

Symplectic Triple Systems と単純リー環

横浜市大 浅野 洋

こゝでは、表題の triple system から単純リー環を統一的に構成する方法を述べる。標数 0 の代数的体上では階数 2 以上の単純リー環はすべてこの方法で得られる。この方法は Freudenthal の E_8 型単純リー環の構成法をモデルにしたもので、同様な試みは Meyberg, Faulkner, Hein 達によってなされてはいるが、いずれにも一長一短があり満足出来る状態とは言えない。

以下において、triple system はすべて有限次元、基礎体の標数は 0 と仮定する。

定義 1. 零でない交代双線形形式 $\langle, \rangle$ を有する triple system $\mathfrak{h}$ の任意の要素 x, y, z, u, v に対し、次の等式が成立つとき、 $\mathfrak{h}$ を symplectic triple system (STS と略記) という。

$$(S1) \quad [xyz] - [yxz] = 0$$

$$(S2) \quad [xyz] - [xzy] = 2\langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

$$(S3) \quad [uv[xyz]] = [[uvx]yz] + [x[uvy]z] + [xy[uvz]].$$

定理1 STS $\tilde{K}$ が単純である為の必要十分条件は、交代双線形形式が非退化なことである。

(証明) (S2) で $z=x$ とおくと $[xyz] - [xxz] = 3\langle y, x \rangle x$.

$\tilde{K}$ の任意の微分 D を作用させて

$$[(Dx)y] + [x(Dy)] + [xy(Dx)] - 2[(Dx)x]y - [xx(Dy)] = 3\langle y, x \rangle Dx.$$

左辺を (S2) を用いて変形すれば、 $(\langle y, Dx \rangle + \langle Dx, y \rangle)x = 0$.

故に、“ $\tilde{K}$ の微分は歪対称である。” 特に、次式が成立。

$$(1) \quad \langle [xyz], w \rangle = \langle [xyw], z \rangle$$

次に、 $\mathcal{F}$ が $\tilde{K}$ のイデアルであれば、 $\mathcal{F}^\perp := \{x \in \tilde{K} \mid \langle x, \mathcal{F} \rangle = 0\}$ もイデアルであることを示す。 $\tilde{K} \ni x, y, \mathcal{F}^\perp \ni z, \mathcal{F} \ni w$ に対し、(1) より $[xyz] \in \mathcal{F}^\perp$ 。(S2) を用いることによって

$$\langle [xzy], w \rangle = 2\langle z, \langle x, w \rangle y \rangle - \langle \langle y, w \rangle x, z \rangle.$$

他方 (S2) で $z=w$ とおくと $2\langle y, w \rangle x - \langle w, x \rangle y \in \mathcal{F}$.

これは x と y を交換しても成立するので、結局 $\langle x, w \rangle y \in \mathcal{F}$, $\langle y, w \rangle x \in \mathcal{F}$ が成立。 $\therefore [xzy] \in \mathcal{F}^\perp$. 従って $\mathcal{F}^\perp$ がイデアルであることがわかる。

いま $\tilde{K}$ が単純と仮定すれば $\tilde{K}^\perp = 0$. 即ち、 $\langle, \rangle$ は非退化である。逆に $\tilde{K}^\perp = 0$ と仮定する。上に示したことより、 $\tilde{K} \supsetneq \mathcal{F}$ に対して $\langle \tilde{K}, \mathcal{F} \rangle \tilde{K} \subset \mathcal{F}$ が成立するので、特に

$\bar{k}$ 単 $\bar{f}$ なら $\langle \bar{k}, \bar{f} \rangle \equiv 0$. 故に $\bar{f} \subset \bar{k}^\perp = 0$. 従って $\langle, \rangle$ が非退化なら $\bar{k}$ は単純である。

STS $\bar{k}$ に同型な STS $\overline{\bar{k}}$ を考え, 直和 $\bar{q} := \bar{k} \oplus \overline{\bar{k}}$ を作る.

