

Which subdiagonal algebras are nonselfadjoint
crossed products?

新潟大 理 斎藤 吉郎

近年, subdiagonal 環の構造研究は, 関数環の理論の非可換版として, また, 自己共役でない部分環の研究として, 発展してきた。その中での中心課題の1つは不変部分空間の構造研究である。 $L^2(T)$ (T : 単位円) における不変部分空間の研究は, Beurling の定理としてよく知られている。これは $e^{i\theta}me \subsetneq me$ なる $L^2(T)$ の不変部分空間は $gH^2(T)$ ($g \in L^2(T)$ で $|g|=1$ a.e.) の形しかけるということである。この一般化が, weak* Dirichlet 環において, 研究されている。さらに, 非可換 weak* Dirichlet 環として Arveson によって導入された subdiagonal 環において, Beurling 型の定理が考察された ([6], [8], etc). 1977年, McAsey, Muhly と筆者 [3] において subdiagonal 環の典型的な例として, 非共役接合積 (nonself-adjoint crossed products) の概念を導入し, Beurling 型の定理が成り立つことを示した。又, [4] において, これが成り立

つための必要かつ十分条件を考察した。我々はこの講演ではこの逆を考察する。すなわち, finite maximal subdiagonal環を与えたとき, Beurling 型の定理が成り立つならば, この subdiagonal環も決定できるか? しかしながら, 驚くべきことに, この subdiagonal環は, 非共役接合積と同型になることが示される。これから, Beurling 型の定理の研究は非共役接合積の場合だけ意味があることがわかる。

本稿では, まず, §1 で finite maximal subdiagonal環の不変部分空間の構造を示す。次に, §2 で非共役接合積を定義し, Beurling 型の定理の成り立つための必要十分条件を述べる。最後に, §3 で finite maximal subdiagonal環が Beurling 型の定理が成り立つのは非共役接合積の場合に限ることを示す。

§1. 有限極大 subdiagonal 環と不変部分空間.

$\mathcal{B}$ を faithful normal tracial state ϕ をもつ von Neumann 環とする。 $\mathcal{B}$ と ϕ から, Segal [9] によつて, 非可換 Lebesgue 空間 $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ ($1 \leq p \leq \infty$) を構成する。 S を $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ の部分集合とするとき, $[S]_p$ を L^p -ノルム閉包とする。

定義 1.1. U を 1 を含む $\mathcal{B}$ の σ -弱閉部分環とし, $\Phi \in \mathcal{B}$ から $D \in (U \cap U^*)$ の上への normal expectation とする. Φ のとき, U が $\Phi = \phi$ に関して, finite maximal subdiagonal 環であるとは次の (i)–(iv) が成り立つときをいう.

- i) $U + U^*$ は $\mathcal{B}$ で σ -弱稠密.
- ii) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ ($\forall x, y \in U$).
- iii) U は i) と ii) を満たす $\mathcal{B}$ の σ -weakly 部分環の中で極大.
- iv) $\phi \circ \Phi = \phi$.

$1 \leq p < \infty$ に対して, $H^p = [U]_p$, $H_0^p = [U_0]_p$ (但し, $U_0 = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}$ とおく). この H^p を非可換 Hardy 空間と呼ぶ. この H^p の性質については, 筆者 ([6], [7]) の研究がある. ここでは不変部分空間の構造を調べる.

定義 1.2. π を $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \phi)$ の閉部分空間とする.

- (i) π が左側不変 $\Leftrightarrow \cup \pi \subseteq \pi$.
- (ii) π が右側不変 $\Leftrightarrow \pi \cup \subseteq \pi$.
- (iii) π が両側不変 $\Leftrightarrow \pi$ が左側かつ右側不変.

このとき, 次の定理を得る.

定理 1.3. $1 \leq p < s \leq \infty$ とする.

(1). $\mathcal{M}$ を $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間とするならば, $\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)$ は $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間で $\mathcal{M} = [\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)]_p$.

