

特異点を持つ超曲面に関する

Toeplitz 作用素の C^* -代数

東北大理 佐藤 肇

今, M は単純の為に Stein 多様体, Ω はその強擬凸領域とある。 M には Hermite 計量が入っており, 従ってその体積形式も与えられているとしよう。 $L^2(\Omega)$ で, Ω 上の二乗可積分な関数全体, $H^2(\Omega)$ で $L^2(\Omega)$ の元で正則な関数全体のなす閉部分空間を表わす。 又, $\Pi: L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$ を直交射影とする。 具体的には, Π は Bergmann 核による積分で表わされる。

任意の関数 $\varphi \in C(\Omega)$ に対して Toeplitz 作用素 (あるいは Wiener-Hopf 作用素) $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega))$ ($H^2(\Omega)$ の有界線型作用素) を

$$T_\varphi f = \Pi \varphi f \quad f \in H^2(\Omega)$$

で定義する。

今, $\mathcal{T}$ は T_φ ($\varphi \in C(\Omega)$) によって生成される C^* -代数, $\mathcal{K}(H^2(\Omega))$ は $H^2(\Omega)$ のコンパクト作用素全体を表わす。

定理 次の列は完全である,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow C(\partial\Omega) \longrightarrow 0.$$

証明は Janas (Studia Math. 54, 1975) が $\mathbb{C}^n$ の部分空間に対して行ったのと同様に, Kohn の強擬凸多様体に対する可作用素の解を用いて, 数田の注意を適用すればよい。

上の定理は, $H^2(\Omega)$ の代わりに, $H^2(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ を用いても, 全く同様に成立する。但し $H^2(\partial\Omega)$ は $\overline{\partial}_b$ に零に移される元全体と定義する。この場合には 直交射影 $\Pi: L^2(\partial\Omega) \rightarrow H^2(\partial\Omega)$ は Cauchy-Szegő 核による積分で表わされ, H は高次の Hilbert 変換とすれば, 1次元の場合と同様に

$$\Pi = \frac{1}{2}(H + I)$$

となる。但し 1次元の場合, Π, H は擬微分作用素 PDO であるのに対し, 高次元では, 特異積分作用素ではあつか (Folland-Stein 参照), PDO ではない。

問題 高次の Hilbert 変換の "Symbol" とは何か?

即ち, 1次元の場合には Atiyah-Singer の定理によって

Toeplitz 作用素の Fredholm 指数が計算されるか。(実際には 1 次元 $\partial\Omega = S^1$ の場合には、この Toeplitz 作用素の指数を実際に計算して、位相的指数と解析的指数が等しいことを示すのが、Atiyah-Singer の証明には必須の Step である)。高次元の場合には、位相的指数が、如何に定義されるかというのか、非常に興味ある問題と思われる。

今、 X を compact な $\mathbb{C}^N$ ($N: \infty$) の部分空間とあらわし、 $\mathcal{C}$ で、ある Hilbert 空間の 有界作用素全体をコンパクト作用素 ^{のイデアル} で割ったもの全体とす。Calderón 代数を表わす。 $\text{Ext}(X)$ で $\mathcal{C}(X)$ から $\mathcal{C}$ への K -理論込みの同型類全体とする。 $\text{Ext}(X)$ は定理のような、 $\mathcal{C}(X)$ の、コンパクト作用素による Extension 全体と同型になる。 Brown-Douglas-Fillmore-Atiyah 等による美しい結果 (BAMS, 79, 1973)

$$\text{Ext}(X) \cong K_1(X),$$

但し、右辺は X の 1 次元ホモロジー K -理論、を用いる。

系
$$\mathcal{J} \in K_1(\partial\Omega)$$

を得る。

さて、 f を原点で孤立特異点を持つ解析函数、 M_f で $f = \varepsilon$ ($\varepsilon: \text{小}$) と原点を中心とする開球面との共通部分と

する。 M_f は $f=\varepsilon$ という超曲面の中での強擬凸領域となり (田中, 京大講義録), 定理が適用できる。 M_f には $\mathbb{C}^n$ より導かれた計量を入れる。 従って M_f の境界 ∂M_f (Brieskorn 型の多様体) に対し, 自然に $\sigma \in K_1(\partial M_f)$ の元が定まる。 これは M_f のホモロジ- K 理論的特徴類とみることが出来る。

問題 $\sigma \in K_1(\partial M_f)$ は位相的不変量か? あるいは強擬凸構造によるか?

さて, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ を固定し, T_φ を $L^2(\partial\Omega)$ から $L^2(\partial\Omega)$ への作用素として, $H^2(\partial\Omega)$ の直交補空間で恒等写像, 即ち

$$T_\varphi = \pi \varphi \pi + (1 - \pi)$$

と自然に拡張する。 T_φ は Atiyah (函数解析国際会議, 東京, 1969) の言う $\text{Ell}(\partial\Omega)$ の元を定める。 $\text{Ell}(\partial\Omega)$ の元は自然に, ホモロジ- K 理論指数 $\in K_0(\partial\Omega)$ を定めるから,

$$\{T_\varphi\} \in K_0(\partial\Omega)$$

とみることが出来る。 同様に $\varphi \in C(\partial\Omega) \otimes M(k)$ 但し, $M(k)$ は $(k \times k)$ -複素行列全体とする時, $\{T_\varphi\} \in K_0(\partial\Omega)$ とする。

$\varphi \in C(\partial\Omega) \otimes M(k) \hookrightarrow C(\partial\Omega) \otimes GL(k; \mathbb{C})$ に含まれ
 と決定すると $\{\varphi\} \in K^1(\partial\Omega)$ とみずす二と加出来る ($k: \infty$).

自然に Pairing

$$\cap: K^1(\partial\Omega) \otimes K_1(\partial\Omega) \longrightarrow K_0(\partial\Omega)$$

が定義される。

$$\{\varphi\} \cap \mathcal{J} = \{\mathcal{T}\varphi\}$$

が成立する。