

On triality relations for matrix algebras -行列における三対原理-

Noriaki Kamiya 神谷徳昭

(University of Aizu)

and

Susumu Okubo 大久保進

(University of Rochester)

Abstract

この小論では local and global triality relations (三対関係) と triality group (三対群) の概念を導入し、そしてその実例を行列代数において 4 元数体等で示すことです。この研究は自己同型群の拡張と代数系における微分の一般化を研究することです。

[This note is to show a global and local relations for matrix algebras, that is, we study a generalization of automorphism groups and derivations in algebras.]

key words : a generalization of automorphisms, principle of triality, triality group.

Math. subject classification (2010) : 17A30, 17B40, 20F29

内容 (Contents) は以下の章として扱われます。

§1. 三対関係式について (local and global triality relations)

§2. 行列における三対原理 (principle of triality)

§3. 線形リー群とリー代数の対応の拡張 (correspondence of Lie group and algebra)

§4. 一般化について (generalization)

§5. 簡単な実例 (複素数、4 元数) (simple examples)

§1. 三対関係式について

この節では normal triality algebra and triality group の定義と実例を主に述べさせていただきます。

A を標数が $\text{ch } F \neq 2, 3$ の体 F 上の代数 (必ずしも結合的, 単位元を持つことは仮定しない) とするとき,

$$d_j(xy) = (d_{j+1}x)y + x(d_{j+2}y) \quad (1.1)$$

$$d_j \in \text{End}(A), \quad j = j \pm 3(\text{mod } 3) \text{ for all } x, y \in A,$$

をみたす (d_j, d_{j+1}, d_{j+2}) を local triality relation [4],[5]) と呼びます。そしてこの関係式 d_j が存在する A を local triality algebra と呼ぶことにします。

$$(d_j, d_{j+1}, d_{j+2}) \in s \circ \text{Lrt}(A)$$

と書く ([3] or ArXiv 1503.00614). これは微分概念の拡張です。

次に d_1, d_2 を $L(x)y = xy$, $R(x)y = yx$ なる記号を用いて

$$d_1(x, y) := R(y)L(x) - R(x)L(y)$$

$$d_2(x, y) := L(y)R(x) - L(x)R(y),$$

と定義し, さらに

$$d_3(x, y)z + d_3(y, z)x + d_3(z, x)y = 0,$$

$$[d_j(x, y), d_k(a, b)] = d_k(d_{j-k}(x, y)a, b) + d_k(a, d_{j-k}(x, y)b) \quad (1.2)$$

を満たす d_3 が存在するとき, この代数 A を regular triality algebra といいます. d_3 の具体的な形は仮定しません. 更に $Q(x, y, z)$ を

$$Q(x, y, z) = d_0(xy, z) + d_1(yz, x) + d_2(zx, y)$$

と定義したとき, $Q(x, y, z) = 0$ が常に成り立つとき, この代数 A を normal triality algebra といいます ([3] J.Alg.416.(2014), or ArXiv 1503.00614].

$$D(x, y) = d_0(x, y) + d_1(x, y) + d_2(x, y)$$

と定義すると, 次の式が成り立ちます

$$D(x, yz) + D(y, zx) + D(z, xy) = 0$$

この $D(x, y)$ は derivation の関係式を満たします. そして generalized structurable algebra の性質の一つです. ([1])

単位元をもたない場合: A を bracket 積 $[,]$ をもつリー代数とすると,

$$d_j(x, y)z = [[x, y], z] \quad (j = 0, 1, 2,)$$

と定義すれば, この d_j は derivation を表し, A は normal triality algebra の例です. この様に我々は非結合的代数系で考えていることに留意して下さい ([2],[3],[4]).

単位元を持つ場合: A がドット積 $x \cdot y$ をもつ Jordan algebra とすると

$$\begin{aligned} d_j(x, y)z &= [L(x), L(y)]z = (L(x)L(y) - L(y)L(x))z \\ &= x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) \end{aligned}$$

($j=0,1,2$) と定義すれば, d_j は derivation でこの A は normal triality algebra の例です.

