

平面クエット流の不安定周期解

京都大工 河原 源太 (Genta Kawahara)

核融合研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

Reynolds (1883) による記念すべき実験によって流れの乱流への遷移が明らかにされて以来、乱流の解明と制御に向けて多大な努力がなされてきた。しかし、大自由度強非線形系の時空間構造を簡潔に特徴づけることは困難であり、したがって乱流の構造や動力学についての十分な理解は依然として得られていない。実際、発達した乱流は時空間におけるその複雑でカオス的な振舞いによって特徴づけられるが、他方で乱流中に存在する際立った秩序が実験および数値シミュレーションにより観測されている (Cantwell 1981; Robinson 1991)。少なくとも定性的には、秩序構造が物質、運動量、エネルギーの輸送 (Kim *et al.* 1971) や乱流活動の維持 (Panton 1997)、そして乱流の間欠性 (She, Jackson & Orszag 1990) の発現などに重要な役割を果たすことは広く知られている。秩序構造は乱流それ自身よりも単純な振舞いを示すので、乱流における秩序構造の存在が乱流を理解する上での大きな助けになるものと期待される。

有界領域における粘性流体の乱流運動では、粘性により小スケールの運動がならされて弱められるため、運動の活発なモード数は常に有限に保たれる (Constantin *et al.* 1985 参照)。したがって、乱流を有限自由度の力学系とみなすことができよう。力学系理論の言葉でいえば、乱流中の秩序構造は低次元多様体と解釈され、力学系は秩序構造に対応する多様体の近くで長時間を費やすものと考えられる (Jiménez 1987)。一方、低自由度カオス力学系では、カオスアトラクターに埋め込まれた無数の周期軌道が存在することがよく知られている (Eckmann & Ruelle 1985) が、最近、この無数の周期軌道によってアトラクターの構造や動力学をうまく特徴づけられることが示されている (Auerbach *et al.* 1987; Christiansen, Cvitanović & Putkaradze 1997)。以上のことから、位相空間でのでき得る最も簡潔な乱流の時空間秩序の記述は、乱流アトラクターに埋め込まれた周期サドル軌道によって与えられるものと考えられる。しかしながら、乱流に代表される大自由度力学系において不安定周期軌道を求めることは、低自由度カオス力学系に比べてきわめて困難であるといわざるを得ない。

Jiménez & Moin (1991) は、平面ポアズイユ乱流の直接数値シミュレーションにおいて、流れ方向とスパン方向の周期箱寸法を乱流が持続する限界にまで最小化し、乱流活動を保持しつつ流れの自由度を低減した。Hamilton, Kim & Waleffe (1995) は、これと同一の数値的手法を用い、かつレイノルズ数を下げることによって、平面クエット乱流の自由度をさらに低減した。彼らは、この強く拘束された平面クエット乱流において、定性的にはあるが、縦渦やストリークといった秩序構造の生成・消滅からなる回帰的な動力学過程を観測した。一般的に壁

面乱流では、秩序構造を維持させる再生サイクルが存在することが知られている (Panton 1997; Jiménez & Pinelli 1999). Waleffe (1997) は、この再生サイクルのうちの3つの過程 (ストリークの形成, ストリークの不安定, および流れ方向渦の再生) を個別に線形理論あるいは非線形理論により記述した. 彼はまた, 3つの過程間の相互作用を説明するために低次元のモデルを提案している. だが, 完全なナビエ・ストークス方程式に基づく再生サイクルの全過程に対する理論的記述は未だに確立されていない.

本論文では、非圧縮ナビエ・ストークス方程式の2つの新しい不安定周期解を示す (この論文は、Kawahara & Kida 2001 に第5章の内容を加筆したものである). これらの解は拘束された平面クエット乱流をうまく特徴づける. 第2章では、直接数値シミュレーションの方法とパラメータ設定について述べる. 第3章では、強い揺らぎを伴う周期解を反復法によって求める. この解は、クエット乱流のカオス的な軌道中に埋め込まれており、全再生サイクルや平均速度分布を含む乱流の主要特性をうまく再現することを示す. 第4章では、弱い揺らぎの周期解を求め、この解と強い解とのヘテロクリニック接続、および接続とバースト現象との関連性について議論する. 第5章では、レイノルズ数を変化させながら強い揺らぎの周期解を追跡した結果を示す. 最後に、第6章で本研究で得られた結果をまとめる.

