

2 次関数と双線形関数の特徴づける 函数方程式

岡山理科大学 春木 茂 (Shigeru Haruki)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Okayama University of Science, JAPAN.

神戸大学工学部 中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, JAPAN.

1 はじめに

容易に確かめられる様に, 2 変数の 2 次関数 $f(x, y) = a(x^2 + y^2)$, $a \in \mathbf{R}$ は, 全ての実変数 $x, y, t, s \in \mathbf{R}$ に対し次の関係式を満たしている:

$$f(x+t, y+t) + f(x-t, y-t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (1.1)$$

$$f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (1.2)$$

$$f(x+t, y+s) + f(x-t, y-s) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (1.3)$$

$$f(x+t, y-s) + f(x-t, y+s) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (1.4)$$

$$f(x+s, y-t) + f(x-s, y+t) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (1.5)$$

(1.1) と (1.2) は 3 つの自由変数 x, y, t を方程式に含み, (1.3)-(1.5) は 4 つの自由変数 x, y, t, s を方程式に含んでおり, (1.3) で $s=t$ とおくと (1.1) になり, (1.4), (1.5) で $s=t$ とおくと (1.2) になるが, (1.4) で s と t を入れ替えても (1.5) にはならない事を注意しておく. 関係式 (1.1)-(1.5) をアーベル群上の 2 変数関数 f についての函数方程式と考えるとき, 次の未解決問題を提示する事ができる.

問題 (P-1) $(G, +)$ と $(H, +)$ を共に 2 で割れるアーベル群とする. $f: G \times G \rightarrow H$ が函数方程式 (1.1)-(1.5) のいずれかを満たせば, $f: G \times G \rightarrow H$ はアーベル群 G 上の一般化された 2 次関数で与えられるか?

この論文の最初の目的は, この未解決問題 (P-1) を肯定的に解くことである. つまり, 各函数方程式 (1.1)-(1.5) の解のクラスは一致し, その一般解はアーベル群 G 上の一般化された 2 次関数 (定義は 2 節で与える) で与えられる.

しかし, 方程式 (1.1) において $y=x$ と置いて自由変数を 1 つ減らした函数方程式

$$f(x+t, x+t) + f(x-t, x-t) = 4f(x, t) \quad (1.6)$$

を考えると、一般化された2次関数 $f: G \times G \rightarrow H$ は (1.6) を満たしているが、それ以外の解が存在する。その反例を $G = H = \mathbf{R}$ の場合に示す。

次に積関数 (x と y について双線形関数) $f(x, y) = axy$, $a \in \mathbf{R}$ を考える。簡単な計算により, $f(x, y) = axy$ は, 全ての実数 $x, y, t, s \in \mathbf{R}$ に対し次の関係式を満たしている事がわかる:

$$f(x+t, x+t) - f(x-t, x-t) = 4f(x, t). \quad (1.7)$$

$$f(x+t, x+t) = f(x, x) + 2f(x, t) + f(t, t). \quad (1.8)$$

$$f(x+t, y+t) - f(x-t, y-t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (1.9)$$

$$f(x+t, y+s) - f(x-t, y-s) = 2f(x, s) + 2f(y, t). \quad (1.10)$$

$$f(x+t, y+s) - f(x-t, y-s) = 2f(x, s) + 2f(t, y). \quad (1.11)$$

$$f(x+t, y+t) = f(x, y) + f(x, t) + f(y, t) + f(t, t). \quad (1.12)$$

$$f(x+t, y+s) = f(x, y) + f(x, s) + f(y, t) + f(t, s). \quad (1.13)$$

(1.7) と (1.8) は2つの自由変数 x, t を方程式に含み, (1.9) と (1.12) は3つの自由変数 x, y, t を方程式に含んでおり, さらに (1.10), (1.11), (1.13) は4つの自由変数 x, y, t, s を方程式に含んでいる。(1.10) と (1.13) で $s = t$ とおくと, それぞれ (1.9) と (1.12) となり, (1.9) と (1.12) で $y = x$ とおくと, それぞれ (1.7) と (1.8) となる。また (1.10) と (1.11) とは, 最後の項の変数が入れ替わっている異なるタイプの方程式である。