もう少し複雑な例としては, normal triality algebra A の積 xy を $x * y = \overline{xy}$, $\overline{xy} = y\overline{x}$, $\overline{\overline{x}} = x$ なる involution の概念によって新しい積を定義すると, この同じベクトル空間 A の上に, 別の代数 A^* が定義できます. この A^* を conjugated algebra of A といいます.

そしてこの A^* が単位元をもつとき, Allison によって導入された structurable algebra と呼ばれるものです. これは associative, alternative algebra and Jordan algebra を含んでいます (to see [3]).

In this A^* , we have the validity; $d_0(x, y) = r(\bar{x} * y - \bar{y} * x) + l(y)l(\bar{x}) - l(x)l(\bar{y})$, $d_1(x, y) = l(\bar{y})l(x) - l(\bar{x})l(y)$, $d_2(x, y) = r(\bar{y})r(x) - r(\bar{x})r(y)$, where $r(x)y = y * x$, $l(x)y = x * y$. Note that $\overline{xy} = x * y$.

別の normal triality algebra A の例としては

$$x(yx) = (xy)x = \langle x|x \rangle y$$

ただし, $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle \in F$ (対称な二次形式).

によって定義された symmetric composition algebra がその例です. (これは一般に単位元をもたない代数です.) ([4]). ここで考察する algebra 達は nonassociative algebras であることに留意してください.

何故 normal triality algebra を考察するのかの理由の一つは, これをもとにして root 系, Cartan 行列の概念を用いずに, Lie algebra の construction が可能だからです. 詳しい結果については ([3],[4],[8]) を参照してください.

三対群, [triality group] とは $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (\text{Epi}(A))^3$. つまり $\xi_j \in \text{End}(A)$ and onto, であり, 次の条件を満たす代数 A の linear transformation のことです ([4],[9]).

$$\xi_j(xy) = (\xi_{j+1}x)(\xi_{j+2}y) \quad (1.3)$$

for all $x, y \in A$, $j = j \pm 3$. これらの ξ_j を $(\xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}) \in \text{Trig}(A)$ と表します.

$\xi_j = \xi_{j+1} = \xi_{j+2} (= g)$ のときが $g(xy) = (gx)(gy)$ となり自己同型であり, 特に A が結合的で逆元 a^{-1} が存在する $a \in A$ をもてば,

$$g_a : x \rightarrow axa^{-1}$$

によって g_a を定義すればよく知られた自己同型群の一例です. これは三対群の特別なものです.

更に, 4 元数代数 (Hamilton algebra), 8 元数代数 (Cayley algebra) も normal triality algebra A に付随した A^* の実例です. ただしここで $xy \in A$ and $x * y \in A^*$ で代数構造の対応の区別をしています, つまり同じ vector space ですが積が異なります.

Following (Monograph [4] 2015.Aizu Univ.), 我々は, symmetric composition algebra において, 自己同型群の一般化の概念であるこの triality group について詳しい研究をしていますのでそれらを参照して下さい. この場で少しか述べると以下の様になります. ここで, $\langle x|y \rangle$ は内積 (対称な 2 次形式) を表しています.

$$d_0(x, y)z = 4\{\langle x|z \rangle y - \langle y|z \rangle x\},$$

$$d_1(x, y) = R(y)L(x) - R(x)L(y) \text{ and } d_2(x, y) = L(y)L(x) - L(x)R(y)$$

と定義したとき,

$$d_j(xy) = (d_{j+1}(x)y + x(d_{j+2}(y)))$$

となり,

$$\xi_j = \exp d_j = Id + d_j + \frac{d_j^2}{2} + \frac{d_j^3}{3!} + \cdots \quad (1.4)$$

とおくと,

$$\xi_j(xy) = (\xi_{j+1}(x)(\xi_{j+2}(y))) \quad (1.5)$$

が成り立ちます. ただし $Id + d_j + \frac{d_j^2}{2} + \dots$ が well defined であると仮定します. 式 (1.1) の素朴な形は次の Remark の関係式です.