2. 数値クエット乱流

もし乱流アトラクターに埋め込まれた不安定周期軌道が存在するものとすれば、上述した低自由度の拘束された乱流に対しては比較的容易に周期解が求められるものと期待される. そこで、Hamilton, Kim & Waleffe (1995) と同一の拘束された平面クエット乱流の直接数値シミュレーションを行った. シミュレーションでは、非圧縮ナビエ・ストークス方程式をスペクトル法により数値的に解いた. 数値計算の方法は本質的には Kim, Moin & Moser (1987) のそれと同様であり、流量をゼロに設定した. 流れ (x) 方向とスパン (z) 方向にはフーリエ展開を用い、壁垂直 (y) 方向にはチェビシェフ多項式展開を用いた. 数値計算は 8,448 点 (x, y, z 方向に $16 \times 33 \times 16$) の格子点上で行い、レイノルズ数 $Re = Uh/\nu$ を 400 に設定した. ここに、 U は 2 平板の速度差の半分であり、 h は 2 平板間の距離の半分を表す. ν は流体の動粘性係数である. この格子分解能での数値精度を分解能を 2 倍にすることによって確認した. 平均摩擦速度 u_τ と h に基づくレイノルズ数は $Re_\tau = 34.1$ である. 流れ方向とスパン方向の周期箱寸法は、それぞれ $L_x = 5.513h (= 188\nu/u_\tau)$, $L_z = 3.770h (= 128\nu/u_\tau)$ に設定した. エネルギーは、運動する 2 平板壁面上の摩擦力を通じて系に注入され、全流れ場にわたって小規模運動によって粘性散逸により消費される. エネルギーの単位時間あたりの注入率 $I \equiv \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (\partial u / \partial y|_{y=-h} + \partial u / \partial y|_{y=+h}) dx dz / (2L_x L_z U / h)$ と散逸率 $D \equiv \int_0^{L_x} \int_{-h}^{+h} \int_0^{L_z} |\omega|^2 dx dy dz / (L_x L_z U^2 / h)$ は、複雑に時間変動するが、乱流が統計的に定常であるため、それらの時間平均は一定に保たれる. ここに、 u は流れ方向速度、 ω は渦度ベクトルを表す. この注入率と散逸率の時間平均は、対応する層流状態の値に比べてかなり大きい (図 1 参照).

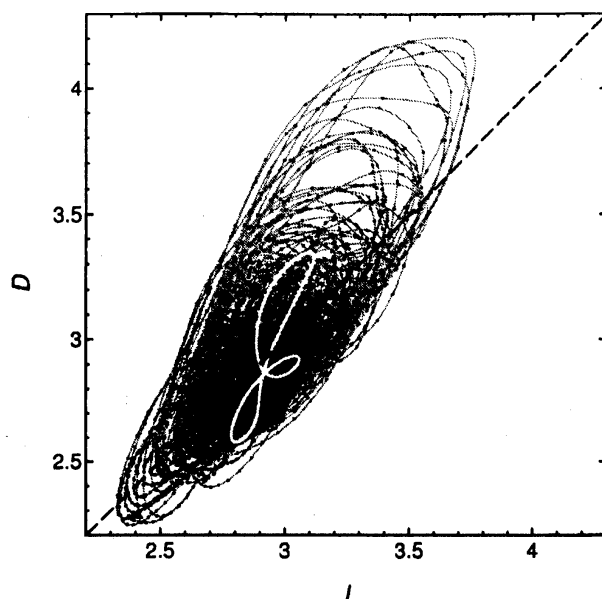


図1. 乱流軌道および周期軌道の2次元部分空間への射影. 横軸と縦軸は, 層流状態の対応する値で規格化された総エネルギー注入率 I と散逸率 D をそれぞれ表す. 細い灰色の線は乱流軌道で, 軌道上には $2h/U$ の時間間隔で黒点が付してある. 閉じた太い灰色の線は周期軌道を表す. 破線上ではエネルギー注入率と散逸率が等しい.

ここでの数値計算における従属変数は, 流れ方向とスパン方向の(平板に平行な面での)平均速度に対するそれぞれ31個のチェビシェフ係数, 壁垂直方向速度に対する7,424 ($= 16 \times 29 \times 16$)個のフーリエ・チェビシェフ・フーリエ係数, そして壁垂直方向渦度に対する7,936 ($= 16 \times 31 \times 16$)個のフーリエ・チェビシェフ・フーリエ係数である. したがって, ここで考える力学系の自由度の数 N は15,422となる. 流れ場の瞬時の状態および時間発展は, 従属変数によって張られる N 次元位相空間における点およびその軌跡としてそれぞれ表される. 図1の細い灰色の曲線は, 時間 $10,000h/U$ にわたる乱流軌道の2次元部分空間への射影である. 部分空間は総エネルギー注入率 I と散逸率 D によって張られており, I および D は対応する層流状態の値によって規格化されている. 軌道上には $2h/U$ の時間間隔で黒点が付されている. 軌道は一般に時計回りに回転する傾向にある. 破線上ではエネルギー注入と散逸とが等しい. もし系がこの線より上(あるいは下)に位置すると, 総運動エネルギーは減少(あるいは増加)する. 軌道の変動は有限領域に限定されているが, 周期的とはほど遠い. むしろ, 総運動エネルギーの周波数スペクトルは連続的であり(図省略), このことから系の振舞いはカオス的であるといえる.