アーベル群上の2変数関数 $f(x, y)$ については, 群構造から x, y についての双線形性は双加法性 (定義は2節で与える) と言い換えるのが自然である。(1.7)-(1.13) をアーベル群上の関数方程式と考えると, 先と同様に次の未解決問題を提示する事ができる。

問題 (P-2) $(G, +)$ と $(H, +)$ を共に2で割れるアーベル群とする。 $f: G \times G \rightarrow H$ が関数方程式 (1.7)-(1.13) のいずれかを満たせば, $f: G \times G \rightarrow H$ は一般化されたアーベル群 G 上の対称な双加法的関数で与えられるか?

本論文の次の目的は, 問題 (P-2) を解く事である。答は部分否定的である。即ち次の結果が証明される。

1. (1.9) と (1.10) 及び (1.12) と (1.13) の解は, 対称な双加法的関数となる。
2. (1.7) と (1.8) の解は, 対称な双加法的関数とは限らない。
3. 微妙だが, (1.11) の解は, 必ずしも対称ではない双加法的関数で与えられる。
4. さらに, $f(x, -y) = -f(x, y)$ という条件が加われば, (1.8) の解は対称な双加法的関数となる。

以上の結果を2節と3節で説明する。4節では, 反例を与えるための補足として, $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ のもとで, 2自由変数を持つ関数方程式

$$f(x + \alpha y, x + \alpha y) + \beta f(x - y, x - y) = \gamma f(x, y) + \delta_1 f(x, x) + \delta_2 f(y, y) \quad (1.14)$$

の一般解を与える. ここで, α と γ は正の定数, $\beta, \delta_1, \delta_2$ は実定数とする. 最後に, 一般のアーベル群上での次の函数方程式

$$\begin{aligned} f(x+t, y-t) - f(x-t, y+t) &= 2f(x, t) + 2f(y, t), \\ f(x+t, y-s) - f(x-t, y+s) &= 2f(x, s) + 2f(y, t), \\ f(x+t, y-s) - f(x-t, y+s) &= 2f(x, s) + 2f(t, y) \end{aligned}$$

は, 現時点では未解決である事を注意しておく.

2 一般化された2次関数の特徴づけ

まず, 2つの函数方程式の同値性の定義を与えよう.

Definition 2.1 2つの函数方程式 $(F1)$ と $(F2)$ が同値であるとは, $(F1)$ の任意の解が方程式 $(F2)$ を満たし, 逆に $(F2)$ の任意の解も方程式 $(F1)$ を満たす時をいう. 言い換えると, $(F1)$ と $(F2)$ の解のクラスが一致するとき, 方程式 $(F1)$ と $(F2)$ は同値と呼ぶ.

次に, 対称性と双加法性の定義を与える. 以下 $(G, +)$ と $(H, +)$ を共に2で割れるアーベル群とする.

Definition 2.2 (1) 関数 $A : G \times G \rightarrow H$ が対称かつ双加法的であるとは, 全ての $x, y, z \in G$ に対し

$$A(x, y) = A(y, x), \quad A(x, y+z) = A(y, x) + A(x, z)$$

が成り立つときを言う.

(2) 関数 $B : G \times G \rightarrow H$ が双加法的であるとは, 全ての $x, y, z \in G$ に対し

$$B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z), \quad B(x, y+z) = B(y, x) + B(x, z)$$

が成り立つときを言う.

$A : G \times G \rightarrow H$ を対称かつ双加法的とする. このとき, 関数 $\alpha^2(x) \equiv A(x, x)$ を, 対称な双加法的関数 A の対角化と呼び, $\alpha^2 : G \rightarrow H$ の事を一般化された2次関数と呼ぶ.

