

低次元の強相関電子系¹

— 朝永 Luttinger 流体とその周辺の話題 —

理化学研究所 古崎 昭

エネルギー分散が線形のギャップレス励起をもつ一次元量子系は、朝永 Luttinger 流体とよばれる量子多体状態にある。朝永 Luttinger 流体の特徴は、低エネルギー励起が密度揺らぎを量子化したボゾン励起であり、基底状態では種々の相関関数がべき関数的に減衰する準長距離秩序をもつことである（べき指数は相互作用の強さなどによって連続的に変化する）。本稿では、朝永 Luttinger 流体の自然な記述を与えるボゾン化法について紹介し、朝永 Luttinger 流体の例として XXZ スピン模型と Hubbard 模型の基底状態をボゾン化法を用いて解析する。

1 はじめに

我々の住んでいる空間は、3次元の空間である。固体中の電子も3次元の結晶中を運動しているが、結晶構造及び電子軌道の異方性によって、あるいはポテンシャル井戸を用いた閉じ込め効果によって、電子の運動が実質的に0次元・1次元・2次元の空間に制限されることがある。このような低次元電子系では、電子の動ける自由度が小さいので電子間の斥力の効果がより顕著になり、3次元電子系とは定性的に異なる物理があらわれる。例えば、2次元系は強磁場中で量子ホール効果を示し、量子ドットのような0次元系は人工原子として振る舞う。そして、1次元系では朝永 Luttinger 流体とよばれる量子液体が実現する。朝永 Luttinger 流体論は、線形分散の低エネルギー励起をもつ一次元量子系に普遍的にあらわれる性質を記述する。朝永 Luttinger 流体の低エネルギー励起は集団的な密度波であり、実は、そのハミルトニアンは自由ボーズ粒子系のハミルトニアンそのものである。つまり、線形分散のギャップレス励起をもつ一次元の相互作用する量子系は、フェルミ粒子系であれボーズ粒子系であれ、低エネルギー極限では自由ボーズ粒子系として記述できるのである。本稿では、1次元フェルミ粒子系をボゾン場で書き直す方法（ボゾン化法）について詳しく説明し、それを用いて一次元量子スピン系(3章)や電子系(4章)を朝永 Luttinger 流体として記述する。

朝永 Luttinger 流体という名前の由来は、朝永 [1] と Luttinger [2] がそれぞれ 1950 年と 1963 年に 1 次元の相互作用するフェルミ粒子系を解いたことによっている。朝永は有限のエネルギーカッ

¹第 60 回物性若手夏の学校（2015 年 7 月 27 日–31 日、長良川温泉）の講義ノートに少し加筆修正。

トオフを持った模型を解き、Luttinger はカットオフを無限大にした一次元ディラック模型を厳密に解いた。その後、1970 年代の一次元電子系や量子スピン系に対する低エネルギー有効理論をボゾン化法で導く研究 [3] などを経て、1980 年代初めに Haldane が一次元量子系の普遍的な理論として朝永 Luttinger 流体論を創ったのである [4]。高温超伝導体の発見を契機として 1990 年前後に一次元 Hubbard 模型や t - J 模型の研究が盛んに行われ、(central charge $c = 1$ の) 共形場理論として朝永 Luttinger 流体論が深化し、その応用が進んだ。それから 20 数年たった現在、朝永 Luttinger 流体論やボゾン化法は物性理論研究者の標準的な知識や道具となっており、強相関電子系研究のさまざまな場面で用いられている。本講義ノートと共通する話題を扱っている教科書には文献 [5, 6, 7, 8] がある²。ここで触れられなかった話題については、それらの教科書を参照されたい。以下では $\hbar = 1$ とおき、絶対零度に話を限る。

2 ボゾン化法

2.1 自由フェルミ粒子系

簡単のため spinless fermion を考える。free fermion 系のハミルトニアン

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x) \left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - E_F \right) \psi(x) \quad (1)$$

をフェルミエネルギー $E_F = k_F^2/2m$ の付近で線形近似して (k_F はフェルミ波数)、波数 $k \approx k_F$ の励起 (ψ_R) の低エネルギーハミルトニアン

$$H_R = -iv \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_R^\dagger(x) \frac{d}{dx} \psi_R(x) \quad (2)$$

と、 $k = -k_F$ 近傍の励起 (ψ_L) の低エネルギーハミルトニアン

$$H_L = iv \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_L^\dagger(x) \frac{d}{dx} \psi_L(x) \quad (3)$$

を考えよう。 $v = k_F/m$ はフェルミ速度である。上の近似は、フェルミ粒子の場の演算子 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = e^{ik_F x} \psi_R(x) + e^{-ik_F x} \psi_L(x) \quad (4)$$

のように、空間的にゆるやかに変化する場 $\psi_R(x)$ と $\psi_L(x)$ で表したことに相当する。2つの場の演算子は、以下の反交換関係をみたすものとする：

$$\{\psi_R(x), \psi_R^\dagger(y)\} = \{\psi_L(x), \psi_L^\dagger(y)\} = \delta(x-y), \quad \{\psi_R(x), \psi_L(y)\} = \{\psi_R(x), \psi_L^\dagger(y)\} = 0. \quad (5)$$

最初に、右向きに運動する粒子 (ψ_R : right-mover) について考えよう。場の演算子 $\psi_R(x)$ を、波数 k の粒子の生成・消滅演算子 f_k と $f_k^\dagger$ を用いて展開すると³

$$\psi_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} f_k \quad (6)$$

²日本語で書かれた優れた教科書が絶版となっていることは、日本の学術・文化にとって損失である。

³式 (4) によれば ψ_R は $k = k_F$ 付近の波数の状態から成るので式 (6) では積分を $|k| < k_F$ に制限する方が自然であるが、ここでは k はすべての実数をとるものとする。すなわち、非相対論的ハミルトニアン H_0 のかわりにディラック・ハミルトニアン $H_R + H_L$ を考える。低エネルギー励起に関してはどちらの模型も同じ物理を与えるはずである。

となり、ハミルトニアン H_R は

$$H_R = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, v k f_k^\dagger f_k \quad (7)$$

と書ける。ここで、 f_k は交換関係

$$\{f_k, f_q^\dagger\} = \delta(k - q), \quad \{f_k, f_q\} = 0 \quad (8)$$

にしたがう。基底状態 $|0\rangle$ では、 $k < 0$ の状態がすべて占有されている。後の議論のために、フェルミ粒子の相関関数を計算しておこう。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_R(x) \psi_R^\dagger(y) | 0 \rangle &= \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - iqy} \langle 0 | f_k f_q^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y+i\alpha)} = \frac{i}{2\pi(x-y+i\alpha)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\langle 0 | \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y+i\alpha)} = \frac{i}{2\pi(x-y+i\alpha)}. \quad (10)$$

ここで、 α は積分を収束させるために導入した、長さの次元をもった正の無限小量である。式 (10) で $x = y$ とおくと粒子密度が $(2\pi\alpha)^{-1}$ であることがわかるので、物理的には α は粒子間距離（あるいは格子間隔）に相当する短距離のカットオフである。

式 (7) のハミルトニアンは、線形近似したエネルギー分散を波数 $k \rightarrow -\infty$ まで延長しているため、エネルギーの底が抜けた状態となっている。このために無限大がいろいろなところに顔を出すので、それを適当に regularize する必要がある。

密度演算子を以下のように定義しよう。

$$J_R(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} : \psi_R^\dagger(x - \epsilon) \psi_R(x + \epsilon) : = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 e^{-ik_1(x-\epsilon) + ik_2(x+\epsilon)} : f_{k_1}^\dagger f_{k_2} : \quad (11)$$

フェルミオン場の生成消滅演算子を $x - \epsilon$ と $x + \epsilon$ のように少しずらした位置に置き、後で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとる。これを point splitting とよび、regularization の一つの方法である。また、演算子 A と B の積をコロンで挟んだ $:AB:$ は正規順序積 (normal-ordered product あるいは normal ordering) とよばれるもので、 A と B を f_k や $f_k^\dagger$ で展開して消滅演算子をすべての生成演算子の右へ移動し、移動に伴う置換の偶奇性に応じた符号を掛けたものである。このときの生成演算子と消滅演算子は、(真空ではなく) 基底状態からの励起を生成・消滅する演算子として定義する。すなわち、 $k < 0$ の状態がすべて占有された基底状態 $|0\rangle$ に対して、

$$\begin{aligned} J_R(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk_1 \int_{-\infty}^0 dk_2 e^{-ik_1(x-\epsilon) + ik_2(x+\epsilon)} f_{k_2} f_{k_1}^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-ik_1(x-\epsilon) + ik_2(x+\epsilon)} f_{k_1}^\dagger f_{k_2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_1 \int_{-\infty}^0 dk_2 e^{-ik_1(x-\epsilon) + ik_2(x+\epsilon)} f_{k_1}^\dagger f_{k_2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-ik_1(x-\epsilon) + ik_2(x+\epsilon)} f_{k_1}^\dagger f_{k_2} \end{aligned} \quad (12)$$

である。 $k < 0$ のとき、 f_k は基底状態 $|0\rangle$ に作用すると正孔励起を生成する演算子であり、 $f_k^\dagger$ は正孔を消滅させる演算子なので、第一項では $-f_{k_2}f_{k_1}^\dagger$ の順になったことに注意。実は、上の例のように生成消滅演算子 2 個の積の正規順序積では、 $:AB:=AB-\langle 0|AB|0\rangle$ となる。

異なる 2 点における密度演算子の交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} [J_R(x), J_R(y)] &= [: \psi_R^\dagger(x-\epsilon_1)\psi_R(x+\epsilon_1):, : \psi_R^\dagger(y-\epsilon_2)\psi_R(y+\epsilon_2):] \\ &= [\psi_R^\dagger(x-\epsilon_1)\psi_R(x+\epsilon_1), \psi_R^\dagger(y-\epsilon_2)\psi_R(y+\epsilon_2)] \\ &= \delta(x+\epsilon_1-y+\epsilon_2)\psi_R^\dagger(x-\epsilon_1)\psi_R(y+\epsilon_2) \\ &\quad - \delta(x-\epsilon_1-y-\epsilon_2)\psi_R^\dagger(y-\epsilon_2)\psi_R(x+\epsilon_1) \end{aligned} \quad (13)$$

となるが、 $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ のときに右边は $\delta(x-y)\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y) - \delta(x-y)\psi_R^\dagger(y)\psi_R(x)$ になって、0 であるように見える。ところが、 $k \rightarrow -\infty$ からの寄与のために $\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y)$ は $y \rightarrow x$ で特異的なので、この極限が 0 にはならないのである。 $y \rightarrow x$ の極限を正しくとるには、基底状態 $|0\rangle$ を基準にとった $:\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y):$ で $\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y)$ を書き直す必要がある。

$$\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y) - :\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y): = \langle 0|\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y)|0\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{-ik(x-y+i\alpha)} = \frac{i}{2\pi(x-y)}. \quad (14)$$

ここで、積分の下限 ($k \rightarrow -\infty$) で収束させるために正の無限小量 α を導入し、計算の最後で $\alpha \rightarrow 0$ とした。正規順序積 $:\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y):$ は $y \rightarrow x$ で singular でないので、交換関係は $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ の極限で

$$\begin{aligned} [J_R(x), J_R(y)] &= \delta(x-y+\epsilon_1+\epsilon_2) \left[:\psi_R^\dagger(x-\epsilon_1)\psi_R(y+\epsilon_2): + \frac{i}{2\pi(x-y-\epsilon_1-\epsilon_2)} \right] \\ &\quad - \delta(x-y-\epsilon_1-\epsilon_2) \left[:\psi_R^\dagger(y-\epsilon_2)\psi_R(x+\epsilon_1): + \frac{i}{2\pi(y-x-\epsilon_1-\epsilon_2)} \right] \\ &= \frac{i}{4\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} [\delta(x-y-\epsilon_1-\epsilon_2) - \delta(x-y+\epsilon_1+\epsilon_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。密度演算子 $J_R(x)$ の交換子が式 (15) のように 0 でない値となったことは、波数 $k \rightarrow -\infty$ まで状態があるとしたことによる。もしもエネルギーバンドが有限幅で式 (14) の積分の下限が $k = -k_c$ でカットオフされていたとすると、式 (14) の右边には $(1 - e^{ik_c(x-y)})$ の因子がかかり、 $y \rightarrow x$ の極限で式 (14) の右边は有限の値 $k_c/2\pi$ となるので、式 (15) の右边は 0 となったはずである。しかし、ディラック模型 H_R に対しては式 (15) が正しい交換関係である。