Remark. 我々の概念は, $\mathbf{O}$ (8元数代数) におけるよく知られた三対原理 (principle of triality) の拡張を考えることです. つまり, 要約すると, 8元数の場合

$$(U, U', U'') \in (D_4, D_4, D_4) \subset (\text{End } \mathbf{O})^3$$

が存在し.

$$U(xy) = (U'x)y + x(U''y)$$

が任意の $x, y \in \mathbf{O}$ において成り立ちます. ただし, D_4 は $\mathbf{O}$ から誘導された 28 次元の単純リー代数を表します. (to see [6]), local triality relation の原型です.

更に簡単な場合は, 任意の代数 A における微分 $d \in \text{Der}(A)$ による

$$d(xy) = (dx)y + x(dy)$$

for all $x, y \in A$, の場合です.

ξ_j に関する (1.3) の式を global triality relation と呼ぶことにします.

local triality $\leftrightarrow$ global triality.

この関係を色々な代数系で調べることが我々の目標の一つです.

この小論では行列代数について特に考えることにします. (次節以降)

§2. 行列における三対原理

この節では, local and global triality relations をもつ実例を行列代数で考えます...

A を体 F (ch $F \neq 2, 3$) 上の $n \times n$ matrix algebra とする. ($\text{Mat}(n; F)$ と表す.)

$$A_0^* = \{x \in A \mid x * {}^t x = Id_n\} = (O(n) : \text{直交群}). \quad (2.1)$$

ただし, $x * y$ は行列 A の普通の積, ${}^t x$ は x の転置行列とおく. そして

$$\sigma_j(a)x = a_j * x * \bar{a}_{j+1} \quad (2.2)$$

により σ_j を定義する. ここでは $\bar{a}_j = {}^t a_j$ を意味する. ただし, $a_j \in A_0^*$, ($j = 0, 1, 2$) とする. 勿論 $a_{j+3} = a_j$.

定理 2.1. 以上の仮定のもとで,

$$\sigma_j(a)(xy) = (\sigma_{j+1}(a)x)(\sigma_{j+2}(a)y) \quad (\text{global triality}) \quad (2.3)$$

が成り立つ. that is, $(\sigma_1(a), \sigma_2(a), \sigma_3(a)) \in \text{Trig}(A)$,

ただし,

$$xy = \overline{x * y} \quad (\text{by new product}) \quad (2.4)$$

証明 この証明は

$$\sigma_j(a)(\overline{x * y}) = \overline{(\sigma_{j+1}(a)x) * (\sigma_{j+2}(a)y)}$$

を示すことと同値です. これを示すには, ここで,

$$\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}, \bar{x} = {}^t x, \text{ and } \bar{a}_j * a_j = Id_n \ (j = 0, 1, 2) \text{ (直交行列)},$$

という関係式等と行列の普通の積 $*$ は結合的であることを用いてできます. $\square$

次に, 交代行列全体を $Alt(n, F) := \{y \mid {}^t y = -y\}$ と表すことにすると, $j = 0, 1, 2$ に対して $P_j \in Alt(n, F)$ を用いて

$$d_j(P)x = P_j * x - x * P_{j+1} \quad (2.5)$$

for all $x \in Mat(n, F)$ と $d_j(P)$ を定義する. $P = (P_1, P_2, P_3) \in (End A)^3$.

定理 2.2. 以上の仮定のもとで,

$$d_j(P)(xy) = (d_{j+1}(P)x)y + x(d_{j+2}(P)y) \quad (local\ triality) \quad (2.6)$$

($j = 0, 1, 2$), $x, y \in A$ が成り立つ. ただし $xy = \overline{x * y}$ (by (2.4)).

証明 この証明は

$$\overline{d_j(P)(x * y)} = (d_{j+1}(P)x) * y + x * (d_{j+2}(P)y)$$

という同値な式に変形し, 更に, $\overline{d_j(P)x} = \overline{d_j(P)\bar{x}}$ の記号のもとで,

$$\overline{d_j(P)(\overline{x * y})} = (d_{j+1}(P)x) * y + x * (d_{j+2}(P)y)$$

と変形すれば, 行列の普通の積 $*$ の計算として証明することができます.

