この補題は、実質的に古典的なミルナーの公式 [M] の直接的な系である。さて：

定義 1 $V(L) \subset S \xrightarrow{\pi} W$ を非特異曲面 W 上の直線束の全空間 $V(L)$ 内に定義された (必ずしも正規でない) n 重巡回被覆で、その分岐曲線を B とする。この時、

$$\mu(S) = (n-1)\{-2\chi(\mathcal{O}_B) + e(B)\}$$

において、これを S の全ミルナー数と呼ぶ。ここに $e(B)$ は B の (被約モデルの) 位相的オイラー数である。

上の定義で注意すべきことは B が非被約曲線ならそのまま (つまり被約モデルをとらずに) 構造層のオイラー・ポアンカレ標数 $\chi(\mathcal{O}_B)$ を定義に組み込んである点である。もし B が被約つまり S が正規であれば、 $\mu(S)$ が通常の意味の全ミルナー数に一致することは、Tan の補題を念頭においてヤコビアンリングを考えれば明かであろう。

命題 1 上の状況下で次式が成り立つ。

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(\omega_S^2 + e(S) + \mu(S))$$

ここに ω_S は S の双対化層である。

一般の正規ゴーレンスタイン曲面 S に対して、ネターの公式の補正項 $\chi(\mathcal{O}_S) - \frac{1}{12}(\omega_S^2 + e(S))$ が全ミルナー数の $\frac{1}{12}$ に一致するという事が、Laufer の公式 [L] の系として導かれることを Brenton [B] が示している (補注 9)。従って上の命題は、その“巡回的非正規版”と言えよう。これの証明は $\chi(\mathcal{O}_S)$, ω_S^2 等を L を使って書き表しておいて、 W のネターの公式に帰着させる。

以上の準備の下に、前小節の状況にもどって $\mu(P)$ を計算するには次のようにすればよい。即ち、一方では命題 1 を用いて $\mu(S_r)$ と $\mu(S_0)$ を比較し、他方では定義にもどってこれらを直接計算する。途中 $\chi(\mathcal{O}_{B_r})$ の計算が必要であるが、被約化を既約成分ごとに順次作っていった構造層の χ を各々比較するのは代数幾何の標準的手法である。こうして次の補題が得られる。

補題 3

$$\mu(P) = (n-1) \left\{ \sum_{i=1}^r (m_i - 1)(m_i E_i^2 - 2) - r + \sum_{-r_0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i < j, E_i \cap E_j \neq \emptyset} (2m_i m_j - 1) \right\}.$$

以上で得られた補題 1,2,3 の式を (1.1) に代入する事により $\sigma(V, P)$ を B_r の情報で書き表すという当初の目標は達せられた。しかしながら、そうして得られた式は (各成分の自己交点数をもこめた) 例外集合の双対グラフの複雑さをそのまま背負っており、このままで $\sigma(V, P)$ の評価を行うことは難しい。この困難さを切り抜けるのが次節の方法である。

3. 改良特異点

私事になって恐縮だが、泊冒孝氏に Durfee 予想の存在を教わってからもう五年が過ぎようとしている。当時、筆者は曲面の大域的問題、特に一般型代数曲面 S のそれに最も興味を抱いておりそれは今も変わらないが、ところで S を調べようとする際、その特異モデル S^* が構造の簡単な 3 次元多様体 X の中に自然な形でとれることがある。この場合、 S の研究は X 中の因子としての S^* の研究と、 S^* の持つ超曲面特異点の研究に帰着される。その際現れる特異点は、非正規なものや孤立的であっても幾何種数の高いものまで多種のものになりうる (補注 10)。孤立的な場合は、まず p_g と K^2 (K は特異点の標準サイクル) を計算せねばならない。なぜならば、それが一般型曲面の基本不変量 $\chi(\mathcal{O}_S)$, c_1^2 の局所対応物だからである。これらと例外曲線の位相的性質がわかれば Laufer の公式 [L] より μ がわかるので、(1.1) に代入するだけで符号数 σ が計算できてしまうわけである。このようにして、ついでにというか趣味的に (とはもう言えなくなってきたが) σ の計算を続けてみて確信するようになったことは、