3. 乱流に埋め込まれた周期運動

単純な力学系 (Auerbach *et al.* 1987; Christiansen, Cvitanović & Putkaradze 1997) では奇妙なアトラクターに埋め込まれた周期軌道の存在が報告されていること, および, ここで考えている系では秩序構造の回帰的な生成・消滅が観測されて

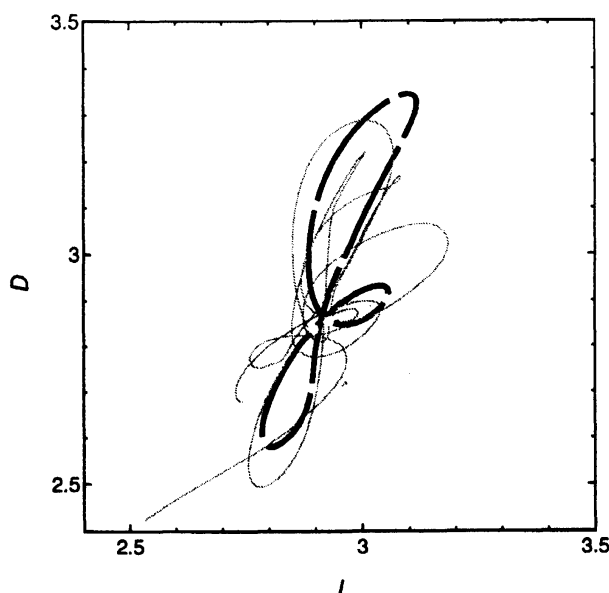


図2. 2次元射影面における乱流軌道の周期軌道への接近例. 細い灰色の線は図1の乱流軌道の一部を切り出したもので, 閉じた太い黒色の線は周期軌道を表す. 周期軌道上の灰色の丸は図3の9つパネルaからiの位相を示す.

いる (Hamilton, Kim & Waleffe 1995) ことを考慮し, われわれは, 拘束された平面クエット乱流に隠された周期軌道を探索することにした. 本研究では, N 次元位相空間における面 (ポアンカレ断面) $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y,0,0,1}) = -0.1875U/h$ を連続して通過する2点間のユークリッド的距離を, 標準的な方向集合アルゴリズムを用いた反復法により最小化することで周期軌道を求めた. ここに, $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y,0,0,1})$ は, 流れ方向波数がゼロ, チェビシェフ多項式の次数がゼロ, スパン方向波数が $2\pi/L_z$ に対応する壁垂直方向渦度のフーリエ・チェビシェフ・フーリエ係数の虚数部を表す. 反復計算の初期値としては, 位相空間で乱流軌道がおおよそ周期的に運動する状態を選んだ.

反復計算は, 位相空間において, 上述の連続した通過点間の距離の, 通過点と原点間の距離に対する比 ϵ が $\epsilon < 10^{-2}$ になるまで続けられた (周期軌道のより高精度の計算については第5章を参照). 図1に示す閉じた太い灰色の線は, 以上のようにして求めた周期軌道を表す. 周期軌道の時間周期は $64.7h/U (= 188\nu/u_\tau^2)$ である. 乱流軌道上に一定時間間隔で付した黒点が周期軌道の付近に密集していることから, 乱流状態にある系は長時間にわたって周期軌道付近に滞在することがわかる. 図2に, 乱流軌道の周期軌道への接近の例として, 図1の乱流軌道の一部を切り出して周期軌道とともに示す. 細い灰色の線は乱流軌道で, 閉じた太い黒色の線は周期軌道を表す. この図から, 乱流軌道は過渡的に周期軌道に接近し, 周期軌道をたどるように振舞うことがわかる. 一般には, 乱流軌道が周期軌道に接近すると, 1周期から2周期ほど周期軌道をたどる. この乱流軌道の周期軌道への接近を (I, D) 面とは異なる射影面においても確認した. 乱流軌道が周期軌道に接近すると, 乱流の時空間構造は時間周期流のそれ (下