ただし, $Q \in End(A)$ のとき $\overline{Q(x)} = \overline{Q(\bar{x})}$ の意です. $\square$

この定理が前節の 8 元数に関する行列版のある種の三対原理とみなせると思います. もう少し定理 2.2 の表現を換えると, 次の様に述べることができます.

定理 2.3. 任意の $x, y \in Mat(n, F)$ に対して, U が (2.5) の形で与えられるならば,

$$U(xy) = (U'x)y + x(U''y)$$

となる 1 次変換 U', U'' が存在する.

系. 任意の $P, x, y \in Mat(n, F)$ に対して

$$ad P(x * y) = ((ad P)x) * y + x * ((ad P)y) \quad (derivation \text{ の関係式})$$

が成り立つ. ただし $(ad P)x = [P, x] = P * x - x * P$. つまり, $ad P$ が微分を表します.

もう少し一般化すると, 任意の $X, Y \in Mat(n, F)$ and $P_1, P_2 \in Alt(n, F)$ に対して

$$d_1(P_1, P_2) : X \rightarrow P_1 * X - X * P_2$$

と定義したとき, 以後行列は 大文字 X, Y で表示する.

$$d_1(P_1, P_2)(XY) = (d_2(P_2, P_3)X)Y + X(d_3(P_3, P_1)Y)$$

となる d_2, d_3 が存在します. XY は new product by $XY = \overline{X * Y}$ です.
これをもう少し別の表現で述べると, 定理 2.2 の言い換えです.

定理 2.4. 上の仮定のもとで

$$L_0 = \{l(B) - r(C) | B, C \in \text{Alt}(n : F)\}.$$

ただし $l(B)x = B * x$, $r(C)x = x * C$ とおくと

$$\forall d_j \in L_0, \exists d_{j+1}, \exists d_{j+2} \in L_0 \text{ s.t. } d_j(xy) = (d_{j+1}(x))y + x(d_{j+2}(y))$$

となる関係式が成り立つ.

証明 最初に $d_1(P_1, P_2)x = P_1 * x - x * P_2$ とおき, これに対して

$$d_2(P_2, P_3)x = P_2 * x - x * P_3, \text{ and } d_3(P_3, P_1)x = P_3 * x - x * P_1$$

と d_2, d_3 を定義すれば,

$$d_j(\overline{x * y}) = \overline{d_{j+1}(x) * y} + \overline{x * (d_{j+2}(y))}$$

が成り立ちますので, この定理が示せます. $\square$

繰り返しますが $xy = \overline{x * y}$ であることに注意してください.. 普通の行列の積 $*$ を new product xy に置き換えて考えています. この積では結合性は成り立たない可能性があります. また $Id_n x = \overline{Id_n * x} = {}^t x$ なので単位元もこの積では存在しません.

§3. 線形リー群とリー代数の対応の三対原理への拡張

線形リー群とリー代数の関係において, 任意の $X, Y \in \text{Mat}(n, F)$ とすると

$$\left[\frac{d}{dt} ((\exp t Y) * X * (\exp t Y)^{-1}) \right]_{t=0} = Y * X - X * Y = (\text{ad } Y)X = [Y, X]$$

が成り立ちます. ただし,

$$\exp tY = Id + tY + \frac{(tY)^2}{2} + \frac{(tY)^3}{3!} + \dots$$

ここで特に $Y = P$ (${}^t P = -P$; 交代行列) とおき, そして $P = (1 - A)(1 + A)^{-1}$ が well defined のとき, この Cayley transformation において

$$P \in \text{Alt}(n; F) = \{P | {}^t P = -P\} \iff A \in O(n) = \{A | A * {}^t A = Id_n\}$$

の対応が成り立つことが知られています.

実際 P が交代行列と A が直交行列ということがこの変換で対応しています.
つまり

$$\sigma(A)X = A * X * A^{-1}, A \text{ は直交行列}$$

$$d(P)X = [P, X] = P * X - X * P, P \text{ は交代行列}$$

と対応しています.