“特異点が悪ければ悪い程、符号数も低く (つまり絶対値の大きな負の値に) なる”

ということである。では、どうやったらこのことが証明できるだろう。それには特異点の“悪さ”を測る最も簡単な“ものさし”を目安にして、そのものさしで測って“1 単位”だけ良くなった特異点ともとの特異点を比べ、もとの方が符号数がより低いことが言えれば帰納的に従うだろう。

さて、今我々の扱っている巡回被覆特異点の時には、このものさしを

“ r = 分岐曲線を正規交叉させるために行ったブローアップの回数”

と考えてみる。ブローアップの回数が多い程特異点が悪いと考えるのはごく自然なはずである。それでは、最初与えられた分岐曲線 $g(x, y) = 0$ に比較し、ブローアップの回数がちょうど一回だけ少なく、正規交叉になる新しい分岐曲線をどうやって作ればよいか。それがまさにこれから行おうとする事であって、この着想を得て前節の最後に述べた困難を切り抜ける光が見えてきた。

巡回被覆特異点 (V, P) に対する Hirzebruch-Jung 解消において、 $r \geq 2$ と仮定する。今、最後から一つ手前の底曲面 W_{r-1} とその上の分岐曲線 B_{r-1} 及びブローアップ τ_r の中心 $P_{r-1} \in B_{r-1}$ を考えよう。 τ_r によって“正規交叉化”が完了することを念頭におくと、次のいずれかが起こる：

A 型 $\widetilde{\tau_{r-1}} = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-1}$ の例外集合 $\mathbf{E}_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} E_i$ のただ一つの成分 E_{i_1} 上に P_{r-1} があって、 B_0 の $\widetilde{\tau_{r-1}}$ による固有変換 $\widetilde{B_{r-1}}$ の P_{r-1} における局所成分 $C_1, \dots, C_k$ はすべて非特異で E_{i_1} に接せず、且つ各々異なる接線を持つ。

B 型 $\mathbf{E}_{r-1}$ の 2 つの成分 E_{i_1}, E_{i_2} があって $P_{r-1} = E_{i_1} \cap E_{i_2}$ となり、 $\widetilde{B_{r-1}}$ の P_{r-1} での局所成分 $C_1, \dots, C_k$ は非特異で E_{i_1}, E_{i_2} 双方に接せず、且つ各々相異なる接線を持つ。

さて、 W_{r-1} 上の $\mathbf{E}_{r-1}$ の適当な近傍上に新しい局所解析的曲線 D_{r-1} を以下のように定義する：

A 型の時： E_{i_1} の一般点を横断的に通る k 個の非特異局所曲線 $C'_1, \dots, C'_k$ をとってきて、これを $C_1, \dots, C_k$ と取り替える。つまり、

$$D_{r-1} = \widetilde{B_{r-1}} - \sum_{i=1}^k C_i + \sum_{i=1}^k C'_i$$

とおく（図 2 参照）。

B 型の時： E_{i_1} 及び E_{i_2} の一般点をそれぞれ横断的に通る非特異局所曲線 $C'_1, \dots, C'_k$ 及び $C''_1, \dots, C''_k$ をとってきて

$$D_{r-1} = \widetilde{B_{r-1}} - \sum_{i=1}^k C_i + \sum_{i=1}^k (C'_i + C''_i)$$

とおく（図 2 参照）。

こうしておいて外空間である曲面の既存のブローダウンプロセスから誘導される写像でもって落とす。つまり

$$D_0 = (\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-1})_* D_{r-1}$$

とおく。 D_0 は $W_0 = \mathbf{P}^2$ の点 P_0 の近傍で定義された局所被約解析曲線である。これの方程式を $g^\vee(x, y) = 0$ とおく。

定義 2 $g(x, y) = 0$ で定義される特異点の芽に対し、上述の $g^\vee(x, y) = 0$ で定義される特異点をその改良特異点という。また $z^n + g(x, y) = 0$ で定義された孤立特異点 (V, P) に対し、 $z^n + g^\vee(x, y) = 0$ で定義された孤立特異点 $(V^\vee, P^\vee)$ を (V, P) の改良特異点と呼ぶ。