Theorem 2.1 仮定 $f : G \times G \rightarrow H$ のもとで, 次の函数方程式 (2.1)-(2.5) は互いに同値である:

$$f(x+t, y+s) + f(x-t, y-s) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (2.1)$$

$$f(x+t, y-s) + f(x-t, y+s) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (2.2)$$

$$f(x+s, y-t) + f(x-s, y+t) = 2f(x, t) + 2f(y, s). \quad (2.3)$$

$$f(x+t, y+t) + f(x-t, y-t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (2.4)$$

$$f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (2.5)$$

ここで, $x, y, t, s \in G$ は, 任意の自由変数とする. さらに, (2.1)-(2.5) のいずれかを満たす関数 $f: G \times G \rightarrow H$ は, ある対称な双加法的関数の対角化 $\alpha^2: G \rightarrow H$ を用いて

$$f(x, y) = \alpha^2(x) + \alpha^2(y) \quad (2.6)$$

で与えられる.

Theorem 2.1 の証明には, 次の2つの Lemma を用いる.

Lemma 2.1 f が (2.4) もしくは (2.5) を満たすとする. このとき, f は全ての $x, y \in G$ について次の関係式を満たす:

$$f(x, y) = f(x, 0) + f(y, 0). \quad (2.7)$$

$$f(x, y) = f(y, x) = f(x, -y) = f(-x, y) = f(-x, -y). \quad (2.8)$$

$$f(x + y, x - y) = 2f(x, y). \quad (2.9)$$

(証明) (2.4) において, $t = 0$ とおき両辺を2で割ると (2.7) が従う. (2.8) と (2.9) も同様な代数的な演算を繰り返して行なう事により証明できる.

Lemma 2.2 関数 $g: G \rightarrow H$ が, 全ての $x, y \in G$ に対して方程式

$$g(x + t) + g(x - t) = 2g(x) + 2g(t) \quad (2.10)$$

を満たせば, ある対称な双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow H$ の対角化 $\alpha^2: G \rightarrow H$ が存在して

$$g(x) = \alpha^2(x) \equiv A(x, x) \quad (2.11)$$

とかける.

(Theorem 2.1 の証明の概略) f を (2.4) または (2.5) の解とする. $g: G \rightarrow H$ を, $g(x) = f(x, 0)$ により定義する. この時, Lemma 2.1 より $f(x, y) = g(x) + g(y)$ とかけて (2.4) と (2.5) に代入すると, 同じ方程式

$$g(x + t) + g(x - t) + g(y + t) + g(y - t) = 2g(x) + 2g(y) + 4g(t)$$

が得られ, ここで $y = x$ とおけば (2.10) が導かれる. よって Lemma 2.2 を用いて, 結論 $f(x, y) = g(x) + g(y) = \alpha^2(x) + \alpha^2(y)$ が従う.

Remark 2.1 Theorem 2.1 より, 方程式 (2.1)-(2.5) の任意の解 f は次の全ての波動型関数方程式を満たす:

$$f(x + t, y + s) + f(x - t, y - s) = f(x + s, y - t) + f(x - s, y + t). \quad (W1)$$

$$f(x + t, y + s) + f(x - t, y - s) = f(x + t, y - s) + f(x - t, y + s). \quad (W2)$$

$$f(x + t, y + t) + f(x - t, y - t) = f(x + t, y - t) + f(x - t, y + t). \quad (W3)$$

しかしながら, S. Haruki [4,5] により証明されたように, 方程式 (W1)-(W3) は全て方程式 (2.1)-(2.5) と同値ではなく, さらに (W1), (W2) および (W3) も互いに同値ではない (波動型方程式と関連する Cauchy-Riemann 型関数方程式については, Haruki and Nakagiri [8] を参照).

2 自由変数を持つ函数方程式

$$f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 4f(x, y) \quad (2.12)$$

は, (2.4) において $y = x$ さらに $t = y$ とおくと得られる. $f(x, y) = \alpha^2(x) + \alpha^2(y)$ は勿論解の 1 つであるが, それ以外の解が存在する.