我々の triality relation の概念の特別な場合です。 XY の積の行列代数において

$$\sigma(A)X = AXA^{-1} \text{ (自己同型写像)}$$

$$(ad P)X = [P, X] \text{ (微分)}$$

とみなすことが可能なのです。

繰り返し述べますが, これらの一般化として

$$A = a_j, P = P_j \ (j = 0, 1, 2), j = j \pm 3$$

とおくことが可能なのです。もう少し詳しく論究すると, 任意の $a_j \in Mat(n, F)$ に対して

$$\left[\frac{d}{dt} ((\exp ta_j) * X * (\exp ta_{j+1})^{-1}) \right]_{t=0} = a_j * X - X * a_{j+1}$$

が成り立ち, ここで Cayley transformation の概念を用いて

$$P_j = (1 - a_j) * (1 + a_j)^{-1}$$

とおくと, これらが well defined を仮定すれば, $j = 0, 1, 2$ に対して

$$a_j \in O(n) \iff P_j \in Alt(n, F)$$

が成り立ちます。更に

$$\sigma_j(a)X = a_j * X * a_{j+1}^{-1} \text{ and } d_j(P)X = P_j * X - X * P_{j+1}$$

と定義すると, ただし (${}^t a_j = a_j^{-1} = \bar{a}_j$) この σ_j, d_j は次の三対原理を満たします。

$$\sigma_j(a)(XY) = (\sigma_{j+1}(a)X)(\sigma_{j+2}(a)Y) \cdot \text{ global triality relation}$$

$$d_j(P)(XY) = (d_{j+1}(P)X)Y + X(d_{j+2}(P)Y) \cdot \text{ local triality relation}$$

ただし,

$$XY = \overline{X * Y} = {}^t Y * {}^t X \text{ (by new product).}$$

ここで

$$Id_n A = \overline{Id_n * A} = \bar{A} = {}^t A$$

であり XY の積においては単位元の存在が保証されていません。

§4. 一般化について

A^* が単位元 e をもち, 結合的な involution (i.e., $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$) をもつ代数とする。ここで σ_j と d_j and a_j を, ($j = 0, 1, 2$, $a_{j \pm 3} = a_j$ and $d_{j \pm 3} = d_j$)

$$\sigma_j(a)x = a_j * x * \bar{a}_{j+1}, \text{ and } d_j(P)x = P_j * x - x * P_{j+1}$$

と定義する。ただし,

$$a_j \in A_0^* = \{b \in A | b * \bar{b} = e\},$$

$$P_j \in Alt(A) = \{c \in A | \bar{c} = -c\}.$$

このとき, $xy = \overline{x} * \overline{y}$ によって new product xy を定義した代数を A と表す.

A と A^* は同じベクトル空間であることに注意してください. 積が異なり, A には単位元が存在しない可能性もあります. 以上の仮定のもとで, 次が成り立ちます.

定理 4.1. 上の仮定のもとで三対原理が成り立つ.

$$\sigma_j(a)(xy) = (\sigma_{j+1}(a)x)(\sigma_{j+2}(a)y) \quad (4.1)$$

$$d_j(P)(xy) = (d_{j+1}(P)x)y + x(d_{j+2}(P)y) \quad (4.2)$$

つまり

$$(\sigma_j(a), \sigma_{j+1}(a), \sigma_{j+2}(a)) \in \text{Trig}(A)$$

$$(d_j(P), d_{j+1}(P), d_{j+2}(P)) \in s \circ \text{Lrt}(A).$$

この定理の様に automorphism と derivation が一般化された三対原理の global version と local version の概念を, 非結合的代数系に拡張しようと試みる研究を我々はしています.

物理への応用としては Gell-Mann の Baryon の対称性を論及するのに役に立つ 3×3 の行列により定義される 8 dimensional pseudo octonion algebra が存在します ([5], [7]). この代数系においても三対原理における三対群の関係が存在します ([4]).