例 1 $g(x, y) = x^2 + y^5$ の時、図 3 のようにして $g^\vee(x, y) = x^2 + y^4$ となる。

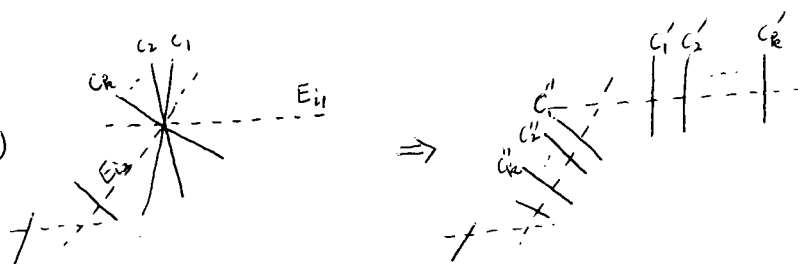
例 2 改良特異点の定義はブローアップの順序に依存しているので、一意的には定まらず、一般に局所成分の数だけでくる。例えば 2 成分の特異点 $g(x, y) = (x^2 + y^3)\{(x+y)^3 + y^6\}$ に

[図2]

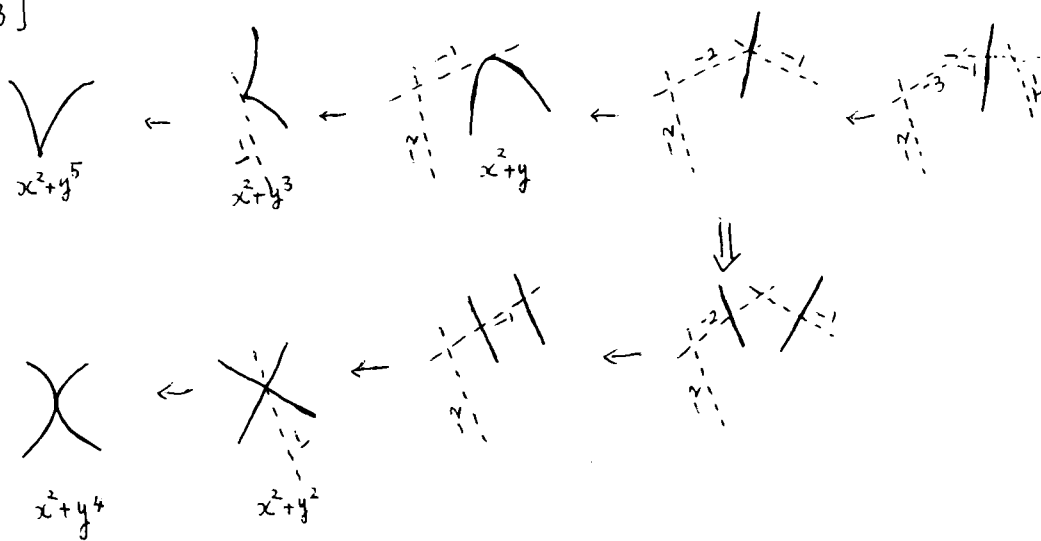
(A型)



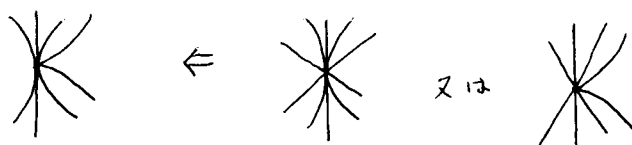
(B型)



[図3]



[図4]



については $g^\vee(x, y) = (x^2 + y^2)\{(x + y)^3 + y^6\}$ または $g^\vee(x, y) = (x^2 + y^3)\{(x + y)^3 + y^3\}$ となる (図 4 参照)。

さてこのようにすれば、平面曲線特異点 $g(x, y) = 0$ はちょうど $r - 1$ 回のブローアップでその全変換の被約モデルが $D_{r-1} + \mathbf{E}_{r-1}$ なる正規交叉曲線になるわけである。それだけでなく、因子としての例外曲線の重複度を考慮すると、もとの B_r との違差は生じない。即ち次の補題が成り立つが、その証明は泊氏に教えていただいた。