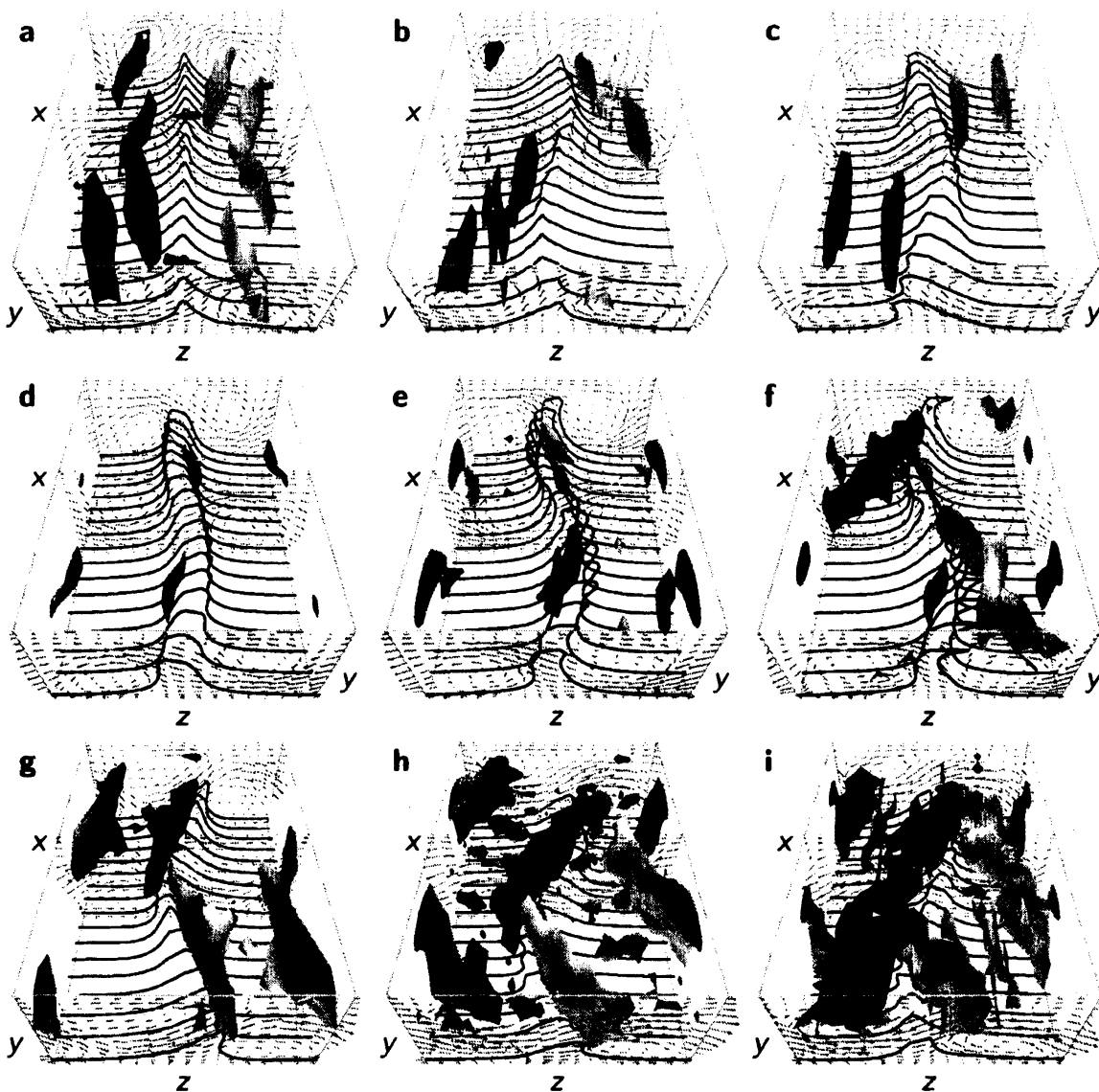


図 3. 時間周期流の時間発展. 基本周期箱 ($L_x \times 2h \times L_z$) における流れの構造の 1 時間周期にわたる可視化. 9 つのパネル a から i の時間間隔は $1/9$ 周期 ($7.2h/U$) であり, それらの位相を図 2 の灰色の丸で示す. ここに, パネル a, f はそれぞれ図 2 の一番下と一番上の丸に対応する. 時間は a から i の順に経過する. 上側 (あるいは下側) の壁面は速度 U (あるいは $-U$) で紙面奥向き (あるいは手前向き) に運動する. 渦構造を圧力ラプラシアン の等値面 $\nabla^2 p = 0.15\rho U^2/h^2$ によって表す (Tanaka & Kida 1993 参照). ここに, ρ は流体の密度である. $\nabla^2 p$ の等値面上での流れ (x) 方向渦度を白黒濃淡で示す. 白が正 (時計回り), 黒が負 (反時計回り) を表す. 横断方向の流速ベクトルと流れ方向速度の等値線を $x =$ 一定の面で示す.

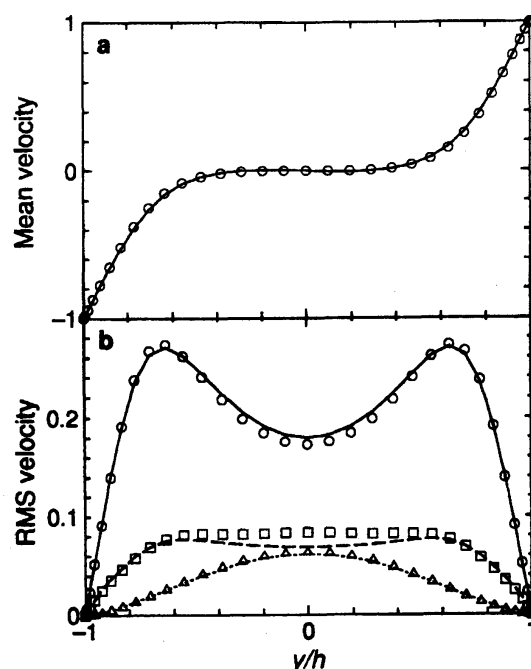


図 4. 時間周期流と乱流に対する平均速度および速度の RMS 値の比較.
 a. 流れ方向平均速度分布. b. RMS 速度分布. 速度は U で規格化している. y/h は壁垂直方向座標である. 記号と線は, それぞれ時間周期流と乱流を表す. $\circ$ と実線は流れ方向成分, $\triangle$ と点線は壁垂直方向成分, $\square$ と破線はスパン方向成分をそれぞれ表す. 平均は, 壁に平行な面 $y = \text{一定}$ において, 周期流に対しては 1 周期 $64.7h/U$, 乱流に対しては $60,000h/U$ の時間にわたってとられている.

の図 3 参照) ときわめてよく一致する. しかしながら, 周期軌道への接近は不完全であり, 乱流軌道は時おり周期軌道付近から大きく離脱する. つまり, 今回求めた周期軌道はサドル的性質をもつものといえる. 乱流状態は, 間欠的な離脱の後に高エネルギー散逸領域 (たとえば $D > 4$) に達する. この振舞いと, 小スケールの運動を励起して顕著なエネルギー散逸をもたらすいわゆるバースト (Kim, Kline, & Reynolds 1971 参照) との関連性を第 4 章で論じる. 今回の周期解の発見は, (著者らの知る限りにおいて) 乱流に埋め込まれた周期運動が, 少なくとも強く拘束されたクエット乱流に対して実際に存在することを初めて直接的に明示したものである.