(2). $\mathcal{M} \neq \{0\}$ が $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間とするならば $[\mathcal{M}]_p$ は $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間で $\mathcal{M} = [\mathcal{M}]_p \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)$.

この定理の証明には分解定理が用いられる. するから, $k \in \mathcal{B}$ で $k^* \in L^p(\mathcal{B}, \phi)$ とするならば $k = u_1 a_1 = a_2 u_2$, $a_1^*, a_2^* \in H^2$ とみたす $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ と $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$ が存在する (Ct, Proposition 1). 又, この定理から $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ と $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の不変部分空間は 1-1 対応がとくこととなる. このから, 不変部分空間については $L^2(\mathcal{B}, \phi)$ の場合だけに限定して示せばよいことがわかる.

§2. 非共役乗積.

M を faithful normal tracial state τ をもつ von Neumann 環とし, M は standard form, するから, M と τ に関する非可

Lebesgue 空間 $L^2(M, \tau)$ 上の left multiplication α による von Neumann 環と同一視する. また, α を $\tau \circ \alpha = \tau$ なる M 上の $*$ automorphism とする. $\alpha \neq \text{id}$,

命題 2.1. $L_0^2 = \{ f: \mathbb{Z} \rightarrow M \mid f(n) = 0 \text{ (有限個以外の } n \text{ に対して)} \}$ とおく. point addition と scalar 乗法 とするに次の (1) - (3) の演算に關して, L_0^2 は Hilbert algebra になる. しかも, $\psi(0) = I_M$, $\psi(n) = 0$ ($n \neq 0$) による τ 定義された ψ は L_0^2 の単元になる.

$$(1) (f * g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \alpha^k(g(n-k)),$$

$$(2) (f^*)(n) = [\alpha^n(f(-n))]^*,$$

$$(3) (f, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(k), g(k))_{L^2(M, \tau)}.$$

このとき, 簡単に L_0^2 の Hilbert 空間の完備化 L^2 は, 正確に,

$$\{ f: \mathbb{Z} \rightarrow L^2(M, \tau) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(n)\|_{L^2(M, \tau)}^2 < \infty \}$$

と一致する. しかも, $l^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(M, \tau)$ と同一視できる. $f \in L_0^2$ に対して, $L_f g = f * g$, $R_f g = g * f$ ($g \in L^2$) による L^2 の operator L_f, R_f を定義する. $\alpha \neq \text{id}$, $\mathcal{L} = \{ L_f : f \in L_0^2 \}$, $\mathcal{R} = \{ R_f : f \in L_0^2 \}$ とおく. また, $\mathcal{L}$ を含む L^2 の bounded elements の集合とすると $\mathcal{L}^b$ は achieved Hilbert algebra になる. すなわち, $\mathcal{L}^b$ は $g \mapsto f * g$ ($g \in L_0^2$) が L^2 の bounded

operator に拡張できる L^2 の元 f がある。このように f に対して, また, $L_f \neq R_f$ である。 $\Rightarrow$, Hilbert algebra の理論 (cf [2, chapter 1, §5]) から, $\mathcal{L} = \{L_f : f \in L^\infty\}$ から, $\mathcal{R} = \{R_f : f \in L^\infty\}$. $\mathcal{L} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{L}$ であるから, α は $L^2(M, \tau)$ 上の unitary operator に一意に拡張できる。また, L^2 の $*$ -operation を拡張して L^2 上の canonical antiunitary involution J は命題 2.1(2) から得られる。