補題 4 (M. Tomari) B_0 の $\tilde{\tau}_r$ による全変換を $B_r = \widetilde{B_r} + \sum_{i=1}^r m_i E_i$ 、 D_0 の $\widetilde{\tau_{r-1}}$ による全変換を $D_{r-1}^* = D_{r-1} + \sum_{i=1}^{r-1} m'_i E_i$ とおく時

$$m'_i = m_i \quad (1 \leq i \leq r-1)$$

となる。

前小節の結果より (V, P) は B_r の言葉で、また $(V^\vee, P^\vee)$ は D_{r-1}^* の言葉で書けるわけであるから、上の補題とあわせて差 $\sigma(V, P) - \sigma(V^\vee, P^\vee)$ が具体的に計算できる。そうすると今度は $(V^\vee, P^\vee)$ から出発してその改良特異点 $(V^{\vee\vee}, P^{\vee\vee})$ を作り... という風に帰納的にどんどん行い、最後に一回のブローアップだけで解消過程の終わる特異点 (これは重みつき斉次特異点と同値になる) に帰着され、これは直接計算できる。こうして

$$\sigma(V, P) = \{\sigma(V, P) - \sigma(V^\vee, P^\vee)\} + \{\sigma(V^\vee, P^\vee) - \sigma(V^{\vee\vee}, P^{\vee\vee})\} + \dots$$

のように書いておいていったん式を作り、さらにその中のある部分を Max-Noether の公式 [I, Chap.9] を使って少し見やすくする。このようにして次の命題が得られる。

まず記号を準備しておく。 $1 \leq i \leq r$ に対し、 B_r の成分で E_i を通るものの数を α_i と書く。また $\beta_i = \text{mult}_{P_i} \widetilde{B_i}$ とおく ($\widetilde{B_i}$ は B_0 の固有変換)。ブローアップ τ_i が A 型の時、つまり P_{i-1} が $\mathbf{E}_{i-1}$ の一つの成分にのる時はそれを $E_{\varphi_1(i)}$ とかく。こうして

$$\begin{aligned} F_A(i) = & -\frac{1}{3}(n - \frac{1}{n})\beta_{i-1}^2 + d_{i, \varphi_1(i)} - 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (\langle \frac{m_i j}{n} \rangle - \langle \frac{m_{\varphi_1(i)} j}{n} \rangle)^2 \\ & - \frac{4\alpha_i}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \langle \frac{m_i j}{n} \rangle - \alpha_i d_i \end{aligned}$$

とおく。ただし $d_i = \gcd(n, m_i)$, $d_{i, \varphi_1(i)} = \gcd(n, m_i, m_{\varphi_1(i)})$ のように略記している。また、ブローアップ τ_i が B 型の時には $P_{i-1} = E_{\varphi_1(i)} \cap E_{\varphi_2(i)}$ のように書き

$$\begin{aligned} F_B(i) = & -\frac{1}{3}(n - \frac{1}{n})\beta_{i-1}^2 - (\beta_{i-1} + 1)n - d_i + d_{\varphi_1(i)} + d_{\varphi_2(i)} + d_{i, \varphi_1(i)} + d_{i, \varphi_2(i)} \\ & - d_{\varphi_1(i), \varphi_2(i)} - 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (\langle \frac{m_i j}{n} \rangle - \langle \frac{m_{\varphi_1(i)} j}{n} \rangle - \langle \frac{m_{\varphi_2(i)} j}{n} \rangle)^2 \\ & - \frac{4\alpha_i}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \langle \frac{m_i j}{n} \rangle - \alpha_i d_i \end{aligned}$$

とおく。さらに

$$F(1) = -\frac{1}{3}(\beta_0^2 - 3\beta - 2)n - 1 + \frac{m^2 + (\gcd(n, \beta_0))^2}{3n} - \frac{4\alpha_1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \langle \frac{m_i j}{n} \rangle - \alpha_1 d_1$$

とおく。

命題 2

$$\sigma(V, P) = F(1) + \sum_{i \geq 2, \tau_i: A} F_A(i) + \sum_{i \geq 2, \tau_i: B} F_B(i)$$