図 3 の a から i は, 図 2 の周期軌道上に灰色の丸で示した 9 つの位相において, 周期解の空間構造の 1 サイクルにわたる時間発展を示したものである. 図 3 a の位相は, 注入率と散逸率が最小になる時刻に対応している. 代表的な壁付近の秩序構造 (Stretch 1990; Joeng *et al.* 1997) は, 圧力ラプラシアン白色 (あるいは黒色) の等値面で可視化された時計回り (あるいは反時計回り) の流れ (x) 方向渦 (横断方向の流速ベクトルも参照), および (y, z) 面での流れ方向速度の盛り上がった等値線により表された低速ストリークである. 時間周期流の動力学

は、次の3つの事象の回帰的循環によって特徴づけられる。

- (i) 図3 a から d. 減衰する縦渦が誘導する横断流によって流れ方向運動量が輸送されることで、低速ストリークが生成され、成長する。
- (ii) 図3 e から g. ストリークが流れ方向に沿って湾曲し、スパン (z) 方向に傾き、その結果縦渦が再生成される。
- (iii) 図3 h, i. ストリークが消滅し、縦渦が激しく成長する。

このサイクルは、これまでに報告されている平面クエット乱流中の秩序構造の再生サイクル (Hamilton, Kim & Waleffe 1995; Waleffe 1997) と完全に一致する。

図4 a, b は、時間周期流 (記号) と乱流 (線) に対する速度の平均と RMS (root-mean-square) の壁垂直方向分布を比較したものである。ここに、平均および RMS 速度は U により規格化されている。図から、時間周期流に対する流れ方向の平均速度分布が乱流のそれときわめてよく一致していることがわかる。さらに、周期流に対する、流れ方向、壁垂直方向、スパン方向の全 RMS 速度分布さえも、対応する乱流の RMS 速度に一致していることは非常に興味深い。渦度の全成分の RMS 値やレイノルズ剪断応力といった他の2次統計量に関しても、上と同様の非常によい一致を確認した (図省略)。これらの結果からも、乱流状態にある系がほとんどの時間を実際に周期軌道付近で費やすと考えられる。

4. 弱い揺らぎの周期解

乱流状態は、図1に示すように、時おり高エネルギー注入、散逸の活発な領域に達する。これは、激しい活動を伴う間欠的な現象であるバーストを思い起させる。乱流軌道を詳しく調べた結果、この際の軌道はいったん低エネルギー注入、散逸の静穏な状態に向かった後に、上記の活発領域に至ることが明らかになった。この観点からすると、平面ポアズイユ乱流においても同様な振舞いが観測されていることを思い出すのは教育的である。最近、Itano & Toh (2001) は、平面ポアズイユ流に対するナビエ・ストークス方程式の3次元の不安定進行波解をシューティング法により求めた。この解は層流を表し、乱流状態に比べはるかに低散逸である。彼らの平衡解は位相空間におけるサドルに相当し、乱流状態は時おりこのサドルに接近した後、予測不可能な方向に向けそこから急速に離脱する。彼らは、この一連の事象がバースト過程を記述するであろうと推論している。乱流状態がバーストの前に低エネルギー注入、散逸の比較的静穏な領域に向け過渡的に移動する様子は、ここで考えている系にも認められる (図1参照)。そこでわれわれは、平面クエット流に対するバースト過程に関連する不安定平衡解を探索することにした。Itano & Toh (2001) と同様のシューティング法を用いて解を探した結果、長い流れ方向周期 L_x において Nagata (1990) の (下分枝) 定常解が得られた (図5の黒点参照)。この定常解は、 $L_x < 6.1h$ で周期解に分岐し、これまでに見てきた流れ方向周期 $L_x = 5.513h$ ではこの分岐により時間周期 $85.5h/U (= 248\nu/u_\tau^2)$ の周期解が現れる。

この周期軌道を図5に閉じた太い黒色の線で示す。太い灰色の軌道は図1, 2の周期軌道と同一である。黒色の周期軌道は、灰色の周期軌道に比べかなり低

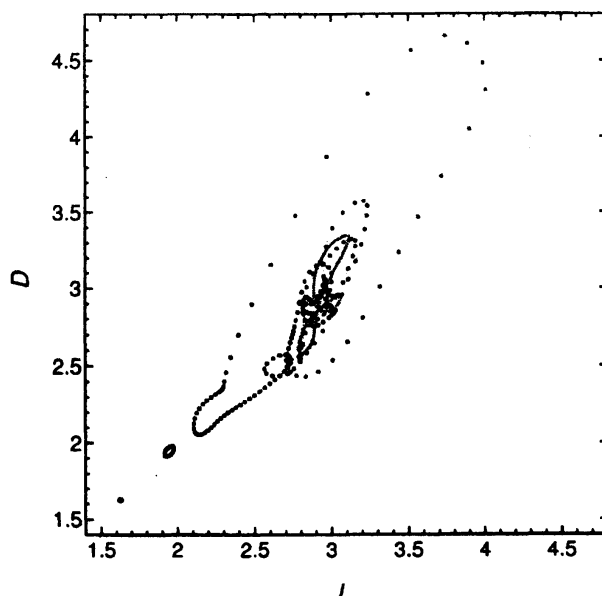


図 5. バースト軌道と 2 つの周期軌道の (I, D) 面への射影. 時間 $400h/U$ にわたるバースト軌道を細い灰色の線で示す. この軌道には $2h/U$ ごとに黒点が付してある. 閉じた太い黒色の線と太い灰色の線は, それぞれ周期軌道を表す. 黒丸は, 長い流れ方向周期 $L_x = 6.189h$ での Nagata (1990) の (下分枝) 定常解を示す. この定常解は太い黒色の周期軌道に分岐する. 太い灰色の周期軌道は図 1, 2 の周期軌道と同一である.