密度演算子をハイゼンベルグ表示して、運動方程式を計算しよう ($J_R(x, t) = e^{iH_R t} J_R(x) e^{-iH_R t}$)。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} J_R(x, t) &= [J_R(x, t), H_R] = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\psi_R^\dagger(x)\psi_R(x), -iv\psi_R^\dagger(y)\frac{\partial}{\partial y}\psi_R(y) \right] \\ &= -iv \int dy \left(\psi_R^\dagger(x)\delta(x-y)\frac{\partial}{\partial y}\psi_R(y) - \psi_R^\dagger(y)\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y)\psi_R(x) \right) \\ &= -iv \int dy \delta(x-y) \frac{\partial}{\partial y} (\psi_R^\dagger(x)\psi_R(y) + \psi_R^\dagger(y)\psi_R(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -iv \int dy \delta(x-y) \frac{\partial}{\partial y} \left(: \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) : + : \psi_R^\dagger(y) \psi_R(x) : \right) \\
&= -iv \frac{\partial}{\partial x} J_R(x, t).
\end{aligned} \tag{16}$$

上の式変形では式(14)を用いた(途中の計算では、引数 t を省略した)。したがって、運動方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) J_R(x, t) = 0 \tag{17}$$

を得る。これは、粒子が速度 v で右向きに運動していることを表現している。

交換関係式(15)から、

$$\begin{aligned}
[J_R(x), (J_R(y))^2] &= [J_R(x), J_R(y)] J_R(y) + J_R(y) [J_R(x), J_R(y)] \\
&= \frac{1}{i\pi} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) J_R(y) = -\frac{1}{i\pi} J_R(y) \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-y)
\end{aligned} \tag{18}$$

となることを用いると、ハミルトニアン H_R を

$$H_R = \pi v \int dx [J_R(x)]^2 \tag{19}$$

と書けることがわかる。なぜなら、式(18)と式(19)を用いると、

$$i \frac{\partial}{\partial t} J_R(x, t) = \pi v \int dy [J_R(x, t), (J_R(y, t))^2] = iv \int dy J_R(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-y) = -iv \frac{\partial}{\partial x} J_R(x, t) \tag{20}$$

のように運動方程式(17)が得られるからである。式(19)のようにハミルトニアンを密度演算子(current operator)の二乗で表現したものを、菅原形式とよぶ。

式(19)の H_R が実際に式(2)と一致することは、以下のようにして確かめることができる。密度演算子の二乗のかわりに、異なる2点 x と y における密度演算子の積を考え、それを正規順序積の和に展開しよう。(ここで、 J_R のpoint splittingの ϵ は $|x-y|$ よりもずっと小さいとして、以下の計算では最初から $\epsilon \rightarrow 0$ とする。)

$$\begin{aligned}
J_R(x) J_R(y) &= : \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) : : \psi_R^\dagger(y) \psi_R(y) : \\
&= : \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) \psi_R^\dagger(y) \psi_R(y) : \\
&\quad + \langle 0 | \psi_R(x) \psi_R^\dagger(y) | 0 \rangle : \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) : + \langle 0 | \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) | 0 \rangle : \psi_R(x) \psi_R^\dagger(y) : \\
&\quad + \langle 0 | \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) | 0 \rangle \langle 0 | \psi_R(x) \psi_R^\dagger(y) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{21}$$

右辺の第一項は(正規順序積なので) $y \rightarrow x$ の極限がsingularでなく、 ψ_R の反交換関係を用いると0となる。右辺の第四項は式(9)と(10)を用いると $-[2\pi(x-y)]^{-2}$ となつてsingularであるが、 c -数なので(エネルギーの原点を取り直せば)無視してよい。第二項と第三項の和は、 $y \rightarrow x$ の極限で

$$\frac{i}{2\pi(x-y)} \left[: \psi_R^\dagger(x) \psi_R(y) : - : \psi_R^\dagger(y) \psi_R(x) : \right] \rightarrow \frac{-i}{2\pi} \left[: \psi_R^\dagger(x) \frac{d}{dx} \psi_R(x) : - : \left(\frac{d}{dx} \psi_R^\dagger(x) \right) \psi_R(x) : \right] \tag{22}$$

となり、部分積分すれば式 (2) が得られる。

ここまでは right-mover を考えた。left-mover (ψ_L) についても同様の計算ができる。結果を要約しよう。まず、ハミルトニアン H_L の基底状態 $|0\rangle$ は、 $k > 0$ の状態がすべて占有された状態である。この基底状態における相関関数は

$$\langle 0 | \psi_L(x) \psi_L^\dagger(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_L^\dagger(x) \psi_L(y) | 0 \rangle = \frac{-i}{2\pi(x-y-i\alpha)} \quad (23)$$

となる (α は正の微小量)。密度演算子を

$$J_L(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} : \psi_L^\dagger(x-\epsilon) \psi_L(x+\epsilon) : \quad (24)$$

と定義すると、その交換関係は

$$[J_L(x), J_L(y)] = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) \quad (25)$$

となり、運動方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) J_L(x, t) = 0 \quad (26)$$

である。菅原形式のハミルトニアンは

$$H_L = \pi v \int_{-\infty}^{\infty} dx [J_L(x)]^2 \quad (27)$$

となる。

2.2 自由ボーズ粒子系

次に、自由ボーズ粒子系を考える。天下りだが、ハミルトニアンを

$$H_R = \frac{v}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\varphi_R}{dx} \right)^2 \quad (28)$$

として、実ボゾン場 $\varphi_R(x)$ は同時刻交換関係

$$[\varphi_R(x), \varphi_R(y)] = i\pi \operatorname{sgn}(x-y) \quad (29)$$

に従うものとする。波数 $k (\geq 0)$ の状態の生成消滅演算子 b_k と $b_k^\dagger$ が交換関係

$$[b_k, b_q^\dagger] = \delta(k-q), \quad [b_k, b_q] = 0 \quad (30)$$

に従うとして、ボゾン場を

$$\varphi_R(x) = \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{k}} (e^{ikx} b_k + e^{-ikx} b_k^\dagger) \quad (31)$$

と展開する。ここで、 α は積分が収束するための正の無限少量である。このモード展開式を用いて、式 (29) の交換関係を確かめることができる (この計算では最初から $\alpha \rightarrow 0$ としてよい)。

$$\begin{aligned} [\varphi_R(x), \varphi_R(y)] &= \int_0^\infty dk \int_0^\infty dq \frac{1}{\sqrt{kq}} \left[e^{ikx} b_k + e^{-ikx} b_k^\dagger, e^{iqy} b_q + e^{-iqy} b_q^\dagger \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left(e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)} \right) = i\pi \operatorname{sgn}(x-y). \end{aligned} \quad (32)$$

また、式 (31) を H_R に代入すれば

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{v}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dq (-1) \sqrt{kq} \left(e^{ikx} b_k - e^{-ikx} b_k^{\dagger} \right) \left(e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b_q^{\dagger} \right) \\ &= \int dk \frac{v}{2} (b_k b_k^{\dagger} + b_k^{\dagger} b_k) = \int_0^{\infty} dk v k \left(b_k^{\dagger} b_k + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

のように、 H_R が対角化される。 H_R の基底状態 $|0\rangle$ は

$$b_k |0\rangle = 0 \quad (k > 0). \quad (34)$$

をみたす b_k の真空である。 $b_k^{\dagger}$ はエネルギー vk のボゾン励起を生成する。

式 (29) を微分して得られる交換関係

$$[\varphi_R(x), \partial_y \varphi_R(y)] = -2\pi i \delta(x-y), \quad [\partial_x \varphi_R(x), \partial_y \varphi_R(y)] = -2\pi i \partial_x \delta(x-y) \quad (35)$$

と交換関係式 (15) を比較し、式 (19) と式 (28) のハミルトニアンを見比べると、

$$J_R = : \psi_R^{\dagger} \psi_R : \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_R}{dx} \quad (36)$$

の対応関係があることがわかる。 $d\varphi_R/dx$ の表式

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_R(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-\alpha k/2} i \sqrt{k} (e^{ikx} b_k - e^{-ikx} b_k^{\dagger}) \quad (37)$$

と $: \psi_R^{\dagger} \psi_R :$ の表式

$$\begin{aligned} : \psi_R^{\dagger}(x) \psi_R(x) : &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-i(k_1-k_2)x} : f_{k_1}^{\dagger} f_{k_2} : \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{ikx} : f_q^{\dagger} f_{k+q} : \end{aligned} \quad (38)$$

を比較することにより

$$b_k = -\frac{i}{\sqrt{k}} \int dq : f_q^{\dagger} f_{k+q} :, \quad b_k^{\dagger} = \frac{i}{\sqrt{k}} \int dq : f_{k+q}^{\dagger} f_q :, \quad (39)$$

を得る。ボゾン b_k はフェルミオンの粒子正孔対 $f_{k+q}^{\dagger} f_q$ の重ね合わせである。

再び天下り式だが、実ボゾン場の指数関数演算子 (vertex operator) $\exp[i\varphi_R(x)]$ を考えよう。交換関係 (29) を用いると、 $x \neq y$ に対して、

$$e^{i\varphi_R(x)} e^{i\varphi_R(y)} = e^{i\varphi_R(y)} e^{i\varphi_R(x)} e^{-[\varphi_R(x), \varphi_R(y)]} = -e^{i\varphi_R(y)} e^{i\varphi_R(x)} \quad (40)$$

を得る。ここで、 $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ のときに成り立つ公式

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \quad (41)$$

を用いた。同様に、 $x \neq y$ に対して

$$e^{i\varphi_R(x)} e^{-i\varphi_R(y)} = -e^{-i\varphi_R(y)} e^{i\varphi_R(x)} \quad (42)$$

が成り立つ。すなわち、vertex operator はフェルミオン場の演算子のように反交換する。また、式 (35) を用いて $d\varphi_R/dx$ との交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} \left[e^{i\varphi_R(x)}, \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_R(y)}{dy} \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[(\varphi_R(x))^n, \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_R(y)}{dy} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (-in) (\varphi_R(x))^{n-1} \delta(x-y) \\ &= \delta(x-y) e^{i\varphi_R(x)} \end{aligned} \quad (43)$$

となって、フェルミオン場の演算子 ψ_R と密度演算子 J_R の交換関係と同じである。

次に、 $e^{i\varphi_R(x)}$ と $e^{-i\varphi_R(y)}$ の反交換関係を $x = y$ の近傍で計算しよう。実ボゾン場 $\varphi_R(x)$ のモード展開式を生成演算子と消滅演算子に分けて、

$$\varphi_R(x) = \varphi_R^+(x) + \varphi_R^-(x), \quad \varphi_R^+(x) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}} e^{-\alpha k/2} e^{-ikx} b_k^\dagger, \quad \varphi_R^-(x) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}} e^{-\alpha k/2} e^{ikx} b_k \quad (44)$$

と書くことにする。基底状態 $|0\rangle$ は式 (34) をみたすので、 $\varphi_R^-(x)|0\rangle = \langle 0|\varphi_R^+(x) = 0$ が成り立つことに注意する。フェルミ粒子系のときと同じように、ボーズ粒子系に対する正規順序積を、生成演算子を消滅演算子の左側に移動したものとして定義する（ただし、ボーズ粒子では置換の符号は考えなくてよい）。つまり、

$$:e^{i\varphi_R(x)}: = e^{i\varphi_R^+(x)} e^{i\varphi_R^-(x)} \quad (45)$$

である。式 (41) と同様の条件で成り立つ公式

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (46)$$

を用いると、

$$e^{i\varphi_R(x)} = :e^{i\varphi_R(x)}: e^{\frac{1}{2}[\varphi_R^+(x), \varphi_R^-(x)]} \quad (47)$$

