

Navier Stokes 方程式の円柱外部問題の
数値計算に関する一方法 (特に大 Reynolds 数)

栗大 生研 金子 幸 臣

この問題は、主な近づき方が2つあって、1つは非定常流の時間 $\rightarrow\infty$ での極限を外挿する方法、もう一つは定常の方程式を直接考えるものである。空間座標の適当なものを選んで、その整数の点を格子点とみて、その間隔が、例えば円柱の半径と比較して、十分小さいとき、取扱う函数の隔うかさから、それらの格子点上での値により、十分正確に代表されているものとして、差分方程式を導びき、計算というのは実はその差分方程式の解を求めることになる。これまで、Reynolds 数が大きくなると、急速に計算量が増加して、例えば直径に対する Reynolds 数 ~ 100 位になると、労多くして、むくいがそれに見合わない感があった。しかし、それらの方法では、主流(一様流)が大きいために、幅度 ω に関する方程式の(流れの函数 ψ を固定、境界値も固定)差分方程式も極端な under relaxation でないと numerical instability と

意をこすものであつた。これは別に非線型性によるものではなく、実際、適当な格子をとると、over relaxationすら許されることか分る。本稿では、そのような格子の例をあげることが目的としている。勿論、非線型性に関する安定性はやってないので、完全なものではありません。

1) 格子のとり方として、次のようなものを考える。

- i) 各格子点の重要性はなるべく同等になること。
- ii) 計算が簡単になるように、直交(曲線)格子とする。
- iii) 境界(円柱表面)は1つの座標曲線上に乗ること。
- iv) 遠方で一方の座標の座標曲線は流線とほぼ一致する。

i), ii), iii) は直接、計算の効率を上げるためであるが、iv) は stability に関して、iteration の回数そのものを、節約するためである。

2)

デカルト座標: (x, y)

対応する速度: (u, v)

領域の形: $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$

対応条件: $y=0$ で $v=0$

境界条件

$$r=1 \quad z \quad (u, v) = 0$$

$$r \rightarrow \infty \quad z \quad (u, v) \rightarrow (1, 0)$$

運動方程式

$$\begin{cases} \Delta \psi = -\omega \\ \Delta \omega = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} \end{cases}$$

但し ψ : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ は流れの函数

ω : $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ は渦度

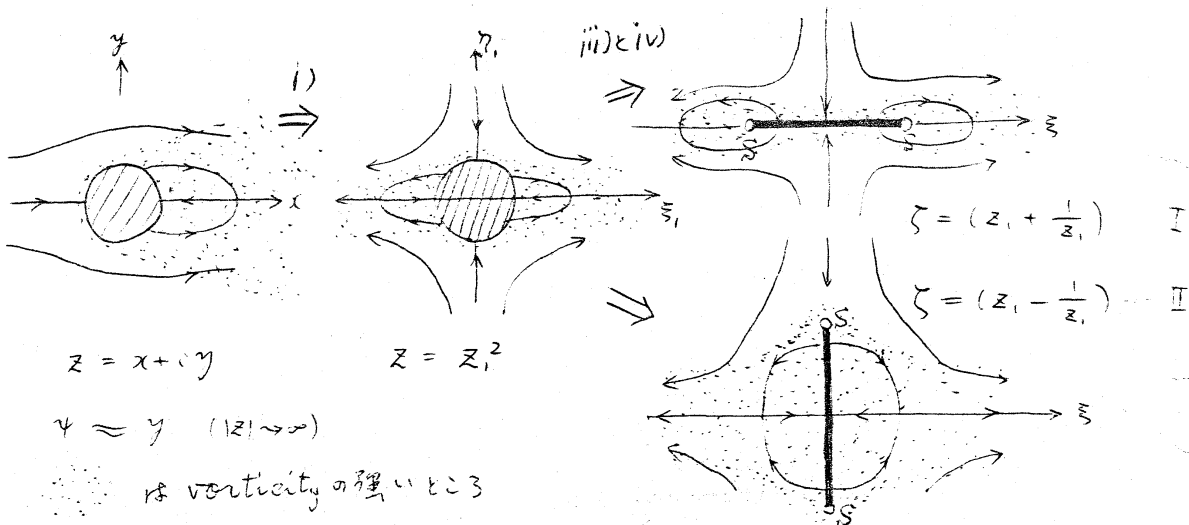
ii) の性質を考えると, 等角写像 $z = z(\zeta)$ で $z = x + iy$ から $\zeta = \xi + i\eta$ に移ると 微分方程式は

$$\Delta \psi = - \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega \quad \text{但し } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\Delta \omega = - \frac{1}{\nu} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\xi, \eta)}$$

i) に關しては $r \rightarrow \infty$ での漸近形 (今井先生の論文)