M は $\{x \in M\}$ と同一視でき, L_x, R_x を $x \in M$ の L_x, R_x とおく $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(M) = \{L_x : x \in M\}$, $\mathcal{R}(M) = \{R_x : x \in M\}$ とおく。 $\mathcal{S}$ と一般に $\mathcal{S}$ は L^∞ の部分集合とする $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \{L_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}$, $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{R_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}$ とおく。また, $\delta(1) = I_M$, $\delta(n) = 0$ ($n \neq 1$) かつ δ を定義する。 $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(M), L_\delta\}$, $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(M), R_\delta\}$ が成り立つ。また, L^2 は単位元 ϕ を持つから, $\mathcal{L}$ は finite von Neumann algebra であり $\phi(L_f) = (f, \phi) = \tau(f(0))$, $f \in L^\infty$ とする ϕ は $\mathcal{L}$ 上の faithful normal tracial state になる。 $\Rightarrow$ $L^2 = L^2(\mathcal{L}, \phi)$ $L^\infty = L^\infty(\mathcal{L}, \phi)$ と同一視できる。 $\Rightarrow$ $(W_t f)(n) = e^{2\pi i n t} f(n)$, $f \in L^2$ なる $\Rightarrow$ unitary 群 $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を定義し, $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\beta_t(L_f) = W_t L_f W_t^*$ ($\beta_t(R_f) = W_t R_f W_t^*$) と定義すると $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ 上の periodic automorphism group になる。 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

$$\varepsilon_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \beta_t dt$$

と定義する. ε_n は σ -弱連続な linear map で, 特に ε_0 は ϕ を preserve する L 上の $L(M)$ の ± 1 の faithful normal expectation になる.

次に, $H^2 = \{f \in L^2 : f(n) = 0 \ (n < 0)\}$, $H^0 = L^0 \cap H^2$ と定義する. α は H^0 上の M と α による非共役乗法積と見做す. また $L_+ = \{L_f : f \in H^0\}$, $R_+ = \{R_f : f \in H^0\}$ とおく. $n \geq 1$ とき,

定理 2.2. L_+ (resp. R_+) は ε_0 を ϕ に制限して finite maximal subdiagonal 環になる. また, L_+ (resp. R_+) は $L_1 \in L(M)$ (resp. $R_1 \in R(M)$) によって, 生成した L (resp. R) の σ -弱閉部分環である.

定義 2.3. $\mathcal{M}$ を L^2 の部分空間とする.

- (1) $\mathcal{M}$ が左側不変 $\Leftrightarrow L_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (2) $\mathcal{M}$ が右側不変 $\Leftrightarrow R_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (3) $\mathcal{M}$ が両側不変 $\Leftrightarrow (L_+ + R_+) \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (4) $\mathcal{M}$ が pure $\Leftrightarrow \bigcap_{n \geq 0} L_+^n \mathcal{M} = \{0\}$.
- (5) $\mathcal{M}$ が full $\Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} L_+^n \mathcal{M}$ が L^2 で稠密.

我々は Beurling 型の定理が成り立つとは L^2 の $\mathcal{M}$ が pure で左側不変部分空間 $\mathcal{M} = R_V H^2$ (V は L^0 上の partial isometry) の形になる.

にかけるときにいう。この節の目的は Beurling 型の定理が成り立つための必要十分条件を求めることである。[3]に
おけるように、 M が factor ならば Beurling 型の定理は成り
立つ。しかしながら、その逆は必ずしも成り立たない。 $\mathcal{Z}(M)$
を M の中心, $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ (resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$) を $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) の中心とする。
今 $C = \{z \in \mathcal{Z}(M) : \alpha(z) = z\}$ とおく。 $z \in C$ とき、次の補助定
理を得る。

補助定理 2.4. (1) $\forall z \in C$ に対し, $L_z = R_z$.

(2) $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap L(M) = \mathcal{Z}(\mathcal{R}) \cap R(M) = L(C)$.

まず、次の定理を得る。

定理 2.5. 次の 3 つの条件は同値。

(1). α は M の中心 $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明, すなわち, $\alpha(z) = z$ ($\forall z \in \mathcal{Z}(M)$).