$\bar{q} \ni t_i := x_i + \bar{y}_i$ ($= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と書くこともある) ($i = 1, 2, 3$) に対し

$$(2) \{t_1 t_2 t_3\} := \begin{pmatrix} [x_1 y_2 x_3] - [x_2 y_1 x_3] - \langle x_1, y_2 \rangle x_3 + \langle x_2, y_1 \rangle x_3 + 2\langle x_1, x_2 \rangle y_3 \\ [x_1 y_2 y_3] - [x_2 y_1 y_3] + \langle x_1, y_2 \rangle y_3 - \langle x_2, y_1 \rangle y_3 - 2\langle y_1, y_2 \rangle x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する. $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, $W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ によって $\bar{q}$ 上の線形写像を定義すれば, 明らかに

$$[U, V] = 2V, \quad [U, W] = -2W, \quad [V, W] = U$$

が成立つ. 又, $\forall D \in \text{End}(\bar{k})$ に対し, $\bar{D} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Dx \\ Dy \end{pmatrix}$ と定義すれば, $[\bar{D}, U] = [\bar{D}, V] = [\bar{D}, W] = 0$ が成立つ.

$\bar{k}$ の線形写像 $z \mapsto [xyz]$ を $L(x, y)$ で表わし, これらによって張られる空間を $L(\bar{k}, \bar{k})$, $\bar{k}$ の微分全体を $\text{der}(\bar{k})$ で表わす. $L(\bar{q}, \bar{q})$, $\text{der}(\bar{q})$ も同様とする. 又, U, V, W によって張られる $\text{gl}(\bar{q})$ の部分環を $\mathcal{O}$ で表わす.

補題 2 (i) $L(\bar{q}, \bar{q}) = \overline{L(\bar{k}, \bar{k})} \oplus \mathcal{O}$,

(ii) $\text{der}(\bar{q}) = \overline{\text{der}(\bar{k})} \oplus \mathcal{O}$

特に $\bar{k}$ が単純であれば $\text{der}(\bar{q}) = \overline{\text{der}(\bar{k})} \oplus \mathcal{O}$

(証明) 三項積の定義式(2)より

$$L(t_1, t_2) = \overline{L(x_1, y_2)} - \overline{L(x_2, y_1)} + (\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle)U + 2\langle x_1, x_2 \rangle V - 2\langle y_1, y_2 \rangle W$$

$$\text{従って } L(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \subset \overline{L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} + \mathcal{O}$$

$$\text{他方, } 2\overline{L(x, y)} = L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right)$$

$$2\langle x, y \rangle U = L\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) - L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$2\langle x, y \rangle V = L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$2\langle x, y \rangle W = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right)$$

従って $\overline{L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} + \mathcal{O} \subset L(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})$. 和がリ-環としての直和であることも明らかで(i)は示された。

次に, $\mathfrak{k}$ の微分は歪対称であることから $\overline{\mathfrak{d}er(\mathfrak{k})} \subset \mathfrak{d}er(\mathfrak{f})$.

$[U, L(t_1, t_2)] = 4\langle x_1, x_2 \rangle V + 4\langle y_1, y_2 \rangle W = L(Ut_1, t_2) + L(t_1, Ut_2)$ だから $U \in \mathfrak{d}er(\mathfrak{f})$. 同様にして, $V, W \in \mathfrak{d}er(\mathfrak{f})$.

$$\text{故に } \overline{\mathfrak{d}er(\mathfrak{k})} \oplus \mathcal{O} \subset \mathfrak{d}er(\mathfrak{f})$$

(ii)の後半を示す前に次の系と定理3を証明しておく。

系 $\mathfrak{f}$ は Lie triple system (LTS と略記)である。

(証明) $L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) \subset \mathfrak{d}er(\mathfrak{k})$ だから定理2により $L(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \subset \mathfrak{d}er(\mathfrak{f})$.