を考慮し, iii): iv) をもつものとしては



などがよさそうである。

座標変換 I での singular point S は ω の値が II でのそれにくらべて小さい (R_c が大きいとき) ので, その近くでの近似が悪くても重大ではない。その代り, 興味のある領域が多少局在してしまうきらいがある。II では S の近くでの ω は他の点での ω (それは大部分下流にある) の影響が少ないので, 適当な処理をすれば良い精度が得られるであろう。

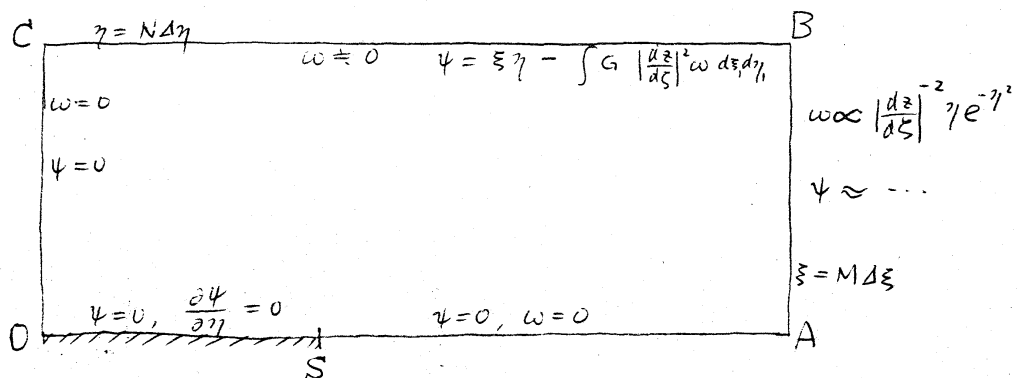
差分方程式も普通に使われるもの:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\psi(\xi + \Delta \xi) - \psi(\xi - \Delta \xi)}{2\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \Rightarrow \frac{\psi(\xi + \Delta \xi) - 2\psi(\xi) + \psi(\xi - \Delta \xi)}{\Delta \xi^2}$$

などの置き換えを微分方程式に行なったものを使う。

relaxation を行う領域は $0 \leq \eta \leq N \Delta \eta$, $0 \leq \xi \leq M \Delta \xi$ の $(N+1) \times (M+1)$ の格子点の上である。



境界条件 $\overline{OC}$ 上と $\overline{OS A}$ 上は問題ない。 $\overline{CB}$ 上で $\omega \neq 0$ 十分よい近似を与えるであろう。

$$\psi = \xi\gamma - \int G \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega d\xi d\gamma_0 \quad \text{の} \quad G \propto \log \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \right|$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \xi_0 + i\gamma_0, \quad \zeta_3 = -\xi_0 - i\gamma_0 \\ \zeta_2 &= \xi_0 - i\gamma_0, \quad \zeta_4 = -\xi_0 + i\gamma_0 \end{aligned} \quad = \log \frac{|\zeta^2 - \zeta_1^2|}{|\zeta^2 - \zeta_2^2|}$$

は $\xi \geq 0, \gamma \geq 0$, に対する Δ (Laplacian) の Green 函数
ここに現われた積分は $\overline{CB}$ 上で $\omega \neq 0$ であるので数値積分
も容易である。

$\overline{AB}$ 上では G が singular であるので、あまり積分は易しくない。従って次の方法にする。しかし、あくまでも使え
上であって、精密な計算には向いていない。