を得る。指数にあらわれた交換子を

$$g_R(x-y) = [\varphi_R^+(x), \varphi_R^-(y)] = - \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-\alpha k} e^{-ik(x-y)} \quad (48)$$

とおこう（この積分自身は $k=0$ で発散していて ill-defined である）。式 (47) と式 (41) を用いると

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_R(x)} e^{-i\varphi_R(y)} &= e^{i\varphi_R^+(x)} e^{i\varphi_R^-(x)} e^{-i\varphi_R^+(y)} e^{-i\varphi_R^-(y)} e^{\frac{1}{2}[\varphi_R^+(x), \varphi_R^-(x)] + \frac{1}{2}[\varphi_R^+(y), \varphi_R^-(y)]} \\ &= e^{i\varphi_R^+(x)} e^{-i\varphi_R^+(y)} e^{i\varphi_R^-(x)} e^{-i\varphi_R^-(y)} e^{\frac{1}{2}[\varphi_R^+(x), \varphi_R^-(x)] + \frac{1}{2}[\varphi_R^+(y), \varphi_R^-(y)] + [\varphi_R^-(x), \varphi_R^+(y)]} \\ &= :e^{i[\varphi_R(x) - \varphi_R(y)]}: e^{g_R(0) - g_R(y-x)} \end{aligned} \quad (49)$$

および

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi_R(y)} e^{i\varphi_R(x)} &= :e^{i[\varphi_R(x) - \varphi_R(y)]}: e^{\frac{1}{2}[\varphi_R^+(x), \varphi_R^-(x)] + \frac{1}{2}[\varphi_R^+(y), \varphi_R^-(y)] + [\varphi_R^-(y), \varphi_R^+(x)]} \\ &= :e^{i[\varphi_R(x) - \varphi_R(y)]}: e^{g_R(0) - g_R(x-y)} \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} g_R(0) - g_R(x) &= - \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} (1 - e^{-ikx}) = - \int_0^\infty dk \int_0^x dy i e^{-\alpha k - iky} = - \int_0^x dy \frac{i}{\alpha + iy} \\ &= \log\left(\frac{\alpha}{\alpha + ix}\right) \end{aligned} \quad (51)$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\alpha} \left\{ e^{i\varphi_R(x)}, e^{-i\varphi_R(y)} \right\} &= \frac{1}{2\pi} : e^{i[\varphi_R(x)-\varphi_R(y)]} : \left(\frac{1}{\alpha - i(x-y)} + \frac{1}{\alpha + i(x-y)} \right) \\ &= : e^{i[\varphi_R(x)-\varphi_R(y)]} : \delta(x-y) = \delta(x-y) \end{aligned} \quad (52)$$

が得られる。上の式変形では、 $\alpha \rightarrow 0$ の極限をとって $\delta(x-y)$ をつくり、(特異性のない) 正規順序積で $y = x$ とした。式 (43) 及び式 (52) から、フェルミオンとボゾンの対応関係

$$\psi_R(x) \longleftrightarrow \frac{e^{i\varphi_R(x)}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \quad (53)$$

がわかった⁴。式 (36) 及び式 (53) は、right-mover のフェルミオン場とボゾン場の演算子の対応関係を示しており、一次元の自由フェルミ粒子系と自由ボーズ粒子系が等価であることを示している。フェルミオン場をボゾン場で書き直すことをボゾン化する、という。後に具体例で見るように、ボゾン化法は量子一次元多体系を解析する重要な手法である。

同様に、left-mover をボゾン化できる。まず、実ボゾン場 $\varphi_L(x)$ のハミルトニアンは

$$H_L = \frac{v}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\varphi_L}{dx} \right)^2 \quad (54)$$

であり、場の同時刻交換関係を

$$[\varphi_L(x), \varphi_L(y)] = -i\pi \operatorname{sgn}(x-y) \quad (55)$$

とする。ボゾンの交換関係

$$[b_{-k}, b_{-q}^\dagger] = \delta(k-q), \quad [b_{-k}, b_{-q}] = 0 \quad (56)$$

に従う波数 $-k$ の状態 ($k \geq 0$) の生成消滅演算子 b_{-k} と $b_{-k}^\dagger$ を用いて、ボゾン場 $\varphi_L(x)$ は

$$\varphi_L(x) = \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{k}} (e^{-ikx} b_{-k} + e^{ikx} b_{-k}^\dagger), \quad (57)$$

と表すことができる。実際、 $\varphi_L(x)$ が式 (57) で定義されたとき、交換関係 (55) は $\varphi_R(x)$ の場合と同様に確かめられる。ボゾン場 φ_L のモード展開式 (57) をハミルトニアン H_L に代入すると

$$H_L = \int_0^\infty dk v k \left(b_{-k}^\dagger b_{-k} + \frac{1}{2} \right) \quad (58)$$

となるので、 H_L の基底状態はボゾン b_{-k} の真空である。交換関係式 (55) を微分することにより、密度演算子 J_L の対応関係

$$J_L = : \psi_L^\dagger \psi_L : \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_L}{dx} \quad (59)$$

⁴式 (53) は分母に α があって、一見すると singular である。これを避けるためには、長さ有限の系を考えて波数 k を離散化し、ボゾンの振動子モード b_k の他に $k=0$ のいわゆるゼロモードを考慮して定式化すればよい。このとき、vertex operator を正規順序積にすれば、ボゾン化公式 (53) には $1/\sqrt{2\pi\alpha}$ の係数因子が現れない。詳細は、文献 [4, 9] や教科書 [5] などを参照。

がわかる。さらに、交換関係式 (55) から

$$\left[e^{-i\varphi_L(x)}, \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_L(y)}{dy} \right] = \delta(x-y) e^{-i\varphi_L(x)} \quad (60)$$

が得られるので、フェルミオン場の演算子 $\psi_L(x)$ とボゾン場 φ_L の vertex operator の対応関係

$$\psi_L(x) \longleftrightarrow \frac{e^{-i\varphi_L(x)}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \quad (61)$$

がわかる。右辺の vertex operator が実際にフェルミオン場と同様に反交換関係をみたすことは right-mover の場合と同様に確かめられる。すなわち、

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_L(x)} e^{-i\varphi_L(y)} &= :e^{i[\varphi_L(x)-\varphi_L(y)]}: e^{g_L(0)-g_L(y-x)} \\ e^{-i\varphi_L(y)} e^{i\varphi_L(x)} &= :e^{i[\varphi_L(x)-\varphi_L(y)]}: e^{g_L(0)-g_L(x-y)} \end{aligned}$$

及び

$$g_L(0) - g_L(x) = - \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} (1 - e^{ikx}) = \log \left(\frac{\alpha}{\alpha - ix} \right) \quad (62)$$

を用いればよい。

ここまでは、left-mover と right-mover の chiral fermion 系を独立に考えてボゾン化した。今度は、両方をまとめて扱おう。 $\varphi_L(x)$ と $\varphi_R(x)$ から、二つのボゾン場 $\phi(x)$ と $\theta(x)$ を定義する。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\varphi_L(x) + \varphi_R(x)], \quad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\varphi_L(x) - \varphi_R(x)]. \quad (63)$$

さらに、 $\theta(x)$ を微分して

$$\Pi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (64)$$

とおくと、

$$[\phi(x), \Pi(y)] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} [\varphi_L(x), \varphi_L(y)] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} [\varphi_R(x), \varphi_R(y)] = i\delta(x-y) \quad (65)$$

となるので、 Π は ϕ に共役な演算子である。すなわち、 ϕ を座標だと思えば Π は運動量に相当する。 $\varphi_L(x)$ と $\varphi_R(x)$ は独立なボゾン場であるから、それらは交換する ($[\varphi_L(x), \varphi_R(y)] = 0$) と考えるのが自然であろう。しかし、それでは $e^{-i\varphi_L}$ と $e^{i\varphi_R}$ が交換してしまい、 ψ_L と ψ_R の反交換関係とは違ってしまう。そこで、フェルミオンの反交換関係をみたすために

$$[\varphi_L(x), \varphi_R(y)] = i\pi \quad (66)$$

という交換関係を仮定する。すると、 ϕ と θ の交換関係は

$$[\phi(x), \theta(y)] = -\frac{i}{2} [1 + \text{sgn}(x-y)] \quad (67)$$

となる⁵。

⁵式 (66), (67) の交換関係は、有限長の系に対して Dirichlet 境界条件 $\phi(x=0) = \phi(x=L) = 0$ を課したときには自然に得られる (例えば、文献 [10] 参照)。

二つのボゾン場 (ϕ, Π) は、系を特徴づける以下の物理量とそれぞれ結びついている。left-mover と right-mover を合わせたフェルミ粒子の数密度の長波長成分は、

$$N = :\psi_L^\dagger \psi_L: + :\psi_R^\dagger \psi_R: = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} (\varphi_L + \varphi_R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi}{dx} \quad (68)$$

で与えられる。ただし、式 (4) を用いると、波数 $k = 2k_F$ の成分も含めた粒子数密度は

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \left[e^{ik_F x} \psi_L^\dagger(x) + e^{-ik_F x} \psi_R^\dagger(x) \right] \left[e^{-ik_F x} \psi_L(x) + e^{ik_F x} \psi_R(x) \right] \\ &= \rho_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{\pi\alpha} \sin[2k_F x + \sqrt{4\pi}\phi(x)] \end{aligned} \quad (69)$$

となる (ρ_0 は定数)。右辺の最後の項の導出には、公式 (46) を用いて

$$\begin{aligned} e^{2ik_F x} \psi_L^\dagger(x) \psi_R(x) + e^{-2ik_F x} \psi_R^\dagger(x) \psi_L(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha} \left(e^{2ik_F x} e^{i\varphi_L(x)} e^{i\varphi_R(x)} + e^{-2ik_F x} e^{-i\varphi_R(x)} e^{-i\varphi_L(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \left(e^{2ik_F x} e^{i[\varphi_L(x) + \varphi_R(x)]} e^{-\frac{1}{2}[\varphi_L(x), \varphi_R(x)]} \right. \\ &\quad \left. + e^{-2ik_F x} e^{-i[\varphi_R(x) + \varphi_L(x)]} e^{-\frac{1}{2}[\varphi_R(x), \varphi_L(x)]} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

として、交換関係 (66) を用いた。一方、フェルミ粒子の「電流」密度は、

$$J = :\psi_R^\dagger \psi_R: - :\psi_L^\dagger \psi_L: = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} (\varphi_R - \varphi_L) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Pi \quad (71)$$

のように、 Π と結びついている。

最後に、式 (2) の H_R と式 (3) の H_L を合わせたディラック・ハミルトニアン H をボゾン場 (ϕ, Π) を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} H &= iv \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\psi_L^\dagger \frac{d}{dx} \psi_L - \psi_R^\dagger \frac{d}{dx} \psi_R \right) = \pi v \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(J_L)^2 + (J_R)^2 \right] \\ &= \frac{v}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\varphi_L}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_R}{dx} \right)^2 \right] \\ &= \frac{v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \Pi^2 \right] \end{aligned} \quad (72)$$

が得られる (c 数の定数は無視した)。このハミルトニアンと交換関係 (65) から、 ϕ と Π のハイゼンベルグ運動方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = [\phi, H] = iv\Pi, \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Pi = [\Pi, H] = iv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (73)$$

となるので、 ϕ は波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (74)$$

に従うことがわかる。 ϕ はフェルミ粒子の数密度の長波長ゆらぎをあらわす場なので、密度ゆらぎ (フォノン) が波動方程式に従って速度 v で伝搬することを上の方程式は示している。