いレベルのエネルギー注入, 散逸に位置し, 変動の振幅もきわめて小さい. この弱い揺らぎの周期解に対する平均速度分布は層流状態に近く, 壁垂直方向とスパン方向の RMS 速度の最大値はそれぞれ $0.016U$, $0.028U$ であり, これら 2 成分はいたるところで乱流解あるいは強い周期解の対応する 2 成分よりきわめて小さい (図省略). 流れ方向の RMS 速度は $y = \pm 0.383h$ において比較的大きい最大値 $0.322U$ をとるが, 壁付近 ($|y| > 0.6h$) ではこの成分も乱流解あるいは強い周期解の対応する成分より小さい. バースト軌道の一例 (図 1 には含まれていない) を細い灰色の線で図 5 に示す. 軌道には $2h/U$ の間隔で黒点を付す. 乱流状態は, しばらくの間灰色の周期軌道のまわりをさまようが, そこから離脱し始め, 黒色の周期軌道にゆっくり接近する. やがてある程度の距離を残して接近をやめ, 灰色の周期解に向かって U ターンをする. そのすぐ後に, 乱流状態は急速に加速し, 再び元の灰色の周期軌道付近に戻ってくる前に非常に高いエネルギー注入, 散逸の領域に飛び出す. 以上が典型的なバースト軌道である.

バースト過程は位相空間における 2 つの周期解の間の「往復運動」とみなされるので, これら 2 つの解がどのように接続されているのかを調べるのは興味深い. この接続を見つけるため, それぞれの周期解付近から出発し, もう一方の周期解に至る軌道を数値的に探した. 具体的には, 3% から 5% のランダムな攪乱を灰色の周期軌道に加え, 一方, 黒色の周期軌道付近では x に依存するフーリエモードに対する係数のみに定数 c ($1 < c \leq 1.1$) を掛けて出発点とした. 特に灰色の周期軌道付近では, 出発点の位置に依存して軌道は大きく変化する. 図 6

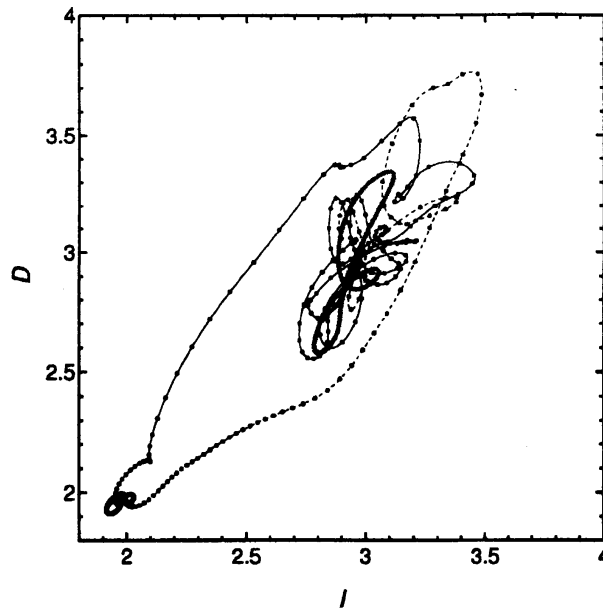


図6. 2つの周期解の (I, D) 面におけるヘテロクリニック接続. 閉じた黒色と灰色の軌道は2つの周期解を表す. 細い実線（あるいは破線）の軌道は、黒色（あるいは灰色）の周期解付近から出発し灰色（あるいは黒色）の周期解に至る接続を示す. 時間を $2h/U$ ごとに付した黒点によって表す.

に代表的な接続軌道を示す. 細い実線と破線はそれぞれ、黒色と灰色の周期解付近から出発する軌道を表し、時間を $2h/U$ ごとに黒点を付して示す. これらの接続を異なる射影面においても確認した. したがって、2つの周期解間のヘテロクリニック接続の存在が示唆される. 灰色の周期軌道付近におけるこれら接続軌道は、非常に激しく複雑な時空間構造を有することに注意する. パースト軌道は、おおむねこれらの接続に沿って走る.