まず、幸い、 $\omega \approx \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \gamma e^{-\gamma^2}$ であるので、

$$\Delta \psi = - \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega \approx \gamma e^{-\gamma^2} \text{ indep of } \xi$$

$$\Delta(\psi - \text{erf}(\gamma)) \approx 0$$

$$\text{即ち} \quad \psi \approx - \int_0^\gamma \int_0^\gamma \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega d\gamma d\gamma + \text{harmonic f.}$$

$$\begin{aligned} \text{境界条件から} \quad & \approx \xi\gamma - C \operatorname{Im} \log \zeta - \int_0^\gamma \int_0^\gamma \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega d\gamma d\gamma + \dots \\ & \approx (\xi - C)\gamma - \int_0^\gamma \int_0^\gamma \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \omega d\gamma d\gamma + \dots \end{aligned}$$

C は $\xi = 0$ 上で $\psi = 0$ になるように ξ に定数

これは $\xi \gg \gamma$ を考えると、 $\gamma = N\Delta\gamma$ 上で積分を与えら

れた ψ に連続なつながるような $\psi = (\xi - C)\gamma - \int_0^\gamma \int_0^\gamma \dots d\gamma d\gamma$

をそれは大体正しい。 ω については、 ψ が与えられたとき、微分方程式は、流れの中心拡散をまわし、 $\overline{AB}$ 上での ω の値は上流に向っての拡散の形で他に影響するだけで、単に

あまり大きくさえならなければ、他の点での ω に大きな影響を与えない。一方差分方程式の方は格子間隔が大きいので、いくら流れが速くても、十数格子までは無視できるような影響が逆のほうに行く。従って少し注意が必要だが、実はそれは振動性のものであり、^(註)もし差分方程式の解が $\overline{CB}$ 上で ψ 方向に滑らかであれば、微分方程式のよい近似になる、というはずで、従って上流に逆のほうの悪い影響は小さいものとなる、という。即ち滑らかな解を与えようという境界条件を付す。

$\xi \rightarrow \infty$ の漸近形の形から

$$|\zeta'| \omega(\xi - 4\xi) = |\zeta'| \omega(\xi)$$

を用いるのが良さそうである。

以上、安定性を特に良くする事なしに、大体の近似的境界条件の計算手順をきめた。これを使って、計算が安定に進めば、より精密な境界条件の下に計算を進める可能性があるのであるというわけである。勿論、それが保障されたことにはなるのではない。^(註)その点での格子間隔と速度の Reynolds 数 $\gg 2$

安定な relaxation の順序

ψ : fixed とする。

安定性の本質的なのは、与える一様流である。考えて、

$$\psi \sim \xi \eta = (k \Delta \xi)(l \Delta \eta), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

の場合を調べてみる。

$$\frac{1}{\nu} = \frac{Re}{2} \quad \nu: \text{動粘性率}, \quad Re: \text{Reynolds 数} \quad \text{とある。}$$

差分方程式は

$$\frac{\omega - 2\omega + \omega}{(\Delta \xi)^2} - \frac{R}{2} \frac{2\Delta \eta k \Delta \xi}{2\Delta \eta} \frac{(\omega_0 - \omega)}{2\Delta \xi} + \frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{(\Delta \eta)^2} + \frac{R}{2} \frac{2\Delta \xi l \Delta \eta}{2\Delta \xi} \frac{\omega - \dot{\omega}}{2\Delta \eta} = 0$$

即ち

$$\frac{\omega - 2\omega + \omega}{A^2} - k(\omega_0 - \omega) + \frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{B^2} + l(\dot{\omega} - \omega) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{と } \xi \text{ 方向に } \omega(\xi + \Delta \xi, \eta) &= \omega_0 & \omega(\xi, \eta + \Delta \eta) &= \dot{\omega} \\ \omega(\xi - \Delta \xi, \eta) &= \omega_0 & \omega(\xi, \eta - \Delta \eta) &= \dot{\omega} \end{aligned}$$

は実際の格子点の位置関係に合わせた記号である。また

$$A^2 = \frac{R(\Delta \xi)^2}{4}, \quad B^2 = \frac{R(\Delta \eta)^2}{4} \quad \text{である。}$$

relaxation は一定の η について

$$\frac{\omega - 2\omega^* + \omega}{A^2} - k(\omega^* - \omega) + \frac{\dot{\omega} - 2\omega^* + \omega}{B^2} + l(\dot{\omega} - \omega) = 0$$