$G = H = \mathbf{R}$ の場合は, 4 節の結果により方程式 (2.12) は完全に解けている. 実際 (2.12) の解は多様な形態を持つ. この場合の函数方程式 (2.12) の一般解は,

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(F(x+y) + F(x-y)) \quad (2.13)$$

で与えられる. ここで,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 p_+ \left(\frac{\log x}{\log 2} \right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^2 p_- \left(\frac{\log(-x)}{\log 2} \right) & (x < 0), \end{cases} \quad (2.14)$$

と書けて, $p_+, p_- : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は任意の周期 1 の関数である. この場合, $f(x, y)$ は一般には対称でない事を注意する. 特に次のような 1 つの (2.12) の解を与えることができる.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left((x+y)^2 \sin \frac{2\pi \log |x+y|}{\log 2} + (x-y)^2 \sin \frac{2\pi \log |x-y|}{\log 2} \right) & (x+y \neq 0, x-y \neq 0) \\ \frac{1}{4} \left(x^2 \sin \frac{2\pi \log 2|x|}{\log 2} \right) & (x = -y, x \neq 0 \text{ 又は } x = y, x \neq 0) \\ 0 & (x = y = 0). \end{cases} \quad (2.15)$$

さらに極限

$$a := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, x)}{x^2} \quad (2.16)$$

が存在すれば, (2.12) の解 $f(x, y)$ は 2 次関数

$$f(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.17)$$

で与えられる.

3 対称な双加法的関数の特徴づけ

対称な双加法的関数は, 1 節で述べた様な函数方程式により特徴づけられる.

Theorem 3.1 仮定 $f : G \times G \rightarrow H$ のもとで, 次の函数方程式 (3.1)-(3.4) は, 互いに同値である:

$$f(x+t, y+t) - f(x-t, y-t) = 2f(x, t) + 2f(y, t). \quad (3.1)$$

$$f(x+t, y+s) - f(x-t, y-s) = 2f(x, s) + 2f(y, t). \quad (3.2)$$

$$f(x+t, y+t) = f(x, y) + f(x, t) + f(y, t) + f(t, t). \quad (3.3)$$

$$f(x+t, y+s) = f(x, y) + f(x, s) + f(y, t) + f(t, s). \quad (3.4)$$

ここで, $x, y, t, s \in G$ は, 任意の自由変数とする. さらに, (3.1)-(3.4) のいずれかを満たす関数 $f: G \times G \rightarrow H$ は, ある対称な双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow H$ を用いて

$$f(x, y) = A(x, y) \quad (3.5)$$

で与えられる.

(3.5) で与えられる f は全ての方程式 (3.1)-(3.4) を満たす. また (3.2) の解 f は (3.1) を満たし, (3.4) の解 f は (3.3) を満たす. よって Theorem 3.1 の証明において, (3.1) の任意の解が (3.5) で与えられ, 同時に (3.3) の任意の解も (3.5) で与えられることを示せばよい. 後半の (3.3) の任意の解が (3.5) で与えられる事は, Theorem 2.1 と類似の手法により証明できる. 従って, (3.1) の任意の解が (3.5) で与えられる事を示せばよい. そのため, 次の3つの Lemma を用いる.

Lemma 3.1 f が (3.1) を満たしているとする. 関数 $g: G \rightarrow H$ を, $g(x) = f(x, x)$ により定義する. この時, g は全ての $x, t \in G$ について次の関係式を満たす:

$$2g(x+2t) - 4g(x+t) + 4g(x-t) - 3g(x-2t) = 0. \quad (3.6)$$

(証明) (3.1) で $x = y$ とおくと,

$$4f(x, t) = f(x+t, x+t) - f(x-t, x-t) = g(x+t) - g(x-t). \quad (3.7)$$

$f(0, 0) = g(0) = 0$ は明らかである. (3.1) を4倍して (3.7) を代入すると

$$g(x+y+2t) + 2g(x-t) + 2g(y-t) = g(x+y-2t) + 2g(x+t) + 2g(y+t) \quad (3.8)$$

が得られる. 一方 (3.8) で $y = t$ を代入して $g(0) = 0$ を用いると

$$g(x+3t) - 2g(x+t) + g(x-t) = 2g(2t). \quad (3.9)$$

(3.9) で x を $x-t$ に置き換え, その式と (3.8) との差をとると

$$g(x+3t) - g(x+2t) - 2g(x+t) + 2g(x) + g(x-t) - 2g(x-2t) = 0. \quad (3.10)$$

さらに (3.8) で $y = 0$ を代入すると

$$g(x+2t) - 2g(x+t) + 2g(x-t) - g(x-2t) = 2g(t) - 2g(-t). \quad (3.11)$$

(3.11) で x を $x+t$ で置き換えた式と (3.11) との差をとると

$$g(x+3t) - 3g(x+2t) + 2g(x+t) + 2g(x) - 3g(x-t) + g(x-2t) = 0. \quad (3.12)$$

(3.10) から (3.11) を引くと (3.6) が得られる.