$\{t_1, t_2, t_3\} = -\{t_2, t_1, t_3\}$ は明らか。Jacobi 律も容易に確かめる。

定理3 $\mathfrak{k}$ をSTS, $\mathfrak{f} := \mathfrak{k} \oplus \overline{\mathfrak{k}}$ を上述のLTSとする。

このとき, $\mathcal{A}$ が単純になる為の必要十分条件は $\mathcal{K}$ が単純なことである。

(証明) $\forall \mathcal{F} \triangleleft \mathcal{K}$ に対し, $\mathcal{G} := \mathcal{F} \oplus \bar{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{A}$ のイテラルだから必要条件であることはわかる。

逆に, $\forall \mathcal{G} \triangleleft \mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{F} := \mathcal{K} \wedge \mathcal{G}$ とおく。 $\mathcal{K} \ni x, y,$

$\mathcal{F} \ni z$ に対して $[xyz] = \{x\bar{y}z\} + \langle x, y \rangle z \in \mathcal{F}$ 。

更に, $\bar{z} = W(z) \in L(\mathcal{A}, \mathcal{A})\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ 。

従って $[xzy] = \{x\bar{z}y\} + \frac{1}{2}\{xz\bar{y}\} \in \mathcal{F}$ 。 故に $\mathcal{F} \triangleleft \mathcal{K}$ 。

他方 $\mathcal{G} \ni t = x + \bar{y}$ に対して, $x = V \cdot W(t) \in L(\mathcal{A}, \mathcal{A})^2 \mathcal{G} \subset \mathcal{G}$,

$\bar{y} = W \cdot V(t) \in \mathcal{G}$ だから

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} \wedge \mathcal{K} \oplus \mathcal{G} \wedge \bar{\mathcal{K}} \quad , \quad \mathcal{G} \wedge \bar{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{G} \wedge \mathcal{K}}$$

が成立つ。 $\mathcal{K}$ が単純であると仮定すれば $\mathcal{F} = 0$ 又は

$\mathcal{F} = \mathcal{K}$ 。 従って $\mathcal{G} = 0$ 又は $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ となる。 即ち

$\mathcal{A}$ は単純である。

(補題2の証明の続き)

$\mathcal{K}$ が単純と仮定すれば, 系と定理3より $\mathcal{A}$ は単純 LTS である。単純 LTS に対しては $\text{der}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ であることが知られているので, 補題2のすでに証明した結果と一諸にすれば $\text{der}(\mathcal{A}) = \overline{\text{der}(\mathcal{K})} \oplus 0$, $\text{der}(\mathcal{K}) = L(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ をうる。

定義 2. STS $\hat{K}$ から得られる LTS $\mathfrak{g} := \hat{K} \oplus \overline{\hat{K}}$ の standard enveloping Lie algebra を $g(\hat{K})$ で表わし, $\hat{K}$ の standard enveloping Lie algebra と呼ぶ.

$$\begin{aligned} g(\hat{K}) &= \mathfrak{g} \oplus L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ &= \hat{K} \oplus \overline{\hat{K}} \oplus \overline{L(\hat{K}, \hat{K})} \oplus \mathcal{O} \end{aligned}$$

定理 4 STS $\hat{K}$ の standard enveloping Lie algebra を $g(\hat{K})$ とするとき, $\hat{K}$ と $g(\hat{K})$ の単純性は同等である.

(証明) $g(\hat{K})$ が単純と仮定すれば $\mathfrak{g}$ が単純で, 従って $\hat{K}$ が単純である. 逆に, $\hat{K}$ が単純と仮定する. $g(\hat{K}) \not\cong \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} \ni X := x + \bar{y} + \bar{D} + \alpha U + \beta V + \gamma W$ (α, β, γ はスカラー, $D \in L(\hat{K}, \hat{K})$) に対し, $2\beta W = [W, [W, X]] \in \mathfrak{l}$, $-2\gamma V = [V, [V, X]] \in \mathfrak{l}$. もし $\beta \neq 0$ 又は $\gamma \neq 0$ と仮定すれば, $W \in \mathfrak{l}$ 又は $V \in \mathfrak{l}$ となり従って $U \in \mathfrak{l}$ となる. $\mathfrak{l}$ はイデアルだから $[U, g(\hat{K})] \subset \mathfrak{l}$. 故に $\hat{K} \oplus \overline{\hat{K}} \oplus \mathcal{O} \subset \mathfrak{l}$. 而も $\overline{L(\hat{K}, \hat{K})} \subset [\hat{K}, \overline{\hat{K}}] \subset \mathfrak{l}$ だから $\mathfrak{l} = g(\hat{K})$ となり矛盾.

故に, $\beta = \gamma = 0$. 即ち $X = x + \bar{y} + \bar{D} + \alpha U$.