(2). L^2 のすべての pure な左側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は L^2 の partial isometry) の形にかけらる。

(3). H^2 のすべての左側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は L^2 の partial isometry) の形にかけらる。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2). α は $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明とする。 H^2 の pure な左

側不変部分空間, P を L^2 から $\mathcal{M} \ominus L_\beta \mathcal{M}$ の上への projection, P_0 を L^2 から $H^2 \ominus L_\beta H^2$ の上への projection とする. $\Rightarrow \Leftarrow$ 3, Theorem 3.2] から, $P, P_0 \in L(\mathcal{M})$. 射影作用素の比較定理 (cf. [2, p. 218, Théorème 1]) から, $L_2 P < L_2 P_0$ から $(1-L_2)P > (1-L_2)P_0$ を満たす $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ の射影作用素 z が存在する. 補題定理 2.4 から, $L_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}) \cap L(\mathcal{M})$. $L_2 \mathcal{M} \subset L_2 H^2$ としても L^2 の pure な左側不変部分空間であるから, [3, Theorem 3.2] から, $L_2 \mathcal{M} = R_{V_1} L_2 H^2$ を満たす $\mathcal{R}$ の partial isometry R_{V_1} がある. 同様 $\mathcal{K}$, $(1-L_2)H^2 = R_{V_2}(1-L_2)\mathcal{M}$ を満たす $\mathcal{R}$ の partial isometry R_{V_2} がある. H^2 が pure であるから $R_{V_2}^* R_{V_2} = R_{V_2} R_{V_2}^* = 1 - L_2$. $z = z^*$, $R_V = R_{V_1} L_2 \oplus R_{V_2}^* (1-L_2)$ とおくと, $\mathcal{M} = R_V H^2$ を得る.

(2) $\Rightarrow$ (3). 明らか.

(3) $\Rightarrow$ (1). α が $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ 上での自明でない α とする. $\Rightarrow \Leftarrow$ 3, $\alpha(e) = 0$ を満たす零でない $\mathcal{M}$ の projection e がある. $\mathcal{M}e = \{f \in H^2: e f(0) = f(0)\}$ とおくと $\mathcal{M}e$ は容易 $\mathcal{K}$, pure, full な左側不変部分空間で $Le L_\beta^* \mathcal{M}e \subseteq \mathcal{M}e$ を満たす. $\mathcal{M}e = R_V H^2$ の形に書けるとすると, $\mathcal{M}e$ は full から R_V は unitary operator になる. $L \in \mathcal{K}$, z_1

$$Le L_\beta^* H^2 = Le L_\beta^* R_V^* \mathcal{M}e = R_V^* Le L_\beta^* \mathcal{M}e \subseteq R_V^* \mathcal{M}e = H^2$$

1 ではないから, $Le L_\beta^* \in \mathcal{L}_+$. これは矛盾.

次に, Beurling 型の定理が成り立つこと, L_+ を含む L の σ -弱閉部分環 Λ の決定, また, L^2 の pure な両側不変部分空間 Λ の決定は次のようにまとめられる.

定理 2.6. 次の条件は定理 2.5 の各条件と同値である.

(4) もし $\mathcal{B}$ が L_+ を含む L の σ -弱閉部分環とするならば,
 $\mathcal{B} = (1 - Le)L \oplus LeL_+$ をみたす C^* 射影作用素 e がある.

(5) もし $\mathcal{M}$ が H^2 の両側不変部分空間ならば, $\mathcal{M}$ は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) Λ 形にかけられる.

証明. (2) $\Rightarrow$ (5). $\mathcal{M}$ を H^2 の両側不変部分空間とする. 定理 2.5 から, $\mathcal{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) Λ 形にかけられる. もし, $e = V^*V$ とすると [3, Proposition 4.5] の証明のように, $Re \in \mathcal{Z}(\mathcal{R}) \cap R(\mathcal{M}) = L(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) = L(C)$. $Le = Re$ であるから, $\mathcal{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) が成り立つ.