$F_A(i), F_B(i)$ 等が “1 単位だけ特異性を改良した寄与” を表しているわけである。

4. 符号数の評価

定理の右辺は $F(1)$ なのであとは命題 2 に現れた $F_A(i), F_B(i)$ 等を評価すればよいだけだが、実はこの計算が最も大変で $[A]$ で最大のページをさくことになった。命題 2 に現れている小数部分の記号 $\langle \rangle$ の入った数列の和の評価が以外と難しいからである (補注 11)。例えばそれを行うためのいくつかの補題の中の一つは次のようなものである。

補題 5 n を 3 以上の自然数とし、 r_1, r_2 をそれぞれ n で割れない自然数とする。この時

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\langle \frac{r_1 i}{n} \rangle - \langle \frac{r_2 i}{n} \rangle)^2 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{3n}$$

となる。

こうした補題を積み重ねて次の事が示せる。

補題 6

$$\begin{aligned} F_A(i) &\leq -\frac{5}{12}n - 3 + \frac{8}{3n} - \frac{1}{3}(n - \frac{1}{n})(\beta_{i-2} - 2)(\beta_{i-1} + 2), \\ F_B(i) &\leq -n - 4 + \frac{6+d^2}{3n} - \frac{1}{3}(n - \frac{1}{n})(\beta_{i-2} - 2)(\beta_{i-1} + 2) - (\beta_{i-1} - 2)n. \end{aligned}$$

特に $\beta_{i-1} \geq 2$ なら $F_A(i) < 0$ 、 $F_B(i) < 0$ である。

$\beta_{i-1} = 1$ の時、つまり分岐曲線の固有変換の特異点はすでになくなっているが、どこかの例外曲線に接しているために正規交叉性がくずれている場合は、現実には $F_A(i) > 0$ とか $F_B(i) > 0$ になる事がある。この時は他のプロセスで生じた負値性で打ち消すしかなく、枝葉束節とは言え計算には神経を使う。

こんな具合にして定理が証明できる。

補注

以下は本文中の該当番号の補注ですが、その時筆者自身の感じた疑問点も多く含まれております。お気付きの点がありましたらどうぞお教え下さい。

(1) 本稿で扱う問題は超曲面特異点に限らず、一般にスムージングを持つ特異点ならばいつでも定式化できる。ただし J.Wahl[W] により、埋め込み次元の高い非完全交叉特異点ではスムージング符号数が正になる例が知られている。

(2) これは [D, p.96] にある予想で、[D, p.97] ではこれよりも強い予想 “ $\mu \geq 6p_g$?” を提出している。後者の予想から前者のそれが出ることは本文 (1.1) から明かである。現在この強い予想の成立が確かめられているのは、超曲面特異点であって且以下のいずれかのような特別なもののみである：(a) 弱楕円型 [XY1], (b) 重み付き斉次型 [XY2], (c) 2 重点 [To2] および 3 重点 [As2]。本稿の方法は、泊昌孝氏 [To2] が 2 重被覆の堀川解消 [Ho1] を用いた事に鑑み、ある意味で堀川解消の一般次数巡回被覆への拡張を作ろうとしたことがその出発点である。なお本稿で扱っている特異点に対してこの強い予想を解こうとするならば 4 節の小数部分記号の入った数列の評価をもっと鋭くする必要がある。

(3) 平面代数曲線の補空間の基本群の研究を動機として、そこで分岐する巡回被覆を考えるのはトポロジーの基本的な道具の一つのようであり ([Lib] …), また代数幾何の立場から特異代数曲線の大域的問題に対する応用もある ([Sa] …)。曲線束を持つ一般型代数曲面の安定底変換 (stable reduction) の問題にもこの種の特異点の解析が登場する ([Ta])。

(4) キャッソン不変量がフレアーホモロジー [Fl] のオイラー・ポアンカレ標数に一致するという観点に立てば、ホモロジー球面の仮定をはずして深谷賢治氏 [Fu] により一般化されていると言えよう。