$[U, X] \in \mathfrak{l}$, $[U, [U, X]] \in \mathfrak{l}$ より $x, \bar{y} \in \mathfrak{l}$. $\hat{K} \ni z$ に対して, $[x, z] = 2\langle x, z \rangle V \in \mathfrak{l}$, $[\bar{y}, \bar{z}] = 2\langle z, y \rangle W \in \mathfrak{l}$. $V, W \notin \mathfrak{l}$ だから $\langle x, z \rangle = \langle z, y \rangle = 0$. 定理 1 より $x = y = 0$ となる. 更に, $[x, V] = 2\alpha V \in \mathfrak{l}$ より

$\alpha = 0$. 再び $\forall z \in \hat{k}$ に対して $[x, z] = \bar{D}z \in \ell \cap \hat{k}$.

すなわち示したことから $\ell \cap \hat{k} = \{0\}$ であるから $D = 0$ である。

故に $\mathfrak{g}(\hat{k})$ は単純である。

実は、上の定理で $\mathfrak{g}(\hat{k})$ の半単純性を仮定すれば、 $\hat{k}$ が単純であることがわかる。

いま $x, y \in \hat{k}$ に対し $xy^* \in \text{End}(\hat{k})$ を $z \mapsto \langle z, y \rangle x$ によって定義する。明らかに $\text{tr } xy^* = \langle x, y \rangle$ 。

$R(x, y): z \mapsto [zyx]$ と定義するとき、 $\exists t_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ に対しては

$$R(t_1, t_2) \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x_1, y_2)x_3 - x_1 y_2^*(x_3) + 2y_1 x_2^*(x_3) \\ R(y_1, y_2)x_3 + y_1 y_2^*(x_3) \end{pmatrix}$$

$$R(t_1, t_2) \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R(x_1, x_2)y_3 - x_1 x_2^*(y_3) \\ -R(y_1, x_2)y_3 + y_1 x_2^*(y_3) - 2x_1 y_2^*(y_3) \end{pmatrix}$$

従って、

$$\text{tr } R(t_1, t_2) = \text{tr} \{ R(x_1, y_2) - R(y_1, x_2) \} - 3\langle x_1, y_2 \rangle + 3\langle y_1, x_2 \rangle$$

よって、LTS $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 α は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha(t_1, t_2) &:= \frac{1}{2} \text{tr} \{ R(t_1, t_2) + R(t_2, t_1) \} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \{ R(x_1, y_2) - R(y_1, x_2) + R(x_2, y_1) - R(y_2, x_1) \} \\ &\quad - 3\langle x_1, y_2 \rangle + 3\langle y_1, x_2 \rangle \end{aligned}$$

$\dim \hat{k} = n$ とすれば、(S2) より

$$\text{tr} \{ R(x, y) - R(y, x) \} = 2(n+1)\langle y, x \rangle \quad \text{となるので、}$$

$$\alpha(t_1, t_2) = (n+4) \{ \langle y_2, x_1 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle \}.$$

いま, $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ が半単純と仮定すれば, $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の Killing 形式は非退化で, その時 α が非退化になることが知られている。従って, 上の関係式から, $\langle, \rangle$ が非退化になり, 定理 1 より $\mathbb{R}$ は単純であることがわかる。

さて次に, 標数 0 の代数的閉体上の階数が 2 以上の単純リー環がすべてこの方法で得られることを示す。

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環, $\mathfrak{f}$ を 1 つのカルタン部分環とする。 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{f}$ に関する root 系を Δ , 定められた順序に関する最高 root を $\mathfrak{s}$, 正の root 全体の集合を Δ^+ とする。

$\{ H_i, E_\alpha \mid H_i \in \mathfrak{f}, 0 \neq \alpha \in \Delta \}$ を Chevalley の標準基底とし $H := [E_{\mathfrak{s}}, E_{-\mathfrak{s}}]$ とおく。 $\text{ad}(H)$ の固有値 i に属する固有空間を $\mathfrak{g}_i$ とすれば

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \mathfrak{g}_{-\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{g}_{-1} = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{f} + \sum_{\alpha \in \Delta_2} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

$$\mathfrak{g}_1 = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_{\mathfrak{s}}$$