を解く。次に over relaxation const. α を使って

$$\text{新しい } \omega = \omega_{old} + \alpha(\omega^* - \omega_{old}) \quad \text{とする。}$$

次に $\eta \rightarrow \eta + \Delta \eta$ について同じことを繰り返す。

このとき、その収束率を λ とすると、一回終了と

$$\dot{\omega} \rightarrow \dot{\omega}$$

$$\omega \rightarrow \lambda \omega$$

$$\omega \rightarrow \omega^* = \left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \omega \equiv c\sqrt{\lambda} \omega$$

$$\dot{\omega}, \omega \rightarrow \dot{\omega}^* = (\quad) (\dot{\omega}) \equiv c\sqrt{\lambda} (\dot{\omega}) \dots$$

$$(14) \quad c = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{であるから}$$

$$c\sqrt{\lambda} \left[\frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{A^2} - k(\dot{\omega} - \omega) \right] + \frac{\dot{\omega} - 2c\sqrt{\lambda}\omega + \lambda\omega}{B^2} + \ell(\dot{\omega} - \omega) = 0$$

$$\lambda^{-\frac{\ell}{2}} \omega \text{ であるから } \omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \omega$$

$$c \left[\frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{A^2} - k(\dot{\omega} - \omega) \right] + \frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{B^2} + \ell(\dot{\omega} - \omega) + \frac{2(1-c)}{B^2} \omega = 0$$

即ち変数分離してあり

固有値問題 (一次元の)

$$(1) \quad k=0, \omega=0, \quad k=\bar{k}: \omega=0$$

$$\frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{A^2} - k(\dot{\omega} - \omega) - K\omega = 0$$

$$(2) \quad \ell=0: \omega=0, \quad \ell=\bar{\ell}: \omega=0$$

$$\frac{\dot{\omega} - 2\omega + \omega}{B^2} + \ell(\dot{\omega} - \omega) - \Lambda\omega = 0$$

$$\text{したがって } \lambda \text{ は } \begin{cases} c = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ c(K - \frac{2}{B^2}) + (\Lambda + \frac{2}{B^2}) = 0 \end{cases}$$

で与えられる。

Λ について考えよう。差分が微分より近似している：

すると、 $\bar{\ell} \ll \frac{1}{B_2}$ である。これを g と書く。方程式は

$$(g+l)\ddot{\omega} + (g-l)\dot{\omega} = (\Lambda+2g)\omega$$

これを初期条件 $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$ で解く。解を

$\omega(l, \Lambda+2g)$ とする。これは $(\Lambda+2g)$ の $(l-1)$ 次の実係数多項式

である。 $\omega(l, -x) = (-1)^{l-1} \omega(l, x)$ の対称性を持つ

$$\omega(l, x) = 0, \quad l < g \text{ の根はすべて実数。}$$

$$\text{かつ } |x| < x_0 < 2g-4$$

証 ① $\omega(l+1, 2g) > 0$

$$\therefore (g+l)(\omega(l+1) - \omega(l)) = (g-l)(\omega(l) - \omega(l-1))$$

$$\frac{\omega(l+1) - \omega(l)}{\omega(l) - \omega(l-1)} = \frac{g-l}{g+l} > 0$$

$$\omega(1) - \omega(0) = 1 - 0 > 0$$

$$\Rightarrow \omega(l+1) - \omega(l) > 0$$

$$\omega(l+1) > \omega(l) > \dots > \omega(0) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \omega(0, x) = 0$$

$$1) \quad \omega(1, x) = 1$$

$$2) \quad \text{sign } \omega(2, \pm x_0) = \pm 1$$

よって実根 $|x_{21}| < x_0$ があるか $\omega(2, x)$ は $-x^2$

あるからこれ以外にない。対称性から $x_{21} = 0$

$$\text{よって } \left. \begin{array}{l} \omega(2, x) < 0 \quad -x_0 < x < x_{21} \\ \omega(2, x) > 0 \quad x_{21} < x < x_0 \end{array} \right\} (1.2a)$$

$$\exists \text{ 正 } (1.1) \text{ から } \omega(1, x_{21}) > 0 \quad (1.2a)$$

$$3) \operatorname{sign} \omega(3, \pm x_0) = 1$$

$$\begin{aligned} \omega(3, x_{21}) &= \frac{x_{21} \omega(2, x_{21}) - (g-l) \omega(1, x_{21})}{(g+l)} \\ &= -\left(\frac{g-l}{g+l}\right) \omega(1, x_{21}) < 0 \quad (1.2b) \end{aligned}$$