(5) 例えば Atiyah[At] 参照。なお重み付き斉次特異点に対し、リンクのホモロジー球面性の仮定の下、同種の結論が福原・松本・坂本 [FMS] と Newmann-Wahl [NW] によって独立に得られている。また特異点の問題とは独立に、純粋に低次元トポロジーの問題として、符号不足数とキャッソン不変量を直接つなぐ研究が森田茂之氏 [Mo] により最近なされているようである。我々の状況では符号不足数とスムージング符号数とは本文に述べた関係にあるから、このことは重大である。

(6) 2 次元解析空間の特異点解消に際し Hirzebruch [Hi2] が用いた方法で、本稿のような巡回被覆に限らず、一般の分岐被覆曲面の特異点解消に適用できる。Zariski- 広中以来、特異点解消に際してはパーミッシブル・ブローアップの方法が現代の常識となったが、この方法の源流がむしろ古いようである (例えば Lipman [Lip] の解説参照)。なお本稿のような Hirzebruch 解消によらず、パーミッシブル・ブローアップの解消過程に応じて不変量の変化を追う方法もあり ([Tol][As4]) この方が一般化は容易だが、それを Durfee の問題に適用できるまで精錬することは現在困難なように見える。

(7) Esnault-Viehweg の公式の有用性は中山昇氏にお教えいただいた。この公式にたよらず以下のようにして p_g を計算することもでき、それが氏の助言以前に筆者の用いていた方法でもある：ミルナー数 μ は本稿のようにして求められるので、Laufer の公式を思うと p_g を求めるのは実質的に特異点の標準サイクルの自己交点数 K^2 を求めるのと同じであるが、それを次のようにして実行する。分岐曲線の正規交叉化までの過程は堀川プロセスの類似物を作って双対化層の自己交点数を追うことは難しくない。正規化および孤立巡回商特異点解消に対応する部分は、まず有理型微分形式としての双対化層を具体的に書いておき、負型連分数展開から得られる具体的解消写像でもってこの微分形式を引き上げ、非特異モデルの標準因子に入る各例外曲線のウェイトを確定する。こうするとその自己交点数も計算できる…。ただこうした方法に多分新しさはなく、本質的にトーリック解消の際の不変量の変化を追う岡睦雄氏の方法 [Ok] に含まれるであろう。とはいえ、本稿の方法と上述の標準束公式をあわせ、2 重被覆の堀川解消は一般次数巡回被覆に拡張されていると言えると思う。もとにもどって p_g のみを求めるのに Esnault-Viehweg の公式の

簡潔さは傑出している。一般の分岐被覆に対してこれを拡張することは重要な問題であると思う（難波 [N, Chap.3] 参照）。則ち：

(問) $f: V \rightarrow W$ を分岐曲線の被約スキームが正規交叉な曲面の分岐被覆とし、 $\rho: \tilde{V} \rightarrow V$ を正規化とする。この時ベクトル束 $(f \circ \rho)_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の構造は？

(8) 孤立特異点のミルナー数の定義の仕方はおおまかに言って次の三種類が考えられた：

(ミルナー式) スムージングしてミルナーファイバーのホモトピー型を見る。

(ヤコビアン式) ヤコビアンリングの次元を見る。

(ネター式) 正規曲面にコンパクト化してネター公式の補正項を見る。

本稿ではネター式を我々の場合に拡張したわけであるが全ミルナー数のみしか読み取れない点が不満であろう。とは言っても、例えば孤立点の単純な類似で非均等特異な (non-equisingular) 点のヤコビアンリングを見るだけでは不十分で、非孤立な場合は特異跡全体の大域的性質（少なくとも法束の性質）が関与すると想像できる。その傍証として最も単純な法平坦な曲線中心の一回のブローアップによる不変量の変化を追った経験則 ([To1] [As4]) からそうなっているからである。ともあれ巡回被覆型非正規特異点のような比較的単純なものについてまず；

(問) ミルナー式またはヤコビアン式のミルナー数の定義は？

と問うてみたくなる。またネター式立場に立つても一般の分岐被覆を念頭におくならば例えば；

(問) 非正規ゴーレンスタイン曲面 S について $\chi(\mathcal{O}_S) - (1/12)(\omega_S^2 + e(S))$ の幾何的意味は？