ただし, $\Delta_1 := \{ \alpha \in \Delta^+ \mid \mathfrak{s} - \alpha \in \Delta, \mathfrak{s} \neq \alpha \}, \quad \Delta_2 := \{ \alpha \in \Delta^+ \mid \mathfrak{s} - \alpha \notin \Delta \}$ となる。

$\mathfrak{g}_1$ の任意の要素 X, Y, Z に対して

$$(3) \quad [XYZ] := \frac{1}{2} \left([Z, [Y, [X, E_{-\mathfrak{s}}]] + [Z, [X, [Y, E_{-\mathfrak{s}}]] \right)$$

と定義する。 $[g_i, g_j] \subset g_{i+j}$ だから $[XYZ] \in g_1$. 更に,
 g_1 上の交代双線形形式 $\langle, \rangle$ を

$$[X, Y] = 2\langle X, Y \rangle E_9$$

によって定義する。このとき, g_1 が STS になることを示す。

(S1) が成立することは定義式(3)から明らかである。

$$[X, [Y, E_{-9}]] = 2\langle X, Y \rangle H + [Y, [X, E_{-9}]] \quad \text{であるから}$$

$$(4) \quad [XYZ] = [Z, [Y, [X, E_{-9}]]] - \langle X, Y \rangle Z,$$

$$[E_9, X] = 0 \quad \text{であるから} \quad [E_9, [X, E_{-9}]] = -X. \quad \text{従って}$$

$$\begin{aligned} [XYZ] - [XZY] &= 2\langle Z, Y \rangle [E_9, [X, E_{-9}]] - \langle X, Y \rangle Z + \langle X, Z \rangle Y \\ &= 2\langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z \end{aligned}$$

よって (S2) も成立つ。(S3) は 次のようにも書ける。

$$[L(X, Y), L(U, V)] = L(L(X, Y)U, V) + L(U, L(X, Y)V)$$

従って, (S3) が成立つことを確かめる為には, 次式を示せばよい。

$$[L(X, X), L(Y, Y)] = 2L(L(X, X)Y, Y).$$

(4) を変形することにより

$$L(X, Y) = -\text{ad } Y \cdot \text{ad } X \cdot \text{ad } E_9 - 2XY^* - 2YX^* - \langle X, Y \rangle I$$

(I は恒等写像) と書ける。

$$\begin{aligned} [W, [XYZ]] - [Z, [XZW]] &= 2\langle W, Z \rangle [E_9, [Y, [X, E_{-9}]] - 2\langle X, Y \rangle [W, Z] \\ &= 4\langle W, Z \rangle \langle X, Y \rangle E_9 - 4\langle X, Y \rangle \langle W, Z \rangle E_9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

故に, $\langle W, L(X, Y)Z \rangle = \langle Z, L(X, Y)W \rangle$. 即ち $L(X, Y)^* = -L(X, Y)$.

$$\text{従って, } Y(L(X, X)Y)^* = YY^* \cdot L(X, X)^* = -YY^* \cdot L(X, X) \quad \text{----- ①}$$

いま簡単のために, $\tilde{X} := [X, [X, E_{-3}]]$ とおく. (4)より

$$L(X, X) = -\text{ad}(\tilde{X})|_{\mathfrak{g}_1} \quad \text{であるから,}$$

$$\text{ad}(L(X, X)Y) = [\text{ad}Y, \text{ad}\tilde{X}] \quad \text{----- ②}$$

$$\text{また, } [[X, E_{-3}], E_{-3}] = 0 \quad \text{であるから} \quad [\tilde{X}, E_{-3}] = 0.$$

$$\therefore \text{ad}\tilde{X} \cdot \text{ad}E_{-3} = \text{ad}E_{-3} \cdot \text{ad}\tilde{X} \quad \text{----- ③}$$