(5) $\Rightarrow$ (4). $\mathcal{B}$ を L_+ を含む L の σ -弱閉部分環とするならば, $\mathcal{B} = (1 - Le)L \oplus LeL_+$ である. [3, Corollary 1.5] から $K = L^2 \ominus \mathcal{B}$ は H^2 の両側不変部分空間であるから, $K = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) Λ 形にかけられる. $e = V^*V$ とおくと, $\mathcal{B} = (1 - Le)L \oplus LeL_+$ が

示せる.

(A) $\Rightarrow$ (1). α が $\mathcal{B}(M)$ 上 自明でないとする. 定理 2.5 の (3) $\Rightarrow$ (1) の証明と同様に, H^2 の pure な full で左側不変部分空間 $\mathcal{M}$ をとる. $\mathcal{B} \in L_e L_f^* \in \mathcal{L}_+$ に α を生成した $\mathcal{L}$ の σ -弱閉部分環をとると, $\mathcal{L}_+ \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ が示せる. 仮定から, $\mathcal{B} = (1 - L_p)\mathcal{L} \oplus L_p\mathcal{L}_+$ (P は $\mathcal{C}$ の projection で $0 < P < 1$) の形に示せる. $L_p\mathcal{B} = L_p\mathcal{L}_+ \neq \{0\}$, $L_p L_e L_f^* \in L_p\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ であるから $L_p L_e L_f^* = 0$. したがって, $\mathcal{L}$, $(1 - L_p)\mathcal{L}$ は $L_e L_f^* \in (1 - L_p)\mathcal{L}_+$ に α を生成した σ -弱閉部分環である. $(1 - L_p)L_f^2 \in (1 - L_p)\mathcal{B}$ であるから $((1 - L_p)L_e L_f^*)^2 = 0$ であるから示す可.

次に, 定理 2.6 の条件 (5) を弱めたものを考えるが, 実際, それは同値になる.

命題 2.7. 次の条件は 定理 2.5, 2.6 の (1)–(5) と同値.

(6). $\mathcal{M}$ は L^2 の pure な両側不変部分空間とするならば, $\mathcal{M}$ は $R_v H^2$ (V は L^2 の partial isometry で $V^*V = VV^* \in \mathcal{C}$) の形に示せる.

証明. (6) $\Rightarrow$ (5) は明らか.

(1) $\Rightarrow$ (6). $\mathcal{M}$ を L^2 の pure な両側不変部分空間とすると, 定理 2.5 から $\mathcal{M} = R_v H^2$ (V は L^2 の partial isometry) の形に示せる.

る. $e = v^*v$ とする. $R_e = R_v R_v^*$ で $R_e L^2 = R_v L^2 = R_v(\bigvee_{n \leq 0} L_n^* H)$
 $= \bigvee_{n \leq 0} L_n^* R_v H^2 = \bigvee_{n \leq 0} L_n^* M$ は両側不変部分空間であるから,
 [3, Corollary 4.4] から $e \in \mathcal{Z}(L^2)$. L は finite 故,
 $vv^* = e$. $\mathcal{B} = \{x \in L : xM \subseteq M\}$ とおくと $\mathcal{B}$ は L_+ を
 含む L の固有な σ -弱閉部分環であることは明らか. 定理 2.6
 から, $\mathcal{B} = (1 - L_p)L \oplus L_p L_+$ (p は C^* projection) の形に可
 かける. $(1 - L_p)M$ は L -不変で $(1 - L_p)M \subseteq M$ であるから
 $(1 - L_p)M = \{0\}$. $\xi = \zeta$, $R_{1-p} R_e L^2 = L_{1-p} R_e L^2 =$
 $\bigvee_{n \leq 0} L_n^* L_{1-p} M = \{0\}$. $L \notin \mathcal{P}^{\infty}$ と, $(1 - p)e = 0$. $R_e \in \mathcal{Z}(L)$
 故 $R_e = L_e$. $\xi = \zeta$. $L_e M \subseteq M$ であるから, $L_e \in \mathcal{B}$.
 $L \notin \mathcal{P}^{\infty}$ と $L_e = L_e L_p \in L_p L_+ \subset L_+$. したがって, L_e
 $\in \mathcal{Z}(L) \cap L(M) = L(C)$. //

定理 2.5, 2.6 と命題 2.7 において, factor reduction
 theory を用いている. $L \notin \mathcal{P}^{\infty}$ と, [3] の結果を引用し
 て得る.