もう少し詳しくのべると, この代数は単位元をもたない リー代数 ジョルダン代数 でもない非結合的代数の例です. しかし Lie admissible algebra の性質をもち, そして, Section 1 で述べた $d_0(x, y) = 4\{\langle x|z \rangle y - \langle y|z \rangle x\}$, $d_1(x, y) = R(y)L(x) - R(x)L(y)$, $d_2(x, y) = L(y)R(x) - L(x)R(y)$ と $\langle x|y \rangle = \frac{1}{6} \text{Trace}(xy)$ (行列の対角和) を用いて, 定義すると, 等式 (局所的な三対原理)

$$d_j(x, y)(ab) = (d_{j+1}(x, y)a)b + a(d_{j+2}(x, y)b), \quad j = 0, 1, 2.$$

が (1.1) 式と同様に成り立ちます. この代数は normal triality algebra and symmetric composition algebra の例です ([4]). もちろん triality group の関係式も存在します. 詳しくは別の機会に述べますが normal triality algebra は local triality relation d_j and global triality relation σ_j が存在する代数です. この代数は 4 元数, 8 元数を含むような物理への応用を持つ興味ある研究対象の代数と思われます.

A を乗法 $*$ をもつ群とするととき任意の $x, y, a_j (j = 0, 1, 2) \in A$ に対して $\overline{x} = x^{-1}$ と involution を定義し, そして 新しい積 $xy = \overline{x} * \overline{y}$ と $\sigma_1(a)x = a_1 * x * a_2^{-1}$, $\sigma_2(a)x = a_2 * x * a_3^{-1}$, and $\sigma_3(a) = a_3 * x * a_1^{-1}$ とおくととき, new product xy に関して triality group の関係式

$\sigma_j(a)(xy) = (\sigma_{j+1}(a)x)(\sigma_{j+2}(a)y)$ が成り立ちますが local triality relation は存在しません.

§ 5. 簡単な実例 (複素数, 4 元数)

行列以外のもう少し簡単な例はよく知られた 4 元数です. この章ではその場合で三対関係を考えます. 4 元数体とは非可換代数系で, 乗法の逆元が存在するハミルトンが考案したもので $\mathbf{H}$ で表すと, $\mathbf{H} = \{1, i, j, k\}_{\text{span}}$, ただし 積は $i * i = j * j = k * k = -1$. $i * j = -j * i = k$, でありこの $1, i, j, k$ を基底とする 4 元数代数のことです. (ここで 1 は単位元, 基礎体 F 上で考えます)

$a = (i, j, k)$ とおき $\sigma_1(a)x = i * x * j^{-1}$, $\sigma_2(a)x = j * x * k^{-1}$ and $\sigma_3(a)x = k * x * i^{-1}$ と定義すれば,

$$\sigma_j(a)(xy) = (\sigma_{j+1}(a)x)(\sigma_{j+2}(a)y)$$

が成立する. ただし, $xy = \overline{x * y}$ (new product) $\overline{xy} = \overline{y} \overline{x} = x * y$, この積 $*$ は $\mathbf{H}$ のよく知られた普通の積. $-$ は $\mathbf{H}$ の共役元. ($j^{-1} = \bar{j} = -j$ etc です.)

同様に $P = (i, j, k)$ とおき,

$$d_1(P)x = i * x - x * j, \quad d_2(P)x = j * x - x * k, \quad \text{and} \quad d_3(P)x = k * x - x * i$$

($P = (P_1, P_2, P_3)$ の記号のもとで) と定義すれば

$$d_j(P)(xy) = (d_{j+1}(P)x)y + x(d_{j+2}(P)y), \quad (j = 0, 1, 2)$$

が成立する. 以上が 4 元数代数の三対原理の一例です.

これは自己同型、微分の概念の拡張 (一般化) です.

実際これらの対応は $a = (a_1, a_2, a_3) = (i, j, k)$, $P = (P_1, P_2, P_3) = (i, j, k)$ とおけば

$$P_j = (1 - a_j) * (1 + a_j)^{-1}$$

による Cayley transformation の簡単な場合の結果です. つまり $(1-i)*(1+i)^{-1} = -i$, etc. の計算で明らかです.