3 1次元量子スピン系

3.1 XXZ 模型

一次元格子の各格子点 j に $S = \frac{1}{2}$ の量子スピン $\mathbf{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ があり、それらは交換関係

$$[S_j^x, S_k^y] = i\delta_{j,k}S_j^z, \quad [S_j^y, S_k^z] = i\delta_{j,k}S_j^x, \quad [S_j^z, S_k^x] = i\delta_{j,k}S_j^y \quad (75)$$

に従い、 $\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_j = S(S+1) = \frac{3}{4}$ である。XXZ 模型のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H_{\text{XXZ}} = J \sum_j \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta S_j^z S_{j+1}^z \right). \quad (76)$$

ここで、 $J > 0$ とする。 Δ は交換相互作用の異方性をあらわすパラメータであり、 $\Delta < 0$ のときは強磁性的、 $\Delta > 0$ は反強磁性的である。XXZ 模型は S^z 軸回りの回転で不変なので $U(1)$ 対称性を持ち、 $\Delta = \pm 1$ のときに対称性は $SU(2)$ に高まる。 $\Delta = +1$ のときは反強磁性ハイゼンベルグ模型であり、 $\Delta = -1$ のときは強磁性ハイゼンベルグ模型に等しい。後者は、例えば、奇数番目の格子点での π 回転 ($S_j^x \rightarrow (-1)^j S_j^x$, $S_j^y \rightarrow (-1)^j S_j^y$, $S_j^z \rightarrow S_j^z$) をすればわかる。

XXZ 模型は Bethe 仮設法で厳密に解ける模型である。基底状態や典型的な励起状態の波動関数を書き下すことができ、基底状態エネルギーや素励起のエネルギー分散、低温での熱力学などが厳密に計算されている。XXZ 模型の基底状態の相図は以下のとおりである。 $\Delta < -1$ の領域では強磁性イジング秩序 ($\langle S_j^z \rangle = \text{const}$)、 $\Delta > 1$ の領域では反強磁性イジング秩序 ($\langle S_j^z \rangle = (-1)^j \text{const}$) があり、どちらのイジング相でも励起ギャップが開いている。一方、 $-1 \leq \Delta \leq 1$ のときには、基底状態からの励起にギャップは開いていない。 $\Delta = -1$ の基底状態は強磁性長距離秩序を持ち、ギャップレス励起は $\varepsilon \propto k^2$ の分散をもつ。 $-1 < \Delta \leq 1$ では、基底状態で磁気秩序はなく ($\langle \mathbf{S}_j \rangle = 0$)、低エネルギー励起は線形のエネルギー分散をもっており、基底状態においてスピン相関関数はすべて距離（あるいは時間）のべき乗で減衰する準長距離秩序を示す。このように線形分散のギャップレス励起をもった一次元量子系を朝永 Luttinger 流体とよぶ。以下では、 $|\Delta| \ll 1$ の場合にボゾン化法を用いて XXZ 模型の朝永 Luttinger 流体相を記述する。

3.2 Jordan-Wigner 変換

XXZ 模型を Jordan-Wigner 変換によって相互作用する spinless fermion 系に書き直そう。

格子点 j 上のフェルミオンの生成消滅演算子 $f_j^\dagger, f_j$ が反交換関係

$$\{f_j, f_k^\dagger\} = \delta_{j,k}, \quad \{f_j, f_k\} = 0 \quad (77)$$

をみたすものとする。スピンの昇降演算子を

$$S_j^+ = S_j^x + iS_j^y, \quad S_j^- = S_j^x - iS_j^y \quad (78)$$

と定義したとき、スピン演算子をフェルミオン生成消滅演算子を用いて

$$S_j^+ = f_j^\dagger e^{i\pi O_j}, \quad S_j^- = f_j e^{-i\pi O_j}, \quad S_j^z = f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2} \quad (79)$$

のようにあらわすことができる。ここで、

$$O_j = \sum_{l < j} f_l^\dagger f_l \quad (80)$$

とおいた ($e^{i\pi O_j} = e^{-i\pi O_j}$)。式 (79) を Jordan-Wigner 変換とよぶ。

式 (79) が実際にスピン演算子の交換関係 (75) をみたすことは

$$f_j e^{i\pi O_k} = \begin{cases} -e^{i\pi O_k} f_j, & j < k, \\ +e^{i\pi O_k} f_j, & j \geq k \end{cases} \quad (81)$$

に注意すれば、容易に確かめることができる。

式 (79) から

$$S_j^+ S_{j+1}^- = f_j^\dagger e^{i\pi O_j} f_{j+1} e^{i\pi O_{j+1}} = f_j^\dagger f_{j+1} \exp(i\pi f_j^\dagger f_j) = f_j^\dagger f_{j+1} \quad (82)$$

となることを用いると、XXZ 模型のハミルトニアンは

$$H_{\text{XXZ}} = J \sum_j \left[\frac{1}{2} (f_j^\dagger f_{j+1} + f_{j+1}^\dagger f_j) + \Delta \left(f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2} \right) \left(f_{j+1}^\dagger f_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (83)$$

となる。 $S_j^x S_{j+1}^x$ と $S_j^y S_{j+1}^y$ の交換相互作用がフェルミオンのホッピング運動項になり、 $S_j^z S_{j+1}^z$ 交換相互作用がフェルミオン間の相互作用を与えている。すなわち、XXZ 模型は相互作用する spinless fermion 系と等価である。相互作用は $\Delta > 0$ のとき斥力的で、 $\Delta < 0$ のときに引力的である。

まず、 $\Delta = 0$ の場合 (XX 模型) を考えよう。このとき、ハミルトニアンは

$$H_{\text{XX}} = \frac{J}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (f_j^\dagger f_{j+1} + f_{j+1}^\dagger f_j) = J \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos q \tilde{f}_q^\dagger \tilde{f}_q \quad (84)$$

と対角化できる。ここで、

$$f_j = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iqj}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}_q \quad (85)$$

とフーリエ変換し、公式 $\sum_j e^{iqj} = 2\pi\delta(q)$ を用いた。 $\tilde{f}_q$ は

$$\{\tilde{f}_p, \tilde{f}_q^\dagger\} = \delta(p - q), \quad \{\tilde{f}_p, \tilde{f}_q\} = 0 \quad (86)$$

の反交換関係をみたす。

以上から、XX 模型は自由フェルミ粒子系と等価であることがわかった。基底状態では、 $\cos q < 0$ となる波数 q の状態 ($\frac{\pi}{2} < |q| < \pi$) がすべて占有されている。この基底状態でのフェルミ粒子密度は

$$\langle f_j^\dagger f_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \langle \tilde{f}_q^\dagger \tilde{f}_q \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} dq + \int_{\pi/2}^{\pi} dq \right) = \frac{1}{2} \quad (87)$$

なので、 $\langle S_j^z \rangle = 0$ である。また、 S_j^+ や S_j^- はフェルミオン数を 1 だけ変化させるので、 $\langle S_j^+ \rangle = \langle S_j^- \rangle = 0$ である。すなわち、 $\langle S_j^x \rangle = \langle S_j^y \rangle = 0$ 。次に、 S^z の相関関数を計算してみよう。 $f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2} =$

$f_j^\dagger f_j - \langle f_j^\dagger f_j \rangle = :f_j^\dagger f_j:$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
 \langle S_j^z S_k^z \rangle &= \langle :f_j^\dagger f_j :: f_k^\dagger f_k: \rangle = \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_2}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_3}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_4}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(q_1-q_2)j-i(q_3-q_4)k} \langle : \tilde{f}_{q_1}^\dagger \tilde{f}_{q_2} :: \tilde{f}_{q_3}^\dagger \tilde{f}_{q_4} : \rangle \\
 &= \int \frac{dq_1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_2}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_3}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dq_4}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(q_1-q_2)(j-k)} \langle \tilde{f}_{q_1}^\dagger \tilde{f}_{q_4} \rangle \langle \tilde{f}_{q_2} \tilde{f}_{q_3}^\dagger \rangle \\
 &= \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{dq_1}{2\pi} e^{-iq_1(j-k)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dq_1}{2\pi} e^{-iq_1(j-k)} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dq_2}{2\pi} e^{iq_2(j-k)} \\
 &= -\frac{1}{2\pi^2(j-k)^2} \left[1 - (-1)^{j-k} \right]. \tag{88}
 \end{aligned}$$

S^z の 2 点相関関数は、距離の 2 乗で減衰する。一方、 S^x や S^y の相関関数を計算するのは容易ではない。この計算を容易にするのがボゾン化法である。

3.3 XXZ 模型のボゾン化

$|\Delta| \ll 1$ の場合に XXZ 模型をボゾン化しよう。出発点となる $\Delta = 0$ の XX 模型は自由フェルミオン系と等価であり、 $k = \pm\pi/2a$ にフェルミ点をもっている。フェルミ点付近でエネルギーバンドを線形近似し、格子模型から連続極限をとる。すなわち、フェルミオンを

$$\frac{f_j}{\sqrt{a}} = e^{-i\pi x/2a} \psi_R(x) + e^{i\pi x/2a} \psi_L(x) \tag{89}$$

とあらわし、 ψ_R と ψ_L をボゾン化する。ここで、 a は格子間隔、 $x = ja$ である。この近似のもとで XX 模型のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
 H_{XX} &= \frac{Ja}{2} \sum_j \left[\left(e^{i\pi x/2a} \psi_R^\dagger(x) + e^{-i\pi x/2a} \psi_L^\dagger(x) \right) \left(e^{-i\pi(x+a)/2a} \psi_R(x+a) + e^{i\pi(x+a)/2a} \psi_L(x+a) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(e^{i\pi(x+a)/2a} \psi_R^\dagger(x+a) + e^{-i\pi(x+a)/2a} \psi_L^\dagger(x+a) \right) \left(e^{-i\pi x/2a} \psi_R(x) + e^{i\pi x/2a} \psi_L(x) \right) \right] \\
 &= \frac{iaJ}{2} \sum_j \left[\psi_L^\dagger(x) \psi_L(x+a) - \psi_L^\dagger(x+a) \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x+a) + \psi_R^\dagger(x+a) \psi_R(x) \right] \\
 &= \frac{iaJ}{2} \int dx \left[\psi_L^\dagger \frac{d}{dx} \psi_L - \left(\frac{d\psi_L^\dagger}{dx} \right) \psi_L - \psi_R^\dagger \frac{d}{dx} \psi_R + \left(\frac{d\psi_R^\dagger}{dx} \right) \psi_R \right] \\
 &= iaJ \int dx \left(\psi_L^\dagger \frac{d}{dx} \psi_L - \psi_R^\dagger \frac{d}{dx} \psi_R \right) \\
 &= \frac{aJ}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \Pi^2 \right] \tag{90}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a \sum_j \rightarrow \int dx$ として、被積分関数で $e^{\pm i\pi x/a}$ のように振動する項を無視した。

XXZ 模型ハミルトニアンの $\Delta S_j^z S_{j+1}^z$ の項はフェルミオンの相互作用を与える。まず、 S_j^z をボゾン場であらわすと

$$\begin{aligned}
 S_j^z &= a \left(e^{i\pi x/2a} \psi_R^\dagger(x) + e^{-i\pi x/2a} \psi_L^\dagger(x) \right) \left(e^{-i\pi x/2a} \psi_R(x) + e^{i\pi x/2a} \psi_L(x) \right) - \frac{1}{2} \\
 &= a : \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) : + a : \psi_L^\dagger(x) \psi_L(x) : + a(-1)^{x/a} \left(\psi_R^\dagger(x) \psi_L(x) + \psi_L^\dagger(x) \psi_R(x) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{2\pi} \frac{d\varphi_R}{dx} + \frac{a}{2\pi} \frac{d\varphi_L}{dx} + \frac{a(-1)^{x/a}}{2\pi\alpha} \left(e^{-i\varphi_R(x)} e^{-i\varphi_L(x)} + e^{i\varphi_L(x)} e^{i\varphi_R(x)} \right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi}{dx} + \frac{a(-1)^{x/a}}{\pi\alpha} \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)]
\end{aligned} \tag{91}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned}
\Delta J \sum_j S_j^z S_{j+1}^z &= a^2 \Delta J \sum_j \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{(-1)^{x/a}}{\pi\alpha} \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi(x+a)}{dx} + \frac{(-1)^{(x+a)/a}}{\pi\alpha} \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x+a)] \right) \\
&= a \Delta J \int dx \left(\frac{1}{\pi} \frac{d\phi(x)}{dx} \frac{d\phi(x+a)}{dx} - \frac{1}{\pi^2 \alpha^2} \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x+a)] \right). \tag{92}
\end{aligned}$$