Lemma 3.2 (S. Haruki [6]) $g: G \rightarrow H$ が全ての $x, t \in G$ について関係式 (3.6) を満たすとき, g は全ての $x, t \in G$ について

$$\Delta_t^3 g(x) \equiv g(x+3t) - 3g(x+2t) + 3g(x+t) - g(x) = 0 \quad (3.13)$$

を満たす. ここで, Δ_t は前進差分作用素 $\Delta_t g(x) = g(x+t) - g(x)$ である.

Lemma 3.3 (S. Mazur and W. Orlicz [9]) 3 階の差分方程式

$$\Delta_t^3 g(x) = 0 \quad (3.14)$$

の解 $g: G \rightarrow H$ は, 一般化された 2 次多項式

$$g(x) = \alpha^0 + \alpha^1(x) + \alpha^2(x) \quad (3.15)$$

により与えられる. ここで, α^0 は定数, $\alpha^1: G \rightarrow H$ は加法的関数, $\alpha^2: G \rightarrow H$ は, 対称な双加法的関数の対角化である.

(Theorem 3.1 の証明の概略) f を (3.1) の解とする. Lemma 3.1 により $g(x) = f(x, x)$ は, (3.6) を満たす. さらに Lemma 3.2 と Lemma 3.3 を用いて g は求められる. これを (3.1) に代入して $\alpha = 0$, $\alpha^1(x) = 0$ がわかり, $g(x) = \alpha^2(x) = A(x, x)$ となる. これを再び (3.7) に代入し 4 で割れば, $f(x, y) = A(x, y)$ なる事が示される.

函数方程式

$$f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 4f(x, y) \quad (3.16)$$

は, (3.1) において $y = x$ さらに $t = y$ とおくと得られる. 対称な双加法的関数 $f(x, y) = A(x, y)$ は勿論解の 1 つであるが, それ以外の解が存在する. $G = H = \mathbf{R}$ の場合は, 方程式 (3.16) は完全に解ける. つまり, (3.16) の一般解は

$$F(x) = \begin{cases} x^2 p_+ \left(\frac{\log x}{\log 2} \right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^2 p_- \left(\frac{\log(-x)}{\log 2} \right) & (x < 0) \end{cases} \quad (3.17)$$

として,

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(F(x+y) - F(x-y)) \quad (3.18)$$

で与えられる. ここで, $p_+, p_-: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は任意の周期 1 の関数である.

次の函数方程式

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) \quad (3.19)$$

は, (3.3) において $y = x$ さらに $t = y$ とおくと得られる. $G = H = \mathbf{R}$ の場合の (3.19) の一般解は, $F(x)$ を (3.17) で与えた函数として

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(F(x+y) - F(x) - F(y)) \quad (3.20)$$

で与えられる.

紙数の関係で証明は省略するが, 次の2つの定理が成立する. それらの証明において, 与えられた方程式を春木の函数方程式 (cf.[1]) に持ち込む巧妙な計算がある. 詳しくは, Haruki [7] を参照されたい.

Theorem 3.2 函数 $f: G \times G \rightarrow H$ が, 全ての $x, y \in G$ に対し2つの方程式

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y), \quad (3.21)$$

$$f(x, -y) = -f(x, y) \quad (3.22)$$

を同時に満たすための必要かつ十分条件は, ある対称な双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow H$ が存在して $f(x, y) = A(x, y)$ で与えられる事である.

Theorem 3.3 仮定 $f: G \times G \rightarrow H$ のもとで, 函数方程式

$$f(x+t, y+s) - f(x-t, y-s) = 2f(x, s) + 2f(t, y) \quad (3.23)$$

を考える. ここで, $x, y, t, s \in G$ は任意の自由変数とする. この時, (3.23) の任意の解 $f: G \times G \rightarrow H$ は, ある双加法的関数 $B: G \times G \rightarrow H$ を用いて $f(x, y) = B(x, y)$ で与えられる. また逆も言える.