(この場合のようなときは 4 元数を 2×2 行列表示したほうが便利なようです.)

次にもつとも簡単な場合は複素数 $\mathbf{C}$ のときです. product $*$ は $\mathbf{C}$ の普通の積, i は $i = \sqrt{-1}$ を表します,

$$d_1(P)x = \alpha i * x - x * \beta i, \quad \alpha, \beta \in R \text{ (real number field).}$$

d_2, d_3 も同様に β, γ, α 等を用いて定義します. σ_j に関しては

$$\sigma_1(a)x = (\exp \alpha i) * x * (\exp (-\beta i))$$

そして σ_2, σ_3 も $\exp, \beta, \gamma, \alpha$ 等を用いて定義すると

$P = (\alpha, \beta, \gamma)$ and $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ のとき

$$d_j(P)(xy) = (d_{j+1}(P)x)y + x(d_{j+2}(P)y) \text{ and } \sigma_j(a)(xy) = (\sigma_{j+1}(a)x)(\sigma_{j+2}(a)y)$$

where $xy = \overline{x * y}$ and $\overline{x}$ = the conjugation of x .

このように三対原理の関係式が成り立ちます.

実際、複素数の場合は この involution は x_1, x_2 が実数のとき $\bar{x} = x_1 - \sqrt{-1}x_2$ (if $x = x_1 + \sqrt{-1}x_2$) で与えられます. Note that $xy \neq x * y$, because $xy = \overline{x * y}$.

$G_0 = \langle \sigma_1(a), \sigma_2(a), \sigma_3(a) \rangle_{gen}$ とするとき

G_0 is a subgroup of Trig $\mathbf{C}$

が成り立ちます.

That is, in $\mathbf{C}$ with product $x * y$ these imply that

$$\sigma_j x = (\exp \lambda_j \sqrt{-1}) * x, \quad d_j x = (\lambda_j \sqrt{-1}) * x,$$

where $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_j \in \mathbf{R}$ ($j = 0, 1, 2$).

$$d_j \text{ (local triality)} \leftrightarrow \sigma_j \text{ (global triality)}$$

$$xy = \overline{x * y} \text{ (new product)}.$$

If we put $a = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$, then $aa = \overline{a} * a = a$ and so a is an idempotent, and also we define $\sigma(a)x = R(a)R(a)x = (xa)a$, then we obtain

$$\sigma(a)(xy) = (\sigma(a)x)(\sigma(a)y). \text{ (simple example of automorphism)}$$

This implies that $\sigma(a)$ is an automorphism of $\mathbf{C}$, but we note that xy is new product defined by $\overline{x * y}$. Next we set $b = (1, a, \overline{a})$ and introduce

$$\sigma_1(b) = R(1)R(a), \quad \sigma_2(b) = R(a)R(\overline{a}) \text{ and } \sigma_3(b) = R(\overline{a})R(1),$$

then we get for $j = 0, 1, 2$,

$$\sigma_j(xy) = (\sigma_{j+1}(b)x)(\sigma_{j+2}(b)y). \text{ (simple example of triality group)}$$

In the case of real number field $\mathbf{R}$, $\text{Aut}(\mathbf{R}) = \langle Id \rangle$, $\text{Trig}(\mathbf{R}) = K_4$ (Klein's group). Indeed, for the unit element $e \in \mathbf{R}$, putting $g_j(e) = \alpha_j e$, $\alpha_j \in \mathbf{R}$, we have $g_j(ee) = g_{j+1}(e)g_{j+2}(e)$ and so $\alpha_j^2 = 1$, $\alpha_{j+2} = \alpha_j \alpha_{j+1}$ ($j = 0, 1, 2$). Thus, $\langle 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \rangle$ is a generator of $\text{Trig}(\mathbf{R})$. Hence for this global and weak local triality, there is a correspondence $(1, -1, -1) \leftrightarrow (0, \pi i, -\pi i)$, since $-1 = \exp(\pm \pi i)$. Note that $xy = \overline{x * y}$ (new product of complex number field $\mathbf{C}$). The "weak" means to belong $\text{End } \mathbf{C}$.