5. 強い揺らぎの周期解の追跡

ここでは、強い周期解をより高精度で計算するためにニュートン・ラフソン法を導入する. 第3章で述べたポアンカレ断面 $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y,0,0,1}) = -0.1875U/h$ において定義されたポアンカレ写像の不動点として周期解を求める. ポアンカレ写像、つまり1周期にわたるナビエ・ストークス方程式の時間積分には第2章で述べた直接数値シミュレーションを用い、写像のヤコビ行列を有限差分近似により評価する. 第3章で示した $Re = 400$ に対する強い周期解 ($\epsilon < 10^{-2}$) をニュートン・ラフソン法の初期推定データとして用いる. レイノルズ数 Re を変化させて周期解を追跡するには膨大な計算が必要であるため、格子点数を第2, 3章で述べた計算の場合の半分4,352 (x, y, z 方向に $16 \times 17 \times 16$) にすることで計算量を軽減する. 周期箱寸法は第2, 3章と同様 $L_x = 5.513h$, $L_z = 3.770h$ である. 以下に示す周期解は $\epsilon < 10^{-7}$ の高精度で得られたものである. 格子点数の相違により、 $Re = 400$ において第3章の周期解とは約5%の周期の差異が認められた.

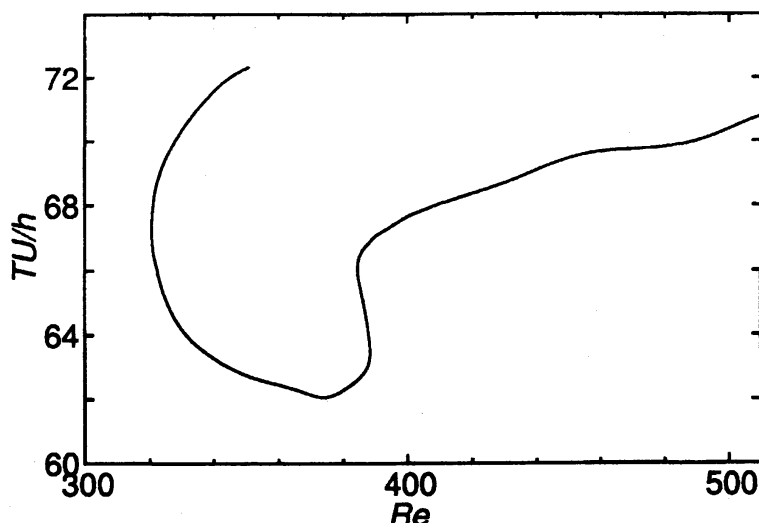


図7. 強い周期解の周期 T とレイノルズ数 Re との関係. 周期箱寸法は第2, 3章の結果と同一で, $L_x = 5.513h$, $L_z = 3.770h$ である. 計算にはニュートン・ラフソン法を用い, 格子点数は 4,352 点 (x, y, z 方向に $16 \times 17 \times 16$) であり, 解の精度は $\epsilon < 10^{-7}$ である.

図7にレイノルズ数を変化させて周期解を追跡した結果を示す. この図では, 追跡された周期解の時間周期 T がレイノルズ数 Re に対して示されている. レイノルズ数を $Re = 400$ から増加させても強い周期解は存在し, 少なくとも $Re \approx 510$ まではその存在が確認できる. 一方, $Re = 400$ からレイノルズ数を減少させながら周期解を追跡すると, 解は $Re = 384.4$ および $Re = 388.3$ における二度の転回後に最小レイノルズ数 $Re = 320.6$ に達し, 再び高レイノルズ数側に転回することがわかる. この転回後の $Re \approx 351.6$ までは周期解の追跡を行っている (現在も追跡中). なお, 様々なレイノルズ数における周期解の時空間構造や速度分布を調べたところ, それらの性質は第3章で示した $Re = 400$ での強い周期解の性質とよい一致が確認された.

周期箱寸法に対する依存性の吟味が必要ではあるが, この強い周期解が存在する下限レイノルズ数 $Re = 320.6$ が, 平面クエット流の亜臨界乱流遷移の下限レイノルズ数 $Re \approx 370$ (Daviaud, Hegseth & Bergé 1992 参照), さらに乱流域からレイノルズ数を下げた時にクエット乱流が維持される下限レイノルズ数 $Re \approx 325$ (Dauchot & Daviaud 1995) あるいは $Re \approx 300$ (Hamilton, Kim & Waleffe 1995) に近いことは注目に値する. この結果は, 第3章で示したように強い周期解が低レイノルズ数の平面クエット乱流の秩序構造や統計性質をうまく表現することに加え, 周期解の出現やその存在がクエット流における乱れの発生すなわち乱流遷移, あるいは乱流の維持にも密接に関連することを示唆している.

6. おわりに

本論文では, 拘束された平面クエット流に対して, 異なる性質をもつ2つの不安定周期解を数値的に求めた. そのうちのひとつの強い揺らぎを有する周期解

は豊かな時空間特性をもち、平面クエット乱流における壁付近の秩序構造の完全な再生サイクルを表す。乱流状態はこの解のまわりでほとんどの時間を費やすが、時おりそこから離脱しバーストを引き起こす。通常、「秩序構造」という言葉は空間的な秩序を意味するが、これに時間的な秩序の意味も加えるのがより適切であろう。本論文で述べた時間周期解は、乱流における空間的な意味でも時間的な意味でも秩序構造とよぶべき構造の具体例を示すものである。