ここで、被積分関数で $(-1)^{x/a}$ のように振動する項を落とした。ボゾン場 $\phi(x)$ は格子間隔 a のスケールよりもずっと長いスケールで変化する場だと考えているので、右辺の被積分関数の第一項の $d\phi(x+a)/dx$ は $d\phi(x)/dx$ としてよい。被積分関数の第二項についてはもう少し計算が必要である。まず、 $[\phi(x), \phi(x+a)] = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi^2 \alpha^2} \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x+a)] &= \frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos\{\sqrt{4\pi}[\phi(x+a) + \phi(x)]\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos\{\sqrt{4\pi}[\phi(x+a) - \phi(x)]\} \tag{93}
\end{aligned}$$

と変形する。この式の右辺第一項では、 $a \rightarrow 0$ として $\cos[\sqrt{16\pi}\phi]$ としてよい。公式(46)を使って第二項を正規順序積に書き直した後に $a \rightarrow 0$ として展開すると

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos\{\sqrt{4\pi}[\phi(x+a) - \phi(x)]\} &= -\frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} : \cos\{\sqrt{4\pi}[\phi(x+a) - \phi(x)]\} : \\
&\quad \times e^{2\pi[\phi^+(x+a) - \phi^+(x), \phi^-(x+a) - \phi^-(x)]} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 a^2} : \cos\left[\sqrt{4\pi}a \frac{d\phi(x)}{dx}\right] : \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 a^2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 + \dots \tag{94}
\end{aligned}$$

を得る⁶。上の計算の途中では

$$\phi^+(x) = \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{4\pi k}} \left(e^{-ikx} b_k^\dagger + e^{ikx} b_{-k}^\dagger \right), \quad \phi^-(x) = \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{4\pi k}} \left(e^{ikx} b_k + e^{-ikx} b_{-k} \right) \tag{95}$$

と定義した $\phi^\pm(x)$ を用いて

$$[\phi^+(x+a) - \phi^+(x), \phi^-(x+a) - \phi^-(x)] = - \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1) = -\frac{1}{\pi} \log \frac{\alpha}{a} \tag{96}$$

という結果を使った。結局、定数項や a の高次の項を除いて、

$$\Delta J \sum_j S_j^z S_{j+1}^z = a \Delta J \int dx \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \tag{97}$$

⁶左辺を直接 a のべきで展開するのは正しくない。

となる。非線形項 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ の出自を理解するために式 (91) にまでさかのぼって考えると、 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ はフェルミオンのウムクラップ散乱 $\psi_R^\dagger(x)\psi_L(x)\psi_R^\dagger(x+a)\psi_L(x+a) + \text{h.c.}$ から生じたことがわかる。今考えている磁場がかかっていない状況では $\langle S_j^z \rangle = 0$ 、すなわちフェルミオンのバンドは half filled ($\langle f_j^\dagger f_j \rangle = \frac{1}{2}$) なので、ウムクラップ散乱の運動量（波数）変化 $\pm 4k_F = \pm 2\pi/a$ となったことに注意する。

ここまでの結果をまとめると、XXZ 模型のハミルトニアンは

$$H_{\text{XXZ}} = \frac{aJ}{2} \int dx \left[\left(1 + \frac{4\Delta}{\pi}\right) \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \Pi^2 + \frac{\Delta}{\pi^2 a^2} \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \quad (98)$$

となる。この式は Δ の一次まで正確である（式 (94) の計算を省略すると、不正確な結果になる）。さらに、

$$v = aJ \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{\pi}}, \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta}{\pi}}} \quad (99)$$

を定義して

$$H_{\text{SG}} = \frac{v}{2} \int dx \left[\frac{1}{K} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + K \Pi^2 + g \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \quad (100)$$

と書き直そう。式 (100) の右辺は、sine-Gordon 模型のハミルトニアンである。つまり、XXZ 模型の低エネルギー有効理論は sine-Gordon 模型である。sine-Gordon 模型のハミルトニアンは、ボゾン場 ϕ の非線形項 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ を含んでいるので非自明な模型であるが、量子 1 次元系でよく研究されてきた標準的な模型の一つであり、その性質はよく理解されている。ここでは、繰り込み群の結果について述べよう。

繰り込み群とは、高エネルギーのカットオフ ω_0 から低いエネルギー ω までに含まれる状態（あるいは短距離のカットオフ a からより長い a' までの自由度）を少しずつ消去して、残されたエネルギー ω 以下の状態に対する有効ハミルトニアンを求める手続きのことである。ハミルトニアンに含まれるパラメータが変換の前後でどのように変化するかを調べることによって、低エネルギー（長波長）におけるパラメータのエネルギー（波数）依存性を知ることができる。カットオフの変化をあらわす変数を $\ell = \log(\omega_0/\omega)$ としたとき、sine-Gordon 模型の繰り込み群変換に伴うパラメータの変化を記述するスケーリング方程式は、 $ga^2 = 0 = K - \frac{1}{2}$ の近傍で

$$\frac{dg}{d\ell} = (2 - 4K)g, \quad \frac{dK}{d\ell} = -Cg^2 a^4 \quad (101)$$

となることが知られている。ここで、 C は 1 のオーダーの正の定数である。第一式は非線形項 $g \cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ のスケーリング次元が $4K$ であることによる（後述の式 (113) 参照）。したがって、 $K > \frac{1}{2}$ のとき $g \cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ は irrelevant operator であり、低エネルギー極限 ($\omega \rightarrow 0, \ell \rightarrow \infty$) で $g \rightarrow 0$ に繰り込まれることがわかる（図 1 参照）。

朝永 Luttinger 流体相 ($-1 < \Delta \leq 1$) では（式 (103) で見るように） $K \geq \frac{1}{2}$ なので低エネルギー極限で非線形項を無視することが正当化され、朝永 Luttinger 流体を記述する有効ハミルトニア

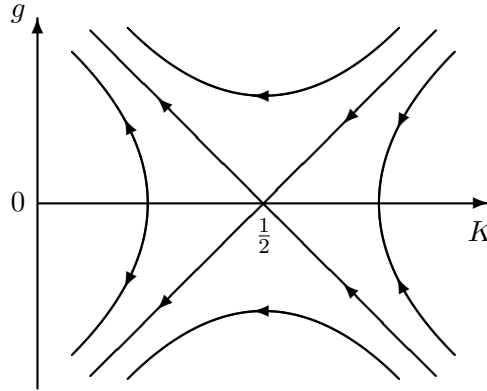


図 1: 繰り込み群の flow diagram。エネルギースケールを下げていくと K や g は矢印の方向に繰り込まれていく。低エネルギー極限の固定線 ($K \geq \frac{1}{2}$ かつ $g = 0$) が朝永 Luttinger 流体に対応する。

ンは

$$H_{\text{TL}} = \frac{v}{2} \int dx \left[\frac{1}{K} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + K \Pi^2 \right] \quad (102)$$

となる。 K を朝永 Luttinger パラメータとよぶ。一般に、相互作用するフェルミ粒子系が朝永 Luttinger 流体となると、パラメータ K は斥力相互作用で $K < 1$ 、引力相互作用で $K > 1$ となるようにパラメータを定義するのが標準的である。ここで、 v と K は繰り込まれた量であることに注意しよう。Bethe 仮説の厳密解から、繰り込まれた v と K は

$$v = \frac{\pi \sqrt{1 - \Delta^2}}{2 \cos^{-1}(\Delta)} aJ, \quad K = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(\Delta) \right)} \quad (103)$$

であることが知られている。式 (99) の v と K は、式 (103) の v と K と Δ の 1 次まで一致している。 $-1 < \Delta \leq 1$ のパラメータ領域が H_{TL} で記述される朝永 Luttinger 流体相であり、この相の中で式 (103) は有効である。 v と K はこの相の境界及び中心で

$$v = \begin{cases} 0, & \Delta = -1, \\ aJ, & \Delta = 0, \\ \pi aJ/2, & \Delta = 1, \end{cases} \quad K = \begin{cases} \infty, & \Delta = -1, \\ 1, & \Delta = 0, \\ 1/2, & \Delta = 1 \end{cases} \quad (104)$$

という値をとる。朝永 Luttinger 流体は、 $\Delta = -1$ で $v = 0$, $K = \infty$ となって破綻する ($\Delta \leq -1$ は強磁性相)。 $\Delta = 1$ のとき、 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ は繰り込み群で marginally irrelevant operator (スケーリング次元 $K^{-1} = 2$) であり、低エネルギー極限で 0 に繰り込まれるので、反強磁性ハイゼンベルグ模型は朝永 Luttinger 流体である。 $\Delta > 1$ では非線形項 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$ は低エネルギー領域で増大する relevant operator であり、 $\cos(\sqrt{16\pi}\phi) = -1$ となるように $\sqrt{16\pi}\phi = \pi \pmod{2\pi}$ にボゾン場 $\phi(x)$ がピン止めされて、エネルギーギャップが開く。ボゾン場がピン止めされたとき、式 (91) の $(-1)^{x/a} \sin(\sqrt{4\pi}\phi)$ が 0 でない期待値をもち、反強磁性イジング秩序が生じる。

朝永 Luttinger 流体相におけるスピン相関関数を、式 (102) のハミルトニアンにもとづいて計算

しよう。まず、 H_{TL} は自由ボーズ粒子系のハミルトニアンに他ならないので、

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{K}{4\pi}} \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{k}} \left(e^{-ikx} b_{-k} + e^{ikx} b_k + e^{ikx} b_{-k}^\dagger + e^{-ikx} b_k^\dagger \right), \quad (105)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K}} \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{k}} \left(e^{-ikx} b_{-k} - e^{ikx} b_k + e^{ikx} b_{-k}^\dagger - e^{-ikx} b_k^\dagger \right) \quad (106)$$

と展開して、 H_{TL} に代入すれば ($\Pi = d\theta/dx$)

$$H_{\text{TL}} = \int_0^\infty dk vk \left(b_{-k}^\dagger b_{-k} + b_k^\dagger b_k + 1 \right) \quad (107)$$

のように対角化できる。基底状態は b_k, b_{-k} の真空 $|0\rangle$ である。(実は、 H_{TL} を対角化する $b_{\pm k}$ は、自由フェルミオン系である H_{XX} をボゾン化して対角化するときの $b_{\pm k}$ とは同じでなく、それらを Bogoliubov 変換したものに相当する。)

式 (91) を用いて、 S_j^z の動的相関関数を計算してみよう。時刻 t におけるボゾン場 $\phi(x, t)$ は、式 (105) において $b_k \rightarrow b_k e^{-ivkt}$, $b_{-k} \rightarrow b_{-k} e^{-ivkt}$ (及びそれらのエルミート共役) を代入したものであることを用いて基底状態での S^z の相関関数を以下のように計算する。まず、一様成分については

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\phi(x, t)}{dx} \frac{d\phi(0, 0)}{dx} \right\rangle &= -K \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 e^{-\alpha(k_1+k_2)/2} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{4\pi} \langle 0 | (-e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} + e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1}) \\ &\quad \times (b_{-k_2}^\dagger - b_{k_2}^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \frac{K}{4\pi} \int_0^\infty dk k e^{-\alpha k} (e^{-ik(x+vt)} + e^{ik(x-vt)}) \\ &= -\frac{K}{4\pi} \left[\frac{1}{(x+vt)^2} + \frac{1}{(x-vt)^2} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