よって $\omega(3, x)$ は $-x_0 < x_{32} < x_{21} < x_{31} < x_0$ の 2 根:

x_{31}, x_{32} を持つ。 $\omega(3, x)$ は 2 次式だから他の根はない。

$$\text{対称性から } x_{32} = -x_{31} < 0$$

$$\text{よって } \omega(3, x) > 0 \quad \left. \begin{array}{l} -x_0 < x < x_{32} \text{ 或 } x_{31} < x < x_0 \\ < 0 \quad \quad \quad x_{32} < x < x_{31} \end{array} \right\} (1.3a)$$

$$\text{また } (1.2a) \text{ から } \left. \begin{array}{l} \omega(2, x_{32}) < 0 \\ \omega(2, x_{31}) > 0 \end{array} \right\} (1.3b)$$

以下 $\frac{g-l}{g+l} > 0$ のかぎり同様のことが成立して、証明が終る。

$\max x = x_0$ をもっと詳しく評価するために、

$$g(\dot{\omega} - 2\omega + \omega) + l(\dot{\omega} - \omega) = \Lambda \omega$$

これは $-\Lambda = \min$ 近くでは緩やかに変化する $\omega(l)$ を与える。

従って、微分方程式で十分近似される。 $x = \frac{l}{\sqrt{g}}$ とすると、

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} + 2x \frac{d\omega}{dx} - \Lambda \omega = 0, \quad \begin{array}{l} \omega(0) = 0 \\ \omega\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right) = 0 \end{array}$$

この最小固有値は > 4 であることから $\Lambda_{\max} = -4$

$$\min \Lambda = \min(x_0) - 2g = -\max x_0 - 2g = 4 - 4g$$

K について、

$$\left(K + \frac{2}{A^2}\right)^2 \text{ は すべて 実数 } \leq \left(\frac{2}{A^2} - 2\right)^2$$

証明の $\omega_0(x) \equiv 0, \quad \omega_1(x) \equiv 1,$

方程式は $\left(\frac{1}{A^2} = p, \quad K + \frac{2}{A^2} = x \text{ とおいた}\right)$

$$(p-k)\omega_{k+1}(x) - x\omega_k(x) + (p+k)\omega_{k-1}(x) = 0$$

k について 1つおきに消去すると

$$(p-k)(p-k-1)\omega_{k+2}(x) - (x^2 + 2k^2 - 2p^2 - 2p)\omega_k(x) + (p+k)(p+k-1)\omega_{k-2}(x) = 0$$

$$2k < p < 2N+1 \text{ の形 のとき } \Omega_k(x^2) \equiv \frac{2p-2}{x} \omega_{2k+2}(x) \quad (\text{I})$$

$$2N-1 < p < 2N \text{ の } \Omega_k(x^2) \equiv \omega_{2k+1}(x) \quad (\text{II})$$

(p は整数 と仮定する) $\Omega_k(M)$ は M の k 次の実係数多項式となり, その k 次の係数は正 (そのようにするため (I), (II) にわけた。) $\omega_k(2(p-1)) = k$ であるから

$$\Omega_k((2p-2)^2) = \begin{cases} 2k+2 & (\text{I}) \\ 2k+1 & (\text{II}) \end{cases} > 0$$