例 2.8. 次の条件は同値.

- (1) M は factor である.
- (2) $C = \{C1\}$ で L^2 の各 p -maximal 左側不変部分空間 $\mathfrak{H} \subset R_v H^2$
 (v は L^2 の partial isometry) に対して.

- (3) $C = \{C\}$ で H^2 の右側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) の形に示せる.
- (4) L_+ は L の maximal σ -weakly closed subalgebra である.
- (5) もし M が " H^2 の両側不変部分空間とするならば", $M = R_V H^2$ (V は L^∞ の unitary operator) に示せる.
- (6) もし M が " L^2 の両側不変部分空間で $L \cap M \neq M$ ならば", $M = R_V H^2$ (V は L^∞ の unitary operator) の形に示せる.

§3. Which subdiagonal algebras are crossed products?

非共役乗積において Beurling 型の定理が成り立つことは驚くべきことであり, また, それは強い結果である. 一般に finite maximal subdiagonal 環において, 不変部分空間の形を決定する問題は非常に興味のある問題であるが, Beurling 型の定理が成り立つ finite maximal subdiagonal 環は何かという問題が生じてくる. ここでは, このような subdiagonal 環は非共役乗積以外にないことを示す. §1 の記号をここではそのまま用いることにする. $\mathcal{B}$ を faithful normal tracial state をもつ von Neumann algebra で $\mathcal{U}$ を finite maximal subdiagonal algebra とする. $D = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^*$ とおく. また, $x \in \mathcal{B}$ とするとき,

$L_x f = x f$, $R_x f = f x$ ($f \in L^2(\mathcal{B}, \phi)$) により, L_x, R_x を定義する. $\alpha \neq \pm 1$, $\mathcal{L} = \{L_x : x \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R} = \{R_x : x \in \mathcal{B}\}$ とおく. $\mathcal{B}$ は finite achieved Hilbert algebra であり $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は $\mathcal{B}$ の ~~left~~ ^{right} von Neumann $\overline{\mathcal{L}}$ である. また, $\mathcal{L}_+ = \{L_x : x \in \mathcal{U}\}$ ($\mathcal{R}_+ = \{R_x : x \in \mathcal{U}\}$) とおく.

[3]において, H^2 のあらゆる零でない両側不変部分空間は RH^2 (U は $\mathcal{B}$ の unitary operator) の形にかけるとするならば, $\phi \circ \alpha = \phi$ なる D の $*$ -automorphism が存在して, $\mathcal{B}$ は $D \circ \alpha$ による接合積に同型でありこの対応で $\mathcal{U}$ は H^2 と同型になる. さらに D が factor になることを示した. ここでは, 少し緩い条件で考える. $C = \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap D$ とおくと明らかに, $C \subset \mathcal{Z}(D)$ である.

定義 3.1. $\mathcal{U}$ を $\Phi = \phi$ に属する finite maximal subdiagonal 環とする. $\alpha \neq \pm 1$, $\mathcal{U}$ が pure であるとは $\mathcal{U}P = (\mathcal{B}P)$ なる C の零でない projection P が存在しないときをいう.

一般に, $\mathcal{U}$ が finite maximal subdiagonal 環であると $\mathcal{U}$ は pure ではない. 例として $\mathcal{B} = L^{\infty}(T) \oplus L^{\infty}(T)$ とする. $\mathcal{U} = H^{\infty}(T) \oplus L^{\infty}(T)$, $\Phi(f \oplus g) = (\int f dm) \oplus g$, ($f, g \in L^{\infty}(T)$) とおくと, $\mathcal{U}$ は Φ に属する finite maximal subdiagonal 環であり $\mathcal{U}$ が pure ではない.