となる (計算の最後で $\alpha \rightarrow 0$ とした)。振動成分については、

$$\langle \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x, t)] \sin[\sqrt{4\pi}\phi(0, 0)] \rangle = -\frac{1}{4} \sum_{\epsilon_1=\pm 1} \sum_{\epsilon_2=\pm 1} \epsilon_1 \epsilon_2 \langle \exp[i\epsilon_1 \sqrt{4\pi}\phi(x, t)] \exp[i\epsilon_2 \sqrt{4\pi}\phi(x, t)] \rangle \quad (109)$$

とした後、指数関数の積の期待値を計算する：

$$\begin{aligned} &\langle \exp[i\epsilon_1 \sqrt{4\pi}\phi(x, t)] \exp[i\epsilon_2 \sqrt{4\pi}\phi(0, 0)] \rangle \\ &= \langle 0 | \exp \left[i\epsilon_1 \sqrt{K} \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} + e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1} + e^{ik_1(x+vt)} b_{-k_1}^\dagger + e^{-ik_1(x-vt)} b_{k_1}^\dagger \right) \right] \right. \\ &\quad \times \exp \left[i\epsilon_2 \sqrt{K} \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{-k_2} + b_{k_2} + b_{-k_2}^\dagger + b_{k_2}^\dagger \right) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \exp \left[i\epsilon_1 \sqrt{K} \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} + e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \exp \left[i\epsilon_2 \sqrt{K} \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{-k_2}^\dagger + b_{k_2}^\dagger \right) \right] | 0 \rangle \exp \left(-2K \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \right) \\ &= \exp \left[-K \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left(2 + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-ik(x+vt)} + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{ik(x-vt)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (110)$$

右辺が0でない値をとるのは積分が $k \rightarrow 0$ で収束する $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$ のときだけなので、

$$\begin{aligned} \langle \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x, t)] \sin[\sqrt{4\pi}\phi(0, 0)] \rangle &= \frac{1}{2} \exp \left[-K \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} (2 - e^{-ik(x+vt)} - e^{ik(x-vt)}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{(x+vt)(x-vt)} \right)^K \end{aligned} \quad (111)$$

となる。これらの結果をまとめると、

$$\langle S^z(x, t) S^z(0, 0) \rangle = -\frac{K}{4\pi^2} \left[\frac{a^2}{(x+vt)^2} + \frac{a^2}{(x-vt)^2} \right] + \frac{a^2}{2\pi^2 \alpha^2} (-1)^{x/a} \left(\frac{\alpha^2}{(x+vt)(x-vt)} \right)^K \quad (112)$$

が得られる。これは $K = 1$ ($\Delta = 0$) のときに XX 模型に対する式 (88) と一致している。式 (112) の K に比例する項 (2 乗で減衰する項) は $-1 < \Delta < 1$ の領域で正確な式であるが、指数 $2K$ で減衰する振動項の係数は $K \neq 1$ では (α が残ることからもわかるとおり) ボゾン化法では正確には決められない (厳密解を用いた正しい式は文献 [11] を参照)。

式 (111) の計算と同様にして、

$$\langle \exp[in\sqrt{4\pi}\phi(x)] \exp[-in\sqrt{4\pi}\phi(0)] \rangle \sim \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{2n^2 K} \quad (113)$$

となるので、演算子 $\exp(in\sqrt{4\pi}\phi)$ のスケーリング次元は $n^2 K$ であることがわかる。繰り込み群では、スケーリング次元が時空の次元 2 よりも小さい演算子を irrelevant operator、2 より大きい演算子を relevant operator とよび、それぞれ繰り込み群の変換により低エネルギー (長波長) で増大、減少する。 $K = \frac{1}{2}$ ($\Delta = 1$) のとき、 $n = 2$ の演算子 (すなわち式 (100) の非線形項) のスケーリング次元がちょうど 2 となり、marginal operator である。

次に、 S^+ と S^- の相関関数を計算しよう。Jordan-Wigner 変換にはストリング演算子 $e^{i\pi O_j}$ があらわれる。まず、 O_j をボゾン場で書くと

$$O_j = \sum_{l < j} \left(\frac{1}{2} + :f_l^\dagger f_l: \right) = \frac{1}{a} \int^x dy \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi}{dy} \right) = \frac{x}{2a} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \phi(x) + \text{const.} \quad (114)$$

後の便宜上、右辺の定数項は $i\pi/4$ ととることにする。式 (89) から $f_j^\dagger$ は

$$\begin{aligned} f_j^\dagger &= \sqrt{\frac{a}{2\pi\alpha}} \left(e^{i\pi x/2a} e^{-i\varphi_R(x)} + e^{-i\pi x/2a} e^{i\varphi_L(x)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi\alpha}} \left(e^{i\pi x/2a} e^{-i\sqrt{\pi}[\phi(x)-\theta(x)]} + e^{-i\pi x/2a} e^{i\sqrt{\pi}[\phi(x)+\theta(x)]} \right) \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi\alpha}} e^{i\sqrt{\pi}\theta(x)} \left(e^{i\pi x/2a - i\pi/4} e^{-i\sqrt{\pi}\phi(x)} + e^{-i\pi x/2a + i\pi/4} e^{i\sqrt{\pi}\phi(x)} \right) \end{aligned} \quad (115)$$

と書ける。ここで、交換関係 $[\theta(x), \phi(x)] = \frac{i}{2}$ と公式 $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$ を用いた。さて、式 (80) の定義によれば $e^{i\pi O_j} = e^{-i\pi O_j}$ であるはずだが、ボゾン化した表式 (114) ではその性質が失われている。この欠点を補うために Jordan-Wigner 変換の式 (79) において $e^{i\pi O_j} \rightarrow \frac{1}{2}(e^{i\pi O_j} + e^{-i\pi O_j})$ と書き直した上で、式 (114) と (115) を組み合わせると

$$S_j^+ = \frac{1}{2} f_j^\dagger (e^{i\pi O_j} + e^{-i\pi O_j}) = \sqrt{\frac{a}{2\pi\alpha}} e^{i\sqrt{\pi}\theta(x)} \left((-1)^{x/a} - \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \right) \quad (116)$$

が得られる。エルミート共役をとって

$$S_j^- = \sqrt{\frac{a}{2\pi\alpha}} \left((-1)^{x/a} - \sin[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \right) e^{-i\sqrt{\pi}\theta(x)} \quad (117)$$

を得る。 $e^{\pm i\sqrt{\pi}\theta}$ の相関関数は、式 (106) の展開式を用いて

$$\begin{aligned} & \langle \exp[i\sqrt{\pi}\theta(x, t)] \exp[-i\sqrt{\pi}\theta(0, 0)] \rangle \\ &= \langle 0 | \exp \left[\frac{i}{2\sqrt{K}} \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} - e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1} + e^{ik_1(x+vt)} b_{-k_1}^\dagger - e^{-ik_1(x-vt)} b_{k_1}^\dagger \right) \right] \right. \\ & \quad \times \exp \left[-\frac{i}{2\sqrt{K}} \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{-k_2} - b_{k_2} + b_{-k_2}^\dagger - b_{k_2}^\dagger \right) \right] |0 \rangle \\ &= \langle 0 | \exp \left[\frac{i}{2\sqrt{K}} \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} - e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1} \right) \right] \right. \\ & \quad \times \exp \left[-\frac{i}{2\sqrt{K}} \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{-k_2}^\dagger - b_{k_2}^\dagger \right) \right] |0 \rangle \exp \left(-\frac{1}{2K} \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \right) \\ &= \exp \left[-\frac{1}{4K} \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left(2 - e^{-ik(x+vt)} - e^{ik(x-vt)} \right) \right] = \left(\frac{\alpha^2}{(x+vt)(x-vt)} \right)^{1/4K} \end{aligned} \quad (118)$$

と計算できる。同様に、

$$\begin{aligned} & \langle \exp\{i\sqrt{\pi}[\theta(x, t) + 2\phi(x, t)]\} \exp\{-i\sqrt{\pi}[\theta(0, 0) + 2\phi(0, 0)]\} \rangle \\ &= \langle 0 | \exp \left[i \left(\sqrt{K} + \frac{1}{2\sqrt{K}} \right) \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{-ik_1(x+vt)} b_{-k_1} + e^{ik_1(x+vt)} b_{-k_1}^\dagger \right) \right] \right. \\ & \quad \times \exp \left[i \left(\sqrt{K} - \frac{1}{2\sqrt{K}} \right) \int_0^\infty dk_1 \frac{e^{-\alpha k_1/2}}{\sqrt{k_1}} \left(e^{ik_1(x-vt)} b_{k_1} + e^{-ik_1(x-vt)} b_{k_1}^\dagger \right) \right] \\ & \quad \times \exp \left[-i \left(\sqrt{K} + \frac{1}{2\sqrt{K}} \right) \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{-k_2} + b_{-k_2}^\dagger \right) \right] \\ & \quad \times \exp \left[-i \left(\sqrt{K} - \frac{1}{2\sqrt{K}} \right) \int_0^\infty dk_2 \frac{e^{-\alpha k_2/2}}{\sqrt{k_2}} \left(b_{k_2} + b_{k_2}^\dagger \right) \right] |0 \rangle \\ &= \exp \left[- \left(\sqrt{K} + \frac{1}{2\sqrt{K}} \right)^2 \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left(1 - e^{-ik(x+vt)} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\sqrt{K} - \frac{1}{2\sqrt{K}} \right)^2 \int_0^\infty dk \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left(1 - e^{ik(x-vt)} \right) \right] \\ &= \left(\frac{\alpha}{x+vt} \right)^{(\sqrt{K} + \frac{1}{2\sqrt{K}})^2} \left(\frac{\alpha}{x-vt} \right)^{(\sqrt{K} - \frac{1}{2\sqrt{K}})^2}. \end{aligned} \quad (119)$$

これらを総合して、

$$\begin{aligned} \langle S^+(x, t) S^-(0, 0) \rangle &= c_1 (-1)^{x/a} \left(\frac{a^2}{(x+vt)(x-vt)} \right)^{1/4K} \\ & \quad + c_2 \left(\frac{a^2}{x^2 - (vt)^2} \right)^{K + \frac{1}{4K}} \left(\frac{x-vt}{x+vt} + \frac{x+vt}{x-vt} \right) \end{aligned} \quad (120)$$

が得られる。一般に、係数 c_1, c_2 はボゾン化法では正しく決めることはできないが、 c_1 の厳密な表式は知られている [12, 10]。 $K = \frac{1}{2}$ のとき、上の式 (120) の関数形が式 (112) と一致することは、 $\Delta = 1$ における SU(2) 対称性のあらわれである。また、式 (112) と式 (120) の振動項が長距離で減衰するときの指数が $2K$ と $1/2K$ となっていて、互いに逆数の関係にある。 $-1 < \Delta \leq 1$ の朝永 Luttinger 流体相では $K > \frac{1}{2}$ なので、 S^x - S^y 面内のスピン相関の振動成分（波数 $k = \pi/a$ ）が最もゆっくり減衰する相関である。

動的スピン相関関数 $\langle S^\alpha(x, t) S^\alpha(0, 0) \rangle$ をフーリエ変換したものの虚部を動的構造因子 $S(q, \omega)$ とよび、非弾性中性子散乱実験によって測定される量である。ボゾン化法で計算して得られた相関関数 (112) と (120) は低エネルギー $\omega \ll J$ で漸近的に正しいが、 $q = 0$ 近傍での S^z 相関の振舞いには問題がある。特に、 $\langle S^z(x, t) S^z(0, 0) \rangle$ の一様成分をフーリエ変換すると $\omega \delta(\omega \pm vq)$ となるが、 δ 関数となるのは低エネルギー励起の分散を線形化したことによる artifact である。実際には、低エネルギー励起スペクトルは $\varepsilon = vk + k^2/2m$ のような非線形分散をもっているので、 $\delta(\omega - vq)$ は $\omega = vq + q^2/2m$ と $\omega = vq - q^2/2m$ の間に広がった関数になり、 $\omega \rightarrow vq - q^2/2m + 0$ でべき発散する。このように非線形分散効果によって朝永 Luttinger 流体理論からのずれが生じる現象が、近年盛んに研究されている [13]。