① ~ ③ を用いて

$$\begin{aligned} & [L(X, X), L(Y, Y)] - \{L(L(X, X)Y, Y) + L(Y, L(X, X)Y)\} \\ &= [L(X, X), -(adY)^2 \cdot adE_{-3} - 4YY^*] + adY \cdot ad(L(X, X)Y) \cdot adE_{-3} \\ & \quad + ad(L(X, X)Y) \cdot adY \cdot adE_{-3} + 4(L(X, X)Y)Y^* + 4Y(L(X, X)Y)^* \\ &= ad\tilde{X} \cdot (adY)^2 \cdot adE_{-3} - (adY)^2 \cdot adE_{-3} \cdot ad\tilde{X} + adY \cdot [adY, ad\tilde{X}] \cdot adE_{-3} \\ & \quad + [adY, ad\tilde{X}] \cdot adY \cdot adE_{-3} = 0 \end{aligned}$$

よって (S3) も成立ち, $\mathfrak{g}_1$ は STS であることがわかる。

次に, STS $\tilde{\mathfrak{k}} := \mathfrak{g}_1$ の standard enveloping Lie algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ を考える. $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ は $[XYZ] := [[X, Y], Z]$ に閉じて LTS である.

$$\mathfrak{g} : \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \tilde{\mathfrak{k}} \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto X + [E_{-3}, Y]$$

は LTS の同型写像になっている. 証明には,

$$[[E_{-3}, X], [E_{-3}, Y]] = -2\langle X, Y \rangle E_{-3} \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_1)$$

を用いればよい. この $\mathfrak{g}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像 $\hat{\mathfrak{g}}$ に次式によって拡張する.

$$\hat{\mathfrak{g}}(\overline{L(X, Y)}) := -\frac{1}{2}(\text{ad}X \text{ad}Y + \text{ad}Y \text{ad}X)E_{-3}$$

$$\hat{\varphi}(U) := H, \quad \hat{\varphi}(V) := E_{\mathfrak{g}}, \quad \hat{\varphi}(W) := E_{-\mathfrak{g}}.$$

このとき, $\tilde{\varphi}$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ から $\mathfrak{g}$ の中への同型写像になっていることを確かめよう.

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\varphi} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right] &= [X_1 + [E_{-\mathfrak{g}}, Y_1], X_2 + [E_{-\mathfrak{g}}, Y_2]] \\ &= 2\langle X_1, X_2 \rangle E_{\mathfrak{g}} - 2\langle Y_1, Y_2 \rangle E_{-\mathfrak{g}} + [[E_{-\mathfrak{g}}, Y_1], X_2] - [[E_{-\mathfrak{g}}, Y_2], X_1] \end{aligned}$$

$$\text{他方 } \hat{\varphi}(\overline{L(X, Y)}) = -[[E_{-\mathfrak{g}}, Y], X] + \langle X, Y \rangle H \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right] &= \hat{\varphi}(L(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix})) \\ &= -[[E_{-\mathfrak{g}}, Y_2], X_1] + [[E_{-\mathfrak{g}}, Y_1], X_2] + 2\langle X_1, X_2 \rangle E_{\mathfrak{g}} - 2\langle Y_1, Y_2 \rangle E_{-\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

$$\text{故に, } \tilde{\varphi}([t_1, t_2]) = [\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)] \quad (t_i \in \mathfrak{g}) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{このとき, } [\hat{\varphi}(\overline{L(X, Y)}), Z] = [XYZ],$$

$$[\hat{\varphi}(\overline{L(X, Y)}), E_{-\mathfrak{g}}] = [\hat{\varphi}(\overline{L(X, Y)}), E_{\mathfrak{g}}] = 0$$

が成立することを注意しておく.

$$\begin{aligned} &[\hat{\varphi}(\overline{L(X_1, Y_1) + \alpha U + \beta V + \gamma W}), \hat{\varphi} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}] \\ &= [\hat{\varphi}(\overline{L(X_1, Y_1)}), X_2 + [E_{-\mathfrak{g}}, Y_2]] + [\alpha H + \beta E_{\mathfrak{g}} + \gamma E_{-\mathfrak{g}}, X_2 + [E_{-\mathfrak{g}}, Y_2]] \\ &= [X_1 Y_1 X_2] + [E_{-\mathfrak{g}}, [X_1 Y_1 Y_2]] + \alpha(X_2 - [E_{-\mathfrak{g}}, Y_2]) + \beta Y_2 + \gamma [E_{-\mathfrak{g}}, X_2] \end{aligned}$$

$$\text{他方, } [\overline{L(X_1, Y_1) + \alpha U + \beta V + \gamma W}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} [X_1 Y_1 X_2] + \alpha X_2 + \beta Y_2 \\ [X_1 Y_2 Y_2] - \alpha Y_2 + \gamma X_2 \end{pmatrix} \quad \text{であるから,}$$