従って Theorem 3.3 より, 必ずしも対称でない双加法的関数を特徴づける1つの函数方程式として (3.23) を挙げる事ができる.

4 補足

Aczél and Kuczma [2,3] による, Folk Theorem を用いる事により次の定理を証明する事ができる.

Theorem 4.1 α と γ を正の定数とし, $\beta, \delta_1, \delta_2$ 実定数とする. $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ のもとで, 次の函数方程式

$$f(x+\alpha y, x+\alpha y) + \beta f(x-y, x-y) = \gamma f(x, y) + \delta_1 f(x, x) + \delta_2 f(y, y) \quad (4.1)$$

を考える. ここで, $x, y \in \mathbf{R}$ は任意変数とする. もし $1+\beta \neq \gamma + \delta_1 + \delta_2$ および $\gamma + \delta_1 + \delta_2 > 0, \neq 1$ ならば, (4.1) の一般解は

$$f(x, y) = \frac{1}{\gamma} (F(x+\alpha y) + \beta F(x-y) - \delta_1 F(x) - \delta_2 F(y)) \quad (4.2)$$

で与えられる. ここで,

$$F(x) = \begin{cases} x^m p_+ \left(\frac{\log x}{\log(1+\alpha)} \right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ (-x)^m p_- \left(\frac{\log(-x)}{\log(1+\alpha)} \right) & (x < 0) \end{cases} \quad (4.3)$$

と書けて, $m = \frac{\log(\gamma+\delta_1+\delta_2)}{\log(1+\alpha)}$ であり, $p_+, p_- : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は任意の周期 1 の関数である. さらに極限

$$a_+ := \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x, x)}{x^m}, \quad a_- := \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x, x)}{(-x)^m} \quad (4.4)$$

が存在すれば, (4.1) の解 $f(x, y)$ は

$$F(x) = \begin{cases} a_+ x^m & (x \geq 0) \\ a_- (-x)^m & (x < 0) \end{cases} \quad (4.5)$$

として, 式 (4.2) で与えられる.

上定理は多くの応用例を持つが, ここでは次の 1 例を与える. $\mathbf{R}$ 上の函数方程式

$$f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 4f(x, y) + 6f(x, x) + 6f(y, y) \quad (4.6)$$

を考える. 極限

$$a := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, x)}{x^4}$$

が存在すれば, (4.6) の解 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = -a(x^4 - 3x^2y^2 + y^4) \quad (4.7)$$

で与えられる. (4.7) 以外の方程式 (4.2) の非自明解も (4.2), (4.3) により構成する事ができる.

参考文献

- [1] J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič, *General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials*, Aequationes Math. 1(1968), 37-53.
- [2] J. Aczél and Marek Kuczma, *Generalizations of a "Folk-Theorem" on simple functional equations in a single variable*, Results in Mathematics, 19(1991), 5-21.
- [3] J. Aczél and Marek Kuczma, *Solutions of a functional equation convex of higher order*, International Series of Numerical Mathematics, 109(1992), 209-213.
- [4] S. Haruki, *On the general solution of a nonsymmetric partial difference functional equation analogous to the wave equation*, Aequationes Math. 36(1988), 20-31.
- [5] S. Haruki, *A wavelike functional equation of Pexider type*, Aequationes Math. 63(2002), 201-209.
- [6] S. Haruki, *On the theorem of S. Kakutani-M. Nagumo and J. L. Walsh for the mean value property of harmonic and complex polynomials*, Pacific J. Math. 94(1981), 113-123.
- [7] S. Haruki, *Functional equations characterized by a symmetric biadditive function and related equations*, preprint.
- [8] S. Haruki and S. Nakagiri, *Partial difference functional equations arising from the Cauchy-Riemann equations*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica V 39(2006), 59-76.
- [9] S. Mazur and W. Orlicz, *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Mathematica 5(1934), 50-68.