Concluding Remark

new product xy of algebra with involution において三対原理が成り立つ

product の取り方によりいろいろな代数が特徴づけられる

$$[x, y] = xy - yx \dots \dots \text{Lie algebra}$$

$$\{x, y\} = xy + yx \dots \dots \text{Jordan algebras}$$

$$xy = \overline{x * y} \dots \dots \text{triality algebra}$$

最後のコメントにおいて、これらの triality group, local triality relations の概念は superalgebra [2] の場合にも拡張できるのではと考えています。勿論三項系の理論にも適用できるのではと考察中です。

あとがき 大久保進 (1930-2015) 先生との共著 [4] において、非結合的代数系における三対原理を論究しました。本稿で述べたものは、その一部を筆者の一人神谷が独自に行列代数と複素数等に適用したものです。以下の参考文献は、必要最小限のものしか列挙しませんが、詳しくは [4] の引用文献を参照してください。また Cayley algebra についての局所的な三対原理 (local triality) については「6」の本が参考になると考えます。

References

- 1] N.Kamiya, On generalized structurable algebras and Lie related triple, Adv.Clifford Algebras 5(1995), 127-140
- 2] N.Kamiya and S.Okubo, Jordan-Lie superalgebra and Jordan-Lie triple system, J. Alg. 198 (1997), 388-411
- 3] N.Kamiya and S.Okubo, Triality of structurable and pre-structurable algebras, J.Alg. 416(2014), 58-83
- 4] N.Kamiya and S.Okubo, Algebras and Groups satisfying triality relations, Univ of Aizu, 2015. Nov, monograph (book), (Arxiv 1503.00614, and Arxiv 1609.05892)
- 5] S.Okubo, Symmetric triality relations and structurable algebras, Linear Algebras and its Applications, 396(2005), 189-222
- 6] R.D.Scafer, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, New York, (1966)
- 7] M.Gell-Mann, Symmetry of Baryons and Mesons, Phys. Rev. **125** (1962), 1067-1084.
- 8] N.Kamiya and S.Okubo, Symmetry of Lie algebras associated with (ϵ, δ) Freudenthal-Kantor triple systems, Proc.Edinb.Math.Soc., **89** (2016), 169-192.
- 9] N.Kamiya and S.Okubo, A generalization of automorphisms and triality group, RIMS kokyuroku, (Kyoto Univ,) vol. 2008, p10-20.

付録 数理代数学の黎明の序論（史談） by N.Kamiya

数理代数学 (Mathematical Algebra) ということばは筆者（神谷）の造語であり、まだ世間では認知されていないかも知れませんが「数理物理＋非結合的代数」AMS classification 17 の Jordan and Lie algebras に関連する分野と物理への応用を研究意識、目的にする学問分野です。

物理学の側面からは約 50 年前より、南部、Gell-Mann, そして主に大久保進氏による三項系の基本公式、symmetric composition algebra 等の物理への応用が歴史の中に登場してまいりました。100 年以上前の W.R.Hamilton - J.W.Gibbs - 木村駿吉 (4 元法講義) の歴史の流れにはまだ数理代数という意識は芽生えていないと筆者は考えています。

数学的側面からはプリンストンで Weyl に学んだ Jacobson (Yale Univ. で長く教鞭をとりました) とその弟子たちそして Zelmanov (フィールズ賞の受賞者) 等へとつづく流れが存在すると思います。Europe では Freudenthal-Tits - Kantor の流れとドイツの Artin - Koeher とその弟子たちによる幾何学的な興味の源流が存在しますが彼らには物理学への応用という目的はあまりないように思われます。

S.Okubo 先生 (仁科賞の受賞者) による "Introduction to octonion and other non-associative algebras in Physics" (1995) Cambridge University press. が数理代数学という分野の黎明期を形成する中心的役割をなす著作と確信しています。ほかにも名前を挙げなければいけない人たちが多数存在しますが省略させていただいたことをお許し下さい。

——— いつか将来この分野の小史 (史談) を書きたいと念じながら ———。