結局次式が成立つ.

$$\tilde{\varphi}([L(t_1, t_2), t_3]) = [\tilde{\varphi}(L(t_1, t_2)), \hat{\varphi}(t_3)] \quad (t_i \in \mathfrak{g}) \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{また, } \hat{\varphi}(\{t_1 t_2 t_3\}) = [\hat{\varphi}(t_1) \hat{\varphi}(t_2) \hat{\varphi}(t_3)] \quad \text{と } \textcircled{4} \text{ 式から,}$$

$$\hat{\varphi} \circ L(t_1, t_2) t_3 = [[\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)], \hat{\varphi}(t_3)], \quad \hat{\varphi}(L(t_1, t_2)) = [\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)]$$

これを用いて

$$\hat{\mathcal{F}}([L(t_1, t_2), L(t_3, t_4)]) = [\hat{\mathcal{F}}(L(t_1, t_2)), \hat{\mathcal{F}}(L(t_3, t_4))] \quad \dots \quad (6)$$

を得る。④～⑥によって $\hat{\mathcal{F}}$ が準同型写像であることがわかった。次に、 $\hat{\mathcal{F}}$ が単射であることを確かめる。

$\hat{\mathcal{F}}(X + \overline{Y} + \sum \overline{L(X_i, Y_i)} + \alpha U + \beta V + \gamma W) = 0$ とする。 $\hat{\mathcal{F}}(\bar{K}) = \mathfrak{g}_1$, $\hat{\mathcal{F}}(\bar{K}) = \mathfrak{g}_{-1}$, $\hat{\mathcal{F}}(V) \in \mathfrak{g}_2$, $\hat{\mathcal{F}}(W) \in \mathfrak{g}_{-2}$, $\hat{\mathcal{F}}(\sum \overline{L(X_i, Y_i)} + \alpha U) \in \mathfrak{g}_0$ だから $X = Y = 0$, $\beta = \gamma = 0$.

$$0 = [\hat{\mathcal{F}}(\sum \overline{L(X_i, Y_i)} + \alpha U), E_{\mathfrak{g}}] = 2\alpha E_{\mathfrak{g}} \quad \therefore \alpha = 0,$$

$\mathfrak{g}_1 \ni \forall Z$ に対し,

$$0 = [\hat{\mathcal{F}}(\sum \overline{L(X_i, Y_i)}), Z] = \sum [X_i Y_i Z] \quad \therefore \sum L(X_i, Y_i) = 0$$

故に $\ker \hat{\mathcal{F}} = \{0\}$. 以上により、 $\hat{\mathcal{F}}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ から $\mathfrak{g}$ の中への同型写像である。更に、 $\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになっている。実際、 $\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}_0) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (ただし $\hat{\mathfrak{g}}_0$ は $\overline{L(\bar{K}, \bar{K})}$ と U を含む部分空間) であるから、 $\forall i \neq 0$ に対しては

$$[\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}), \mathfrak{g}_i] \subset [\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}), \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}})] \subset \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}) \text{ が成立つ. 従って}$$

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}) \triangleleft \mathfrak{g} \text{ を示すには, } [\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}_0), \mathfrak{g}_0] \subset \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}) \text{ を示せばよい.}$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} + \sum_{\alpha \in \Delta_2} (\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{-\alpha})$ だから、 $\mathfrak{g} \ni \forall H_0$ に対しては

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{F}}(\overline{L(X, Y)}), H_0] &= \frac{1}{2} \text{ad} H_0 (\text{ad} X \text{ad} Y + \text{ad} Y \text{ad} X) E_{-\mathfrak{g}} \\ &= -\hat{\mathcal{F}}(\overline{L([H_0, X], Y)}) - \hat{\mathcal{F}}(\overline{L(X, [H_0, Y])}) + \mathfrak{g}(H_0) \hat{\mathcal{F}}(\overline{L(X, Y)}) \in \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_{\alpha} \ni \forall X_{\alpha}$ ($\alpha \in \Delta_2 \cup (-\Delta_2)$) に対しては $[E_{-\mathfrak{g}}, E_{\alpha}] = 0$ だから

$$[\hat{\mathcal{F}}(\overline{L(X, Y)}), X_{\alpha}] = \hat{\mathcal{F}}(\overline{L([X, X_{\alpha}], Y)}) + \hat{\mathcal{F}}(\overline{L(X, [Y, X_{\alpha}])}) \in \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