3.4 スピン Peierls 転移

XXZ 模型の朝永 Luttinger 流体相は、いくつかの摂動に対して不安定である。ここではその代表例として、格子歪みによるスピン Peierls 転移について簡単に議論する。結晶格子が歪むことによって格子間隔が長短長短のように交互になり、交換相互作用が $J[1 + (-1)^j \delta]$ のようになったとしよう ($|\delta| \ll 1$)。このときに朝永 Luttinger ハミルトニアン H_{TL} に加わる摂動項で最も重要なものは $S_j^+ S_{j+1}^- = f_j^\dagger f_{j+1}$ の振動項から生じる。式 (115) から

$$\begin{aligned} f_j^\dagger f_{j+1} &= \frac{a}{2\pi\alpha} \left(e^{i\pi x/2a} e^{-i\varphi_R(x)} + e^{-i\pi x/2a} e^{i\varphi_L(x)} \right) \left(e^{-i\pi(x+a)/2a} e^{i\varphi_R(x+a)} + e^{i\pi(x+a)/2a} e^{-i\varphi_L(x+a)} \right) \\ &= \frac{ia}{2\pi\alpha} (-1)^{x/a} \left(e^{-i\varphi_R(x)} e^{-i\varphi_L(x+a)} - e^{i\varphi_L(x)} e^{i\varphi_R(x+a)} \right) + \dots \\ &= \frac{ia}{2\pi\alpha} (-1)^{x/a} \left(e^{-i[\varphi_R(x) + \varphi_L(x+a)]} e^{-\frac{1}{2}[\varphi_R(x), \varphi_L(x+a)]} - e^{i[\varphi_L(x) + \varphi_R(x+a)]} e^{-\frac{1}{2}[\varphi_L(x), \varphi_R(x+a)]} \right) \\ &= -\frac{a}{\pi\alpha} (-1)^{x/a} \cos[\sqrt{4\pi}\phi(x)] + \dots \end{aligned} \quad (121)$$

となる。この振動項と S_j^z の振動項 (91) とは ϕ の位相が異なることに注意しよう。したがって、格子が歪んだときの有効ハミルトニアンは

$$H_{\text{SP}} = H_{\text{TL}} + \frac{a\delta}{\pi\alpha} \int dx \cos[\sqrt{4\pi}\phi(x)] \quad (122)$$

となる。ダイマー演算子 $\cos(\sqrt{4\pi}\phi)$ のスケーリング次元は K なので、この摂動に対するスケーリング方程式は

$$\frac{d\delta}{d\ell} = (2 - K)\delta \quad (123)$$

である ($d\ell = -d \log \omega$)。この微分方程式をエネルギー ω_0 から ω まで積分すると

$$\frac{\delta_\omega}{\delta_{\omega_0}} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{2-K} \quad (124)$$

を得る。ここで、 ω_0 は J のオーダーの高エネルギーカットオフ、 $\delta_{\omega_0} = \delta$ が元々の結合定数である。繰り込み群の変換を ω_0 からダイマー・ギャップ E_g まで行ったとして、式 (124) で $\omega = E_g$ において $\delta_{\omega_0} = \delta$ について解くと

$$E_g \propto \delta^{1/(2-K)} \quad (125)$$

を得る。すなわち、格子が交替歪みをもつと $\delta^{1/(2-K)}$ のべき依存性をもってギャップ E_g が生じる。ギャップが開くことによるエネルギーの得が、格子が歪むことによる弾性エネルギーの損 ($\propto \delta^2$) よりも大きければ自発的に格子は歪むことになる。これをスピン Peierls 転移という。

4 一次元電子系

4.1 Hubbard 模型

一次元の強相関電子系の例として、Hubbard 模型を考えよう。これは、最近接格子点間を電子がホッピング運動するとき、同一格子点上に $\uparrow$ スピン電子と $\downarrow$ スピン電子が同時にいるときのみ電子間に相互作用 U がはたらくとした模型である。ハミルトニアンは

$$H = \sum_j \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[-t \left(c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \right) - \mu c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \right] + U \sum_j (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} - n)(c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} - n) \quad (126)$$

で与えられる。 $t > 0$ とする。 μ は化学ポテンシャル、 n はスピン当りの電子密度 ($n = \langle c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} \rangle = \langle c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} \rangle$) である。Hubbard 模型はスピン空間の $SU(2)$ 回転対称性で不変である。相互作用 U は斥力 ($U > 0$) の場合を考えることが多いが、 $U < 0$ の引力 Hubbard 模型も超伝導の模型として重要である。以下では、ボゾン化法を用いて Hubbard 模型の物性を議論しよう。

4.2 スピン自由度を含めたボゾン化

まず $\uparrow$ スピンの電子と $\downarrow$ スピンの電子を独立にボゾン化する。 H で $U = 0$ とした一体ハミルトニアンを対角化すると、エネルギー $E(k) = -2t \cos(ka) - \mu$ のスピン縮退したバンドが得られる (a は格子間隔)。相互作用の強さ $|U|$ が t に比べて小さいときを考えることにすると、 $k = \pm k_F$ 近傍の低エネルギー励起のみが重要である。 $E(k) = 0$ となるフェルミ点 $k = \pm k_F$ 付近でエネルギー分散を線形化して、 $k \approx k_F$ で $E(k) = v_F(k - k_F)$ 、 $k \approx -k_F$ で $E(k) = -v_F(k + k_F)$ と近似する ($v_F = 2ta \sin(k_F a)$)。さらに、 $k \approx +k_F$ でスピン σ の電子場の演算子を $\psi_{R,\sigma}(x)$ 、 $k \approx -k_F$ でスピン σ の電子場の演算子を $\psi_{L,\sigma}(x)$ として、

$$c_{j,\sigma} = \sqrt{a} e^{ik_F x} \psi_{R,\sigma}(x) + \sqrt{a} e^{-ik_F x} \psi_{L,\sigma}(x) \quad (127)$$

と書く。ここで $x = ja$ である。以上の近似のもとで、一体ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_0 &= iv_F \int dx \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\psi_{L,\sigma}(x) \frac{d}{dx} \psi_{L,\sigma}(x) - \psi_{R,\sigma}(x) \frac{d}{dx} \psi_{R,\sigma}(x) \right] \\ &= \frac{v_F}{4\pi} \int dx \sum_{\sigma} \left[\left(\frac{d\varphi_{L,\sigma}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_{R,\sigma}}{dx} \right)^2 \right] \\ &= \frac{v_F}{2} \int dx \sum_{\sigma} \left[\left(\frac{d\phi_{\sigma}}{dx} \right)^2 + \Pi_{\sigma}^2 \right] \end{aligned} \quad (128)$$

となる。ここで、spinless fermion のボゾン化にならって、交換関係

$$[\varphi_{R,\sigma}(x), \varphi_{R,\sigma'}(y)] = i\pi\delta_{\sigma,\sigma'}\text{sgn}(x-y), \quad [\varphi_{L,\sigma}(x), \varphi_{L,\sigma'}(y)] = -i\pi\delta_{\sigma,\sigma'}\text{sgn}(x-y), \quad (129)$$

をみたすボゾン場 $\varphi_{R/L,\sigma}$ を導入し、さらに

$$\phi_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}[\varphi_{L,\sigma}(x) + \varphi_{R,\sigma}(x)], \quad \theta_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}[\varphi_{L,\sigma}(x) - \varphi_{R,\sigma}(x)], \quad \Pi_{\sigma}(x) = \frac{d\theta_{\sigma}(x)}{dx} \quad (130)$$

を定義した。スピン σ の電子場の演算子は

$$\psi_{R,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\varphi_{R,\sigma}(x)}, \quad \psi_{L,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-i\varphi_{L,\sigma}(x)} \quad (131)$$

である。さらに、電荷 (c) とスピン (s) の自由度に対応するボゾン場を

$$\phi_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{\uparrow}(x) + \phi_{\downarrow}(x)], \quad \theta_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\theta_{\uparrow}(x) + \theta_{\downarrow}(x)], \quad \Pi_c(x) = \frac{d\theta_c(x)}{dx}, \quad (132)$$

$$\phi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{\uparrow}(x) - \phi_{\downarrow}(x)], \quad \theta_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\theta_{\uparrow}(x) - \theta_{\downarrow}(x)], \quad \Pi_s(x) = \frac{d\theta_s(x)}{dx} \quad (133)$$

と定義して

$$H_0 = \frac{v_F}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi_c}{dx} \right)^2 + \Pi_c^2 + \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right)^2 + \Pi_s^2 \right] \quad (134)$$

と書き直す。

次に、相互作用項 ($\propto U$) をボゾン化する。XXZ 模型の S_j^z をボゾン化したときと同様にして、

$$\begin{aligned} c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j,\sigma} - n &= a : \psi_{R,\sigma}^{\dagger}(x) \psi_{R,\sigma}(x) : + a : \psi_{L,\sigma}^{\dagger}(x) \psi_{L,\sigma}(x) : \\ &\quad + a e^{-2ik_F x} \psi_{R,\sigma}^{\dagger}(x) \psi_{L,\sigma}(x) + a e^{2ik_F x} \psi_{L,\sigma}^{\dagger}(x) \psi_{R,\sigma}(x) \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi_{\sigma}}{dx} + \frac{a}{\pi\alpha} \sin[2k_F x + \sqrt{4\pi}\phi_{\sigma}(x)]. \end{aligned} \quad (135)$$

したがって、ボゾン表示の相互作用項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} (c_{j,\uparrow}^{\dagger} c_{j,\uparrow} - n)(c_{j,\downarrow}^{\dagger} c_{j,\downarrow} - n) &= \frac{1}{\pi} \frac{d\phi_{\uparrow}}{dx} \frac{d\phi_{\downarrow}}{dx} + \frac{1}{\pi^2 \alpha^2} \sin[2k_F x + \sqrt{4\pi}\phi_{\uparrow}(x)] \sin[2k_F x + \sqrt{4\pi}\phi_{\downarrow}(x)] \\ &\quad + \text{cross terms} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\phi_c}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos[4k_F x + \sqrt{8\pi}\phi_c(x)] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2 \alpha^2} \cos[\sqrt{8\pi}\phi_s(x)] + \text{cross terms} \end{aligned} \quad (136)$$

となる。ここで、波数 $2k_F$ で振動する cross terms は空間積分によって消えるので無視できる。一方、 $4k_F$ で振動する項は、バンドが半分つまっている (half-filled band)、平均として電子が各格子点に 1 個ずついるときには $4k_F a = 2\pi$ となるので無視できない。

ボゾン化したハミルトニアンは電荷とスピンの自由度で分離しており、 $H = H_c + H_s$ と書ける。電荷自由度に対するハミルトニアンは

$$H_c = \frac{v_c}{2} \int dx \left[\frac{1}{K_c} \left(\frac{d\phi_c}{dx} \right)^2 + K_c \Pi_c^2 - g_c \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi} \phi_c) \right], \quad (137)$$

スピン自由度に対するハミルトニアンは

$$H_s = \frac{v_s}{2} \int dx \left[\frac{1}{K_s} \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right)^2 + K_s \Pi_s^2 + g_s \cos(\sqrt{8\pi} \phi_s) \right] \quad (138)$$

となる。ここで、

$$v_c = v_F \sqrt{1 + \frac{Ua}{\pi v_F}}, \quad v_s = v_F \sqrt{1 - \frac{Ua}{\pi v_F}}, \quad K_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Ua}{\pi v_F}}}, \quad K_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Ua}{\pi v_F}}} \quad (139)$$