(9) この論文の存在は古島幹雄氏にお教えいただいた。ちなみに本稿のテーマとは異なるが、氏の最近のコンパクト化のお仕事にも非正規特異点が重大な役割を演じるのは興味深い。

(10) このような状況は例えば堀川穎二、今野一宏両氏の多くの仕事の中に日常的に見られる。特に今野氏の労作 [Kon] はいかに自然に非正規特異点が現れるかを明確にしたという点においても画期的なものであろう。ところでここでは特異点の不変量が大域的な曲面の不変量に影響を及ぼす典型的な例として、次の問題を特筆しておきたい。それは曲線束を持つ一般型曲面についてその退化ファイバーの解析的不変量を取り出す問題である ([Ho2] [Ho3] [kon] [As1] [R] 等参照)。これは例えば種数 3 の非超楕円束の時には、カステルヌーボー直線 $[C]$ からの“ずれ”を与える曲線束固有の量を確定分類する問題と言い替えられるが、この場合に限っても現在に到るまで満足のいく理論が得られていないのは実に残念である。

ただ退化族固有の理論としては、ごく最近、従来にない全く新しい視点からのアプローチ——松本幸夫氏 ([MM] ...) らによる低次元トポロジーのめざましい成果を用いる方法、尾形庄悦、斎藤政彦両氏の退化ファイバー自身の符号不足数を取り出す方法 [OS] 等——がなされており、上記の問題との接点が期待される。

(11) この点は一見技術的な問題に見えるが、実はそうではなくてこの種の整数論的困難は我々の問題の中核に横たわっている。なぜなら序論でも述べたように我々の計算は結果的に特異点のリンクの符号不足数を求めているのに等しいが、これはエータ関数の特殊値を求めているのに等しいからである ([APS])。もう一つ別の観点から見て、仮に我々は Kouchinirenko [Kou] の意味で非退化な超曲面特異点を扱っているとしよう。この時は μ, p_g について見事な公式が知られており ([Kou][MT]) ここで問題は 3 次元ユークリッド空間内の多面体の（混合）体積と内部格子点数の問題に翻訳できる。しかしながら格子点数を数えることは一般に骨の折れる問題である。実際かつてこの方法を試みた人もいたようであるが成功を収めたわけではなかったらしい。我々の方法ではこの部分の困難を小数部分付き数列の和の評価に押し込めたいと見ることもできる。

(おわび) この問題は高校生にもわかることなので数学オリンピックに最適と講演中につい口をすべらせてしまいましたが、これは失言であったと後悔しています。僕自身はこの評価に多くの時間を費やしたことを告白します。例えば定理の主張にある不等式の途中の $\sum_{j=1}^{n-1} j\langle mj/n \rangle$ の部分なども、これ以上僕にはよう変形しないのでこのまま書いているわけです。本稿を読まれた方でこういう事に強い方がおられたらどうぞお教え下さい。

参考文献

- [As1] T.Ashikaga, A remark on the geography of surfaces with birational canonical morphisms, Math. Ann. 290 (1991), 63–76.
- [As2] T.Ashikaga, Normal two-dimensional hypersurface triple points and the Horikawa type resolution, Tôhoku Math. J. 44 (1992), 177–200.
- [As3] T.Ashikaga, The signature of smoothings of surface singularities on cyclic coverings, Preprint.
- [As4] T.Ashikaga, A note on isolated hypersurface surface singularities and permissible blow-ups, Preprint.
- [At] M.F.Atiyah, New invariants of 3- and 4-manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 48 (1988), 285–300.
- [APS] M.F.Atiyah, V.K.Patodi and I.M.Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 43–69.
- [B] L.Brenton, On the Riemann-Roch equation for singular complex surfaces, Pacific J. Math. 71 (1977), 299–312.
- [BK] E.Brieskorn and H.Knörrer, *Ebene Algebraische Kurven*, Birkhäuser, 1981.
- [C] G.Castelnuovo, Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie, Nota II, Rendiconti del R. Istituto Lombards, s.II, vol.24, 1891.
- [D] A.Durfee, The signature of smoothings of complex surface singularities, Math. Ann. 232 (1978), 85–98.
- [E] H.Esnault, Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière, Invent. Math. 68 (1982), 477–496.
- [Fl] A.Floer, An instanton-invariant for 3-manifolds, Commun. Math. Phys. 118 (1988), 215–240.
- [Fu] K.Fukaya, Floer homology for oriented 3-manifolds, Advanced Studies in Pure Math. 20 (1992), 1–92, Kinokuniya.
- [FMS] S.Fukuhara, Y.Matsumoto and K.Sakamoto, Casson's invariant of Seifert homology 3-sphere, Math. Ann. 287 (1990), 275–285.
- [Hi1] F.Hirzebruch, Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Functionen von zwei komplexen Veranderlichen, Math. Ann. 126 (1953), 1–22.
- [Hi2] F.Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, Enseign. Math. 19 (1974), 183–281.
- [Ho1] E.Horikawa, On deformation of quintic surfaces, Invent. Math. 31 (1975), 43–85.
- [Ho2] E.Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus two, in Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami (1977), 79–90.
- [Ho3] E.Horikawa, Certain degenerate fibers in pencils of curves of genus three, Preprint.
- [I] S.Iitaka, Algebraic geometry III (in Japanese), Iwanami, 1977.