よって $[\hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}}_0), \mathfrak{g}_0] \subset \hat{\mathcal{F}}(\hat{\mathfrak{g}})$ が成立つ。

以上によって次の定理が証明された。

定理 5 標数 0 の代数的閉体上の階数 2 以上の単純リー環はすべて STS の standard enveloping Lie algebra として得られる。

また定理 5 の証明から、単純 STS $\tilde{K}$ の standard enveloping Lie algebra $\mathfrak{g}(\tilde{K})$ の拡張された Dynkin 図形において、 $-\beta$ に対応する素とそれに結ばれた素を除いて得られる図形が、リー環 $\mathfrak{der}(\tilde{K})$ の Dynkin 図形であることがわかる。ただし $\mathfrak{g}(\tilde{K})$ が A_n 型の場合には、 $\mathfrak{der}(\tilde{K})$ は 1 次元の中心素をもち、 $\mathfrak{der}(\tilde{K}) = \mathfrak{z} \oplus A_{n-2}$ となる。それ以外の場合には、 $\mathfrak{der}(\tilde{K})$ は半単純である。

$\mathcal{A}$ を体 K 上の composition algebra とし、 $H_3(\mathcal{A})$ で $\mathcal{A}$ に成分をもつ 3 次エルミート行列全体を表わす。 $H_3(\mathcal{A})$ は $X \cdot Y := \frac{1}{2}(XY + YX)$ に関してジョルダン代数になる。

$$(X, Y) := \text{tr}(X \cdot Y)$$

$$X \times Y := X \cdot Y - \frac{1}{2} \{ \text{tr}(X)Y + \text{tr}(Y)X - \text{tr}(X)\text{tr}(Y)I + (X, Y)I \}$$

と定義する。

$$\tilde{K} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & X \\ Y & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K, X, Y \in H_3(\mathcal{A}) \right\}$$

$\widehat{\mathcal{K}}$ に三項積を次のように定義する。

$$x_i := \begin{pmatrix} \alpha_i & X_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{pmatrix} \quad [x_1, x_2, x_3] := \begin{pmatrix} \alpha & X \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \alpha := & -(\gamma_1 \times \gamma_2, \gamma_3) + \frac{1}{2} \alpha_1 (X_2, \gamma_3) + \frac{1}{2} \alpha_2 (X_1, \gamma_3) + \frac{1}{4} \alpha_3 \{ (X_2, \gamma_1) + (X_1, \gamma_2) \} \\ & - \frac{3}{4} \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 - \frac{3}{4} \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X := & \sum_{\text{cyclic}} \{ 2(X_i \times X_j) \times \gamma_k - \beta_i \gamma_j \times \gamma_k \} - \frac{1}{2} \{ (X_3, \gamma_2) - \alpha_2 \beta_3 \} X_1 \\ & - \frac{1}{2} \{ (X_3, \gamma_1) - \alpha_1 \beta_3 \} X_2 - \frac{1}{4} \{ (X_1, \gamma_2) + (X_2, \gamma_1) - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 \} X_3 \end{aligned}$$

$\beta := (\alpha \text{ で } X_i \text{ と } \gamma_i, \alpha_i \text{ と } \beta_i \text{ とそれぞれ交換し符号を変えたもの})$

$\gamma := (X \text{ で } \alpha \text{ と同じ操作を行ったもの})$

このとき, $\widehat{\mathcal{K}}$ は STS になる。(本講究録の山口先生の項参照, 3頁と14頁)。従って, この standard enveloping Lie algebra が考えられる。又ここで, $\mathcal{K}$ 自身, $\mathcal{K}$ の2次拡大, 一般四元数体, 一般ケリー環をとることにより, それぞれ F_4, E_6, E_7, E_8 型のリー環が得られる。