と定義した。また、 $g_c v_c = g_s v_s = Ua/(\pi^2 \alpha^2)$ 。これらは $Ua/v_F \ll 1$ のときに正しい式である。電荷ハミルトニアン H_c の $-g_c \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi} \phi_c)$ の項は、電子のウムクラップ散乱 $e^{-4ik_F x} \psi_R^\dagger \psi_R^\dagger \psi_L \psi_L + \text{H.c.}$ から生じたことが式 (135) からわかる。一方、スピンハミルトニアン H_s の $g_s \cos(\sqrt{8\pi} \phi_s)$ の項は、反平行スピン電子の後方散乱 $\psi_{R,\uparrow}^\dagger \psi_{L,\uparrow}^\dagger \psi_{L,\downarrow} \psi_{R,\downarrow} + \text{H.c.}$ から生じた。

電荷とスピンの自由度が分離して別々のハミルトニアンに従っていることを、スピン電荷分離 (spin charge separation) という。3次元空間のフェルミ液体では低エネルギー励起がスピンと電荷を持ちフェルミ統計に従う準粒子であるのに対し、1次元空間の電子系ではスピンと電荷が分離し、スピン密度ゆらぎと電荷密度ゆらぎのボゾンが低エネルギー励起を担っている。スピン自由度と電荷自由度についてもう少し詳しく議論する。

スピン・ハミルトニアン H_s は、XXZ 模型のボゾン化で導出した式 (100) の sine-Gordon 模型と同じ形をしており、

$$\phi_s \leftrightarrow \phi, \quad K_s \leftrightarrow 2K, \quad g_s \leftrightarrow g \quad (140)$$

の対応関係がある。Hubbard 模型はスピン自由度に関して SU(2) 対称性をもっているので、XXZ 模型で $\Delta = 1$ としたときの sine-Gordon 模型と対応する。Half-filled でかつ $U \gg t$ の場合に t/U 展開によって Hubbard 模型から反強磁性ハイゼンベルグ模型が導かれるが、ここではボゾン化法によって $0 < U \ll t$ の場合に、一般の電子密度においてもスピン励起の低エネルギー有効理論が反強磁性ハイゼンベルグ模型と同じく sine-Gordon 模型になっていることを示したのである。さて、sine-Gordon 模型に対する繰り込み群の方程式 (101) を H_s に対してあらためて書くと、

$$\frac{dG}{d\ell} = 2(1 - K_s)G, \quad \frac{dK_s}{d\ell} = -cG^2 \quad (141)$$

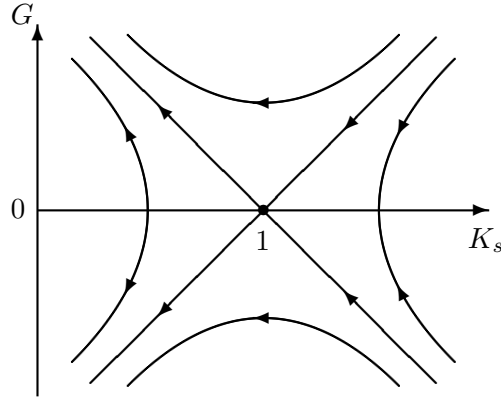


図 2: 繰り込み群の flow diagram。エネルギースケールを下げていくと K_s や G は矢印に沿って繰り込まれていく。スピン SU(2) 対称性の下では、繰り込み群の流れは $G = K_s - 1 = 0$ を通る線 $G = \sqrt{2/c}(K_s - 1)$ に沿う。 $U > 0$ の場合の繰り込み群の固定点は $G = K_s - 1 = 0$ である。

となる。ここで、 $G = g_s a^2$ は無次元パラメータ、 c は正の定数である。微分方程式 (141) を積分すると、 d を積分定数として

$$G^2 = \frac{2}{c}(K_s - 1)^2 + d \quad (142)$$

が得られるので、エネルギースケールを下げていく (l を大きくする) ときの G と K_s の変化の軌跡は図 2 のようになる。特に、SU(2) 対称性があるときは、反強磁性ハイゼンベルグ模型の繰り込み群の固定点が $K = \frac{1}{2}$, $g = 0$ (図 1) だったことを思い出すと、 $G = K_s - 1 = 0$ を通る $d = 0$ の積分曲線が解となる。すなわち、

$$G = \sqrt{\frac{2}{c}}(K_s - 1) \quad (143)$$

であるが、これを式 (141) に代入した式

$$\frac{dG}{dl} = -\sqrt{2c}G^2 \quad (144)$$

を $l = 0$ から $l = \log(\omega_0/\omega)$ まで積分すると、繰り込まれた結合定数 G のエネルギー ω 依存性が

$$G(\omega) = \frac{G(\omega_0)}{1 + \sqrt{2c}G(\omega_0) \log(\omega_0/\omega)} \quad (145)$$

と求められる。 $g_s \cos(\sqrt{8\pi}\phi_s)$ は marginally irrelevant operator なので、 $\omega \rightarrow 0$ のときに $1/\log(1/\omega)$ のように $G \rightarrow 0$ となる。したがって、 $U > 0$ の斥力 Hubbard 模型では、低エネルギー極限で $K_s = 1$ かつ $g_s = 0$ の固定点に繰り込まれる。これは XXZ 模型で $\Delta = 1$ のときに、低エネルギー極限で $K = \frac{1}{2}$ かつ $g = 0$ としたことに対応している。よって、低エネルギー極限では H_s において $K_s = 1$, $g_s = 0$ において、スピン相関関数などを計算できる⁷。

一方、 $U < 0$ の引力 Hubbard 模型ではスピン励起にギャップが開く。これは繰り込み群の解析からは以下のように説明できる。式 (144) によれば、 $G (< 0)$ は $l = \log(\omega_0/\omega)$ の増大とともに負に

⁷より正確には、 $1/\text{対数}$ でゆっくり 0 になる $g_s \cos(\sqrt{8\pi}\phi_s)$ の影響により、相関関数には対数補正が生じる [7]。

増大し、ある ω で式 (145) の分母が 0 になって発散する⁸。このときの ω の値 ω_g が、スピングャップに対応するエネルギースケール

$$\omega_g = \omega_0 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2c}G(\omega_0)}\right) = \omega_0 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2c}g_s a^2}\right) \propto t \exp\left(-\frac{c't}{|U|}\right) \quad (146)$$

である (c' は定数)。 U について非摂動的であり、BCS 理論の超伝導ギャップと同じ関数形である (これは、marginally relevant operator によるギャップ生成に共通する)。このスピングャップは、on-site 引力によって $\uparrow$ スピン電子と $\downarrow$ スピン電子が singlet をつくったことに相当する。

次に、電荷の自由度について議論しよう。まず、電子密度が 1 電子/格子点 (half filling) の場合 ($4k_F = 2\pi/a$ のとき) には、 $g_c \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi}\phi_c) = g_c \cos(\sqrt{8\pi}\phi_c)$ とするのが適当である。なぜなら、Hubbard 模型はもともと格子上で定義されており、 $x = ja$ のとき $4k_F x = 2\pi \times \text{整数}$ となるからである。このとき、 H_c は H_s において $U \rightarrow -U$ としたものに他ならない。Half filling の Hubbard 模型には、電荷自由度についても SU(2) 対称性がある (変換 $c_{j,\downarrow} \rightarrow c_{j,\downarrow}^\dagger$ によって、 $(S_j^+, S_j^-, S_j^z) \rightarrow (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}^\dagger, c_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow}, \frac{1}{2}(c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} - c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow}))$ のようにスピン演算子が超伝導と電荷密度演算子に変換されることからわかるだろう)。したがって、 H_s について得られた結果で U の符号を逆にした結果が H_c に対して成り立つ。繰り込み群の流れ図は、図 2 で $K_s \rightarrow K_c$, $G = -g_c a^2$ としたものになる。従って、 $U > 0$ のときには電荷励起にギャップが開き、モット絶縁体となる。電荷励起ギャップ (Mott gap) は式 (146) で与えられる ($0 < U \ll t$)。一方、 $U < 0$ のとき、 $-g_c \cos(\sqrt{8\pi}\phi_c)$ は marginally irrelevant operator なので低エネルギー極限で式 (145) に従って 0 に繰り込まれ、gapless の電荷密度励起をもった朝永 Luttinger 流体が得られる。SU(2) 対称性により、電荷密度相関と s 波超伝導相関が縮退している。

電子密度が 1 電子/格子点 (half filling) からずれているとき、すなわち $4k_F \neq 2\pi/a$ の場合には、 H_c に含まれる $g_c \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi}\phi_c)$ の項は振動関数なので、その x 積分の H_c に対する寄与は無視できる (繰り込み群変換によって急速に 0 に繰り込まれる)。ただし、 $g_c \rightarrow 0$ となる繰り込みの過程で、朝永 Luttinger パラメータ K_c や速度 v_c も繰り込まれて式 (139) の値から少しずれる (U について高次の効果)。いずれにせよ、 $4k_F \neq 2\pi/a$ のとき、 $g_c \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi}\phi_c)$ は irrelevant operator であり、低エネルギー有効ハミルトニアンは H_c で $g_c = 0$ とした朝永 Luttinger ハミルトニアンになる。朝永 Luttinger パラメータ K_c は、 $U > 0$ のときに $K_c < 1$ 、 $U < 0$ のときに $K_c > 1$ である (half filling でなければ電荷自由度に SU(2) 対称性はなく、 $U \neq 0$ ならば $K_c \neq 1$)。

以上をまとめると、 $U > 0$ の斥力 Hubbard 模型は、half filling ($4k_F = 2\pi/a$) のときはモット絶縁体であり、電荷ギャップ以下のエネルギースケールでは反強磁性ハイゼンベルグ模型と等価になる。half filling 以外では、電荷とスピンの自由度が独立に朝永 Luttinger 流体となっていて、スピン自由度は反強磁性ハイゼンベルグ模型と同じである。 $U < 0$ の引力 Hubbard 模型では、スピン自由度にはギャップが開いており、電荷自由度のみ朝永 Luttinger 流体となっている。基底状態は s 波超伝導の準長距離秩序をもっている。

低エネルギー極限で $g_{c,s} \rightarrow 0$ となった朝永 Luttinger 流体では、電荷やスピンの密度相関関数

⁸式 (144) は $|G| \ll 1$ として摂動論で計算したスケーリング方程式なので、本当は $|G|$ が大きいところでは使えない。

や超伝導相関関数などの相関関数を、XXZ 模型に対するスピン相関関数の計算と同様にして、計算できる。

5 おわりに

この講義ノートで触れられなかったボゾン化法の他の応用例やより進んだ内容については、参考文献などを参照されたい⁹。

夏の学校ではスタッフの皆さん、特に講義世話人の長尾一馬さんにとってもお世話になりました。これらの方々と講義に出席してくださった学生さんたちに感謝します。

参考文献

- [1] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [2] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963); D. C. Mattis and E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).
- [3] A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B **9**, 2911 (1974); Phys. Rev. B **12**, 3908 (1975).
- [4] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
- [5] 川上則雄, 梁成吉「共形場理論と1次元量子系」(岩波書店, 1997)
- [6] 永長直人「物性論における場の量子論」(岩波書店, 1995) ; 「電子相関における場の量子論」(岩波書店, 1998)
- [7] T. Giamarchi, “Quantum Physics in One Dimension” (Oxford Univ. Press, 2004).
- [8] A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan, and A. M. Tsvelik, “Bosonization and Strongly Correlated Systems” (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [9] J. von Delft and H. Schoeller, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 225 (1998).
- [10] T. Hikihara and A. Furusaki, Phys. Rev. B **58**, R583 (1998).
- [11] S. Lukyanov, Phys. Rev. B **59**, 11163 (1999).
- [12] S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **493**, 571 (1997).
- [13] A. Imambekov, T. L. Schmidt, and L. I. Glazman, Rev. Mod. Phys. **84**, 1253 (2012).
- [14] G. D. Mahan, “Many-Particle Physics” Section 9.3.
- [15] K. D. Schotte and U. Schotte, Phys. Rev. **182**, 479 (1969).

⁹講義で簡単に触れた直交破局と Fermi 端異常については、Mahan の教科書 [14] や原論文 [15] が参考になる。