- [Kon] K.Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 6$, Math. Ann. 290 (1991), 77–107.
- [Kou] A.G.Kouchnirenko, Polyédres de Newton et Nombres de Milnor, Invent. Math. 32 (1976), 1–31.
- [La] H.Laufer, On μ for surface singularities, in Proc. Symposia in Pure Math. 30 (1977), 45–49.
- [Lib] A.Libgober, Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes, Duke Math. J. 49 (1982), 833–851.
- [Lip] J.Lipman, Introduction to resolution of singularities, in Proc. of Symposia in Pure Math. 29 (1975), 187–230.
- [MM] Y.Matsumoto and J.Montesinos, Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces I, II, Preprints.
- [MT] M.Merle and B.Teissier, Conditions d'adjonction d'après Du Val, Lec.Notes in Math. 777 (1980), 229–245, Springer.
- [Mi] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals Math. Studies, Princeton Univ.Press, 1968.
- [Mo] S.Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, Preprint.
- [Mu] K.Murasugi, On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387–422.
- [NW] W.Neumann and J.Wahl, Casson invariant of links of singularities, Comment. Math. Helvetici 65 (1990), 58–78.
- [N] M.Namba, *Branched coverings and algebraic functions*, Longman Scientific and Technical, 1987.
- [Og] S.Ogata, Singularities and theorems of signature defect (in Japanese), Sûgaku 45 no.1 (1993), 1–11.
- [OS] S.Ogata and Ma.Saito, The signature defect of degenerations of abelian varieties, Preprint.
- [Ok] M.Oka, On the resolution of hypersurfaces singularities, Advanced Studies in Pure Math. 8 (1986), 405–436, Kinokuniya.
- [R] M.Reid, Problems on pencils of small genus, Preprint.
- [Sa] F.Sakai, Singularities on plane curves, Preprint.
- [Sh] Y.Shinohara, On the signature of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 273–285.
- [Ta] S.L.Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves, I and II, Manuscripta Math. 84 (1994), 225–244; Preprint.
- [To1] M.Tomari, A p_g -formula and elliptic singularities, Publ. RIMS Kyoto Univ. 21 (1985), 297–354.
- [To2] M.Tomari, The inequality $8p_g < \mu$ for hypersurface two-dimensional isolated double points, Math. Nachr. 164 (1993), 37–48.
- [W] J.Wahl, Smoothings of normal surface singularities, Topology 20 (1981), 219–246.
- [XY1] Y.Xu and S.S.T.Yau, The inequality $\mu \geq 12p_g - 4$ for hypersurface weakly elliptic singularities, Contemporary Math. 90 (1989), Amer. Math. Soc., 317–344.
- [XY2] Y.Xu and S.S.T.Yau, Durfee conjecture and coordinate free characterization of homogeneous singularities, J. Diff. Geometry 37 (1993), 375–396.
- [Z] O.Zariski, *Algebraic surfaces* (Second supplemented edition), 1971, Springer.