(V は $\mathcal{B}$ の partial isometry かつ $V^*V = VV^* \in C$) のとき $V^*V = 1 - p$ とおくと, $\phi(x) \neq 0$, $\forall y \in H_0^2$, $\forall x \in \mathcal{B}$ に対して,
 $\phi(p \times p y) = 0$. $V \notin \mathcal{B}''$, 従って [1, Corollary 2.2.4] より, $\mathcal{B}p = \mathcal{U}p$. $\mathcal{U}$ は pure 故 $p = 0$. 従って, V は unitary operator となる. //

補題 3.5. V が $R_V H^2 = H_0^2$ なる $\mathcal{B}$ の unitary operator ならば, $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して, $R_V^n H^2 = L_V^n H^2$.

証明. $H^2 = L^2 \ominus JH_0^2 = L^2 \ominus JR_V H^2 = L^2 \ominus L_V^* JH^2 = L_V^*(L^2 \ominus JH^2) = L_V^* H_0^2$. $z = z'$, $R_V H^2 = H_0^2 = L_V H^2$. $n \geq 1$ として $R_V^n H^2 = L_V^n H^2$ ならば, $R_V^{n+1} H^2 = R_V(R_V^n H^2) = R_V(L_V^n H^2) = L_V^n(R_V H^2) = L_V^n(L_V H^2) = L_V^{n+1} H^2$. $V \notin \mathcal{B}''$, 従って, $\forall n \geq 0$ に対して, $L_V^n H^2 = R_V^n H^2$.
 しかるに, $n < 0$ ならば, $R_V^n H_0^2 = R_V^{*(n-1)} H^2 = L_V^{*(n-1)} H^2 = L_V^n H_0^2$.
 よって, $R_V^n H^2 = J^2 R_V^n H^2 = J(L_V^{*(n)}(JH^2)) = J(L_V^{*(n)}(L^2 \ominus H_0^2)) = J(L^2 \ominus L_V^{*(n)} H_0^2) = J(L^2 \ominus R_V^{*(n)} H_0^2) = J(R_V^{*(n)}(JH^2)) = L_V^n H^2$.
 よって, 全ての n に対して成り立つ.

補題 3.6. もし $J \notin \mathcal{U} \subset J \subset \mathcal{B}$ なる σ -弱閉部分環とすると, $J = (1-p)\mathcal{B} \oplus p\mathcal{U}$ と表わす projection $p \in C$ がある.

証明. 定理 1.3 より, $K = L^2 \ominus [J]_2 \neq \{0\}$. $\phi \neq 0$,

JK は H^2 の両側不変部分空間である。仮定から $JK = R_W H^2$ (W は $\mathcal{B}$ の partial isometry で $W^*W = WW^* \in \mathcal{C}$) の形になる。
 定理 2.6 (5) $\Rightarrow$ (4) の証明のようく, $J = (1-p)\mathcal{B} \oplus PU$ ($p = W^*W$) が成り立つ。

補題 3.7. $V \in H^2 = R_V H^2$ なる $\mathcal{B}$ の unitary operator とする。 $\Rightarrow \alpha \geq \beta$, $VDV^* = D$.

証明. 補題 3.5 から, $H^2 = L_V H^2$ で $L(D) \subset \mathcal{L}_+$ から,
 $L_V^* L(D) L_V H^2 \subset H^2$. ($\nexists H^2$ 上, $L_V^* L(D) L_V \subset \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^* = L(D)$.)
 $\Rightarrow \underbrace{VDV^* H^2 \subset H^2}_{\text{成り立つ}} \Rightarrow VDV^* \subset \mathcal{B} \cap H^2 = \mathcal{U}$. $VDV^* \subset D$. ($\nexists H^2$ 上, $VDV^* = D$.)