また

$$\text{sign } \Omega_k(-\infty) = (-1)^k$$

漸化式から Ω_k の根 $M_{k,j}$ では $(\Omega_k(M_{k,j}) = 0)$

$$\text{sign } \Omega_{k+1}(M_{k,j}) = -\text{sign } \Omega_{k-1}(M_{k,j})$$

これから Λ のときと同様に $\Omega_k(M)$ と $\Omega_{k-1}(M)$ とは

互いに根を分離して (すべて実根) $< (2p-2)^2$

これで、 ω_k は k を1つおきに性質がわかった。中間の k については、元の方程式に立帰って、両側の ω （これは Ω_k からわかる）との関係から、やはり証明される。

$$\text{こうして, } \frac{\lambda}{\alpha} + (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{1}{\lambda} \equiv C = \frac{A + \frac{2}{B^2}}{-K + \frac{2}{B^2}} \text{ は}$$

$$(I) \quad C = \text{実数}, \quad |C| \leq C_0 \equiv \frac{\frac{1}{B^2} - 2}{\frac{1}{B^2} + 1} < 1$$

$$\text{or} \quad (II) \quad C = \frac{A + \frac{2}{B^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} - i\xi} = \frac{\xi}{1 - i\xi}, \quad \xi, \xi: \text{実数}$$

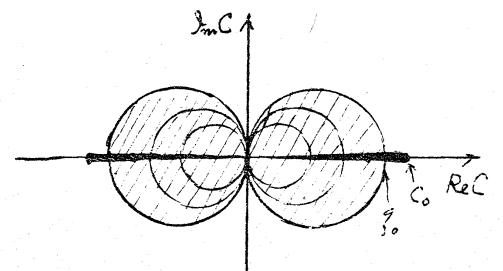
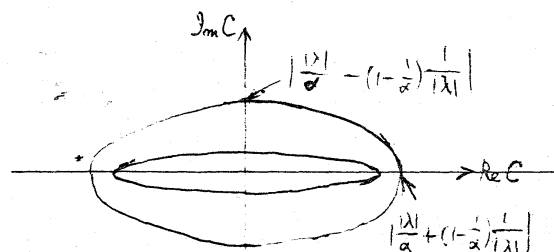
$$-\infty < \xi < +\infty, \quad |\xi| \leq \xi_0 \equiv \frac{\frac{1}{B^2} - 2}{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2}} < C_0$$

これから $\min_{\alpha < 2} \max_{A, K} |\lambda|$ を調べる

以上の議論は、はじめに簡単化の都合で、近似を行っている。そのため、 C の分布はこれに依っているものであっても、全く同じものではないので、ここで、問題を幾何学的に表現して、上の C が一意本質を近似している事を納得しよう。

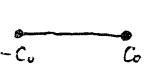
左辺 $\frac{\lambda}{\alpha} + (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{1}{\lambda}$ の $|\lambda| = \text{const}$
の contour は 楕円で

右辺 $\begin{cases} \frac{\xi}{1 - i\xi}, & \xi < \xi_0 \\ C: \text{実数}, & |C| < C_0 \end{cases}$ には



$|\lambda_0| < |\lambda|$ なるすべての λ について 左の図が右の ~~図~~ の外側に完全に出てしまう λ_0 を, α を適当に選んで, 最小にするという幾何学的な意味をもつ。

与えられた α について

(I)  に對しては $\lambda_0 = \begin{cases} \frac{C_0 + \sqrt{C_0^2 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} & k \leq C_0 \\ \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - k^2}}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} & k \geq C_0 \end{cases}$

(II)  に對しては $\lambda_0 = \begin{cases} g_0 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2/g_0^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} \right) & k \leq \frac{g_0}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}} \cdot \frac{2k + g_0}{2k - g_0} & k \geq \frac{g_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$

但し $\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$, $k = \sqrt{\frac{4}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$

一般性を失うことなく $C_0 \geq g_0$ と仮定してよく

α (即ち k) を動かして λ_0 の minimum になるのは

$$k = k_0 = \max \left\{ \frac{g_0}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5 - g_0^2}}}, \frac{C_0}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{g_0}{C_0}} + \sqrt{1 - \frac{g_0}{C_0}} \right] \right\}$$

であり, そのときの λ_0 は

$$\min_{\alpha} \lambda_0 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - k_0^2}}{1 + \sqrt{1 - k_0^2}}} \cdot \frac{2k_0 + g_0}{2k_0 - g_0} = \frac{k_0}{1 + \sqrt{1 - k_0^2}} \sqrt{\frac{2k_0 + g_0}{2k_0 - g_0}}$$

また $\lambda_0 < 1$ なる α に対する条件は (II) に對して

必要で $\alpha < \frac{4}{2 + \sqrt{1 + g_0} - \sqrt{1 - g_0}}$ が必要十分である。