もうひとつの弱い揺らぎの周期解は、乱流状態よりもエネルギー散逸がずっと小さい。長い流れ方向周期 L_x で見つけられた Nagata (1990) の（下分枝）定常解は、 $L_x < 6.1h$ でこの周期解に分岐する。Nagata (1990) の定常解の空間構造は、流れ方向に沿ってスパン方向に湾曲した低速ストリークとその側面に互い違いに配列した反対回転の流れ方向渦とによって特徴づけられる。ここで求めた弱い周期解のわずかな時間変動は、低速ストリークの定在波的なスパン方向運動を表し、この運動では、互いに流れ方向に半周期 ($L_x/2$) だけずれた2つの（同値な）Nagata の定常解の間を行き来する。この周期解に関連はするが全く異なる周期解が Clever & Busse (1997) によって発見されている。彼らの周期解は、 $Re \approx 150$ において Nagata (1990) の（上分枝）定常解から分岐する。この解の空間構造は、振幅のわずかな変動を除けば、1周期を通して定常解のそれと同様である。本研究で得られた2つの周期解はヘテロクリニック接続されており、この接続はバースト軌道の道筋を与えている。

最近、Schmiegel (1999) は、大きい周期箱 ($L_x = 12.566h$, $L_z = 6.283h$) において平面クエット流の多数の新しい定常解を発見した。彼は、乱流状態が多数の定常解の間のヘテロクリニック接続からなる複雑な位相空間構造によって形成されることを示唆している。Nagata (1990) の（上分枝）定常解や Schmiegel (1999) の解など、すでに知られている定常解と今回求めた強い周期解との関連性の有無の理解は今後の課題である。

最後に、本研究で得られた時間周期解の空間対称性についてふれる。この周期解は次の2つの対称性 (Nagata 1990; Clever & Busse 1997) をもっている。

- (i) 面 $z = 0$ に関する反転および x 方向への半周期 $L_x/2$ の並進。
- (ii) 線 $x = y = 0$ まわりの 180° の回転および z 方向への半周期 $L_z/2$ の並進。

これらの対称性は、流れの拘束、つまり低レイノルズ数でかつ最小周期箱であるがために実現されたものと考えられる。これらのうちの1つあるいは両方は、高レイノルズ数あるいは大きな周期箱においては崩れてしまうであろう。また、多くの新しい解が現れ、それらのいくつかは片側の壁面上のみに局在するであろう。だが、ここで求めた周期解は、少なくとも拘束された平面クエット乱流に対しては、乱流を理解する上できわめて重要となる乱れの簡潔な時空間での記述を与えるものである。

本研究における直接数値シミュレーションは、京都大学藤定義助教授から頂いた計算コードを用いて行われた。ここに記して謝意を表します。また、周期解の追跡に際して有益なご助言を頂いた京都大学永田雅人教授、山田道夫教授、ならびに船越満明教授に深く感謝申し上げます。

文献

- Auerbach, D., Cvitanović, P., Eckmann, J.-P. & Gunaratne, G. H. 1987 Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387–2389.
- Cantwell, B. J. 1981 Organized motion in turbulent flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **13**, 457–515.
- Christiansen, F., Cvitanović, P. & Putkaradze, V. 1997 Spatiotemporal chaos in terms of unstable recurrent patterns. *Nonlinearity* **10**, 55–70.
- Clever, R. M. & Busse, F. H. 1997 Tertiary and quaternary solutions for plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **344**, 137–153.
- Constantin, P., Foias, C., Manley, O. P. & Temam, R. 1985 Determining modes and fractal dimension of turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **150**, 427–440.
- Dauchot, O. & Daviaud, F. 1995 Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow. *Phys. Fluids* **7**, 335–343.
- Daviaud, F., Hegseth, J. & Bergé, P. 1992 Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2511–2514.
- Eckmann, J.-P. & Ruelle, D. 1985 Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617–656.
- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348.
- Itano, T. & Toh, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 703–716.
- Jeong, J., Hussain, F., Schoppa, W. & Kim, J. 1997 Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **332**, 185–214.
- Jiménez, J. 1987 Coherent structures and dynamical systems. in *Proc. 1987 Summer Program of Center for Turbulence Research CTR-S87*, Stanford Univ., 323–324.
- Jiménez, J. & Moin, P. 1991 The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 213–240.
- Jiménez, J. & Pinelli, A. 1999 The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid*

Mech. **389**, 335–359.

- Kawahara, G. & Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291–300.
- Kim, H. T., Kline, S. J. & Reynolds, W. C. 1971 The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **50**, 133–160.
- Kim, J., Moin, P. & Moser, R. 1987 Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133–166.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519–527.
- Panton, R. (ed.) 1997 *Self-Sustaining Mechanisms of Wall Turbulence* (Computational Mechanics Publications, Southampton).
- Reynolds, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc. London* **174**, 935–982.
- Robinson, S. K. 1991 Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 601–639.
- Schmiegel, A. 1999 Transition to turbulence in linearly stable shear flows. PhD thesis, Philipps-Universität Marburg.
- She, Z.-S., Jackson E. & Orszag, S. A. 1990 Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature* **344**, 226–228.
- Stretch, D. 1990 Automated pattern eduction from turbulent flow diagnostics. in *Center for Turbulence Research Annu. Res. Briefs*, Stanford Univ., 145–157.
- Tanaka, M. & Kida, S. 1993 Characterization of vortex tubes and sheets. *Phys. Fluids A* **5**, 2079–2082.
- Waleffe, F. 1997 On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 883–900.