定理 3.2 の証明. $\forall d \in D$ に対し $\alpha(d) = VdV^*$ により D の $\ast$ -automorphism α を定義する。 $\Rightarrow \alpha \geq \beta$. 明らかに,
 $\phi \circ \alpha = \phi$ である。 $\mathcal{B}$ は $D \subset V$ により生成された部分環とする
 ($\mathcal{B}$ は単に $D \cup \{V^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の有限個の積の一次結合からなるものとする)。 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の sub-Hilbert algebra になる。 L_0 は §2
 におけるように, D と α による Hilbert $\overline{\mathbb{R}}$ とする。 $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k V^k \in \mathcal{B}$ に対し $f \in L_0$ ($f(k) = d_k$) を対応させる。
 $\Rightarrow \alpha$ 対応を W とする。 $\Rightarrow \alpha \geq \beta$, W は well-defined である。
 であることは示そう。まず, $L_0[D] \subset H_0^2 \subset [D]^\perp$ ($\forall n \geq 0$)

であるから, $[D]_2$ は L_V に対する wandering subspace である.

今, $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k V^k \in \mathcal{B}$ の Hilbert space norm は $\|x\|^2 = \phi(x^*x)$

であるから

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_k \sum_l \phi(V^{*l} d_l^* d_k V^k) = \sum_k \sum_l \phi(V^{k-l} d_l^* d_k) \\ &= \sum_k \phi(d_k^* d_k) = \sum_k \|d_k\|^2 = \|Wx\|^2 \end{aligned}$$

$1 \in \mathcal{H}$, τ W に対して well-defined τ isometric である. したがって,

W は $\mathcal{B}$ から L_0^2 の $\mathcal{H}$ への Hilbert algebra isomorphism である

ことを示せる. 証明は完全にするため, $[\mathcal{B}]_2 = L^2$ である

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_V^n [D]_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [V^n D]_2 = H^2 \text{ である } \Rightarrow \text{示せばよい.}$$

のため, まず, $\mathcal{H} = \bigcap_{n \geq 0} L_V^n H^2 = \{0\}$ を示そう. $\mathcal{H} \subset H^2$ である

から, もし $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ならば $L_V \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. $\mathcal{H} = \tau$, もし

$\mathcal{H} \neq \{0\}$ ならば, $\mathcal{J} = \{x \in \mathcal{B} : L_V x \in \mathcal{H}\} \subsetneq \mathcal{B}$ である.

補題 3.6 によれば, $\mathcal{J} = (1-p)\mathcal{B} \oplus p\mathcal{U}$ なる projection

$p \in \mathcal{C}$ がある. しかし $L_V^* \mathcal{H} = \mathcal{H}$ 故, $V^* \in \mathcal{J}$. $\mathcal{H} = \tau$,

$pV^* \in p\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. 一方, $H_0^2 = L_V H^2$ であり, $pV \in \mathcal{U}_0$. したがって,

から, $pV = 0$. V は unitary 故 $p = 0$. したがって,

$\mathcal{J} = \mathcal{B}$. これは矛盾. よって, $H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_V^n [D]_2$. したがって,

$L^2 = H^2 \oplus \mathcal{J} H_0^2$ であるから, $[\mathcal{B}]_2 = L^2$. //

H^2 の $\mathcal{H}$ での零でない両側不変部分空間が $R_V H^2$ (V は $\mathcal{B}$ の unitary operator) の形に決まるとする. $\mathcal{H}$ のとき, 明らか

から, $C = \{C1\}$ であるから U は $\oplus$ pure になる. $\angle$
 したがって, 定理 3.2 から [3] の Theorem 6.1 を用いて得
 る.

References

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.
- [2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [3] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.
- [4] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products II, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [5] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.
- [6] K. -S. Saito, On noncommutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J.

29(1977), 585-595.

- [7] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 348-352.
- [8] K. -S. Saito, Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Pacific J. Math.
- [9] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., 57(1953), 401-457.