

中心対称な多面体の面の個数について

(R. Stanley の結果の紹介)

東海大・理 渡辺敬一 (Kei-ichi WATANABE)

P を d 次元 simplicial polytope (各 face が simplex であるような多面体), $f_i = f_i(P)$ を P の i 次元の face の個数とあうわすことにする ($f_{-1} = 1$ とおく). $(f_0, \dots, f_d)$ を並べたものを P の f -vector という. また, P の " h -vector" $h = (h_0, \dots, h_d)$ を

$$h_i = h_i(P) = \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{d-i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot f_{j-1} \quad (0 \leq i \leq d)$$

で定義する. $h(P)$ から $f(P)$ を回復するのは容易だから, $h(P)$ を与える事と $f(P)$ を与える事は同値である. 例えば, P が正 8 面体とすると, $f(P) = (6, 12, 8)$ だから, $h(P) = (3, 3, 1)$ となる. もっと一般に, $(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, \pm 1, \dots, 0), (0, \dots, 0, \pm 1)$ を頂点とする polytope を "cross polytope" と云い, この場合 $h(P) = \left(\binom{d}{1}, \binom{d}{2}, \dots, \binom{d}{d} \right)$ で与えられる.

講演では R. Stanley の結果 [1] を中心として, $f(P)$, $h(P)$ に関する予想を, 可換環論, torus embedding, "hard Lefschetz theorem" 等をどのように組合せて証明し

て行く(か)を紹介した。

まず, simplicial complex Δ と体 k に対し, "Stanley-Reisner ring" $k[\Delta]$ と (Δ の vertex $v_1, \dots, v_n$ とする)

$$k[\Delta] = k[x_1, \dots, x_n] / (x_{i_1} \cdots x_{i_s} \mid \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \notin \Delta)$$

で定義する. $k[\Delta]$ は graded ring だから, Poincaré series

$$F(k[\Delta], t) := \sum_{n \geq 0} \dim k[\Delta]_n \cdot t^n = \sum_{i=-1}^d \left(\frac{t}{1-t} \right)^{i+1} \cdot f_i = \frac{1 + h_0 t + h_1 t^2 + \dots + h_d t^{d+1}}{(1-t)^{d+1}}$$

によって, $h(P)$ と $f(P)$ の関係が説明される. P が simplicial polytope であるとき, $|P|$ は S^d (球面) と同相だから, $k[P]$ は Gorenstein 環となり, $h(P)$ は対称的になる. ($h_i = h_{d-1-i}$, $-1 \leq i \leq d$).

次に, P の頂点を有理点に選ぶと, $(\mathbb{R}^{d+1} \supset P \ni 0$ として), P は $\mathbb{R}^{d+1}$ の rational partial polyhedral decomposition を定めるので, トーラス埋め込みの理論より, compact alg. variety $X_P = T_N \text{emb}(P)$ が定義され, この variety の cohomology ring に対し,

$$\bigoplus_{i=0}^{d+1} H^{2i}(X; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[P] / (\theta_0, \dots, \theta_d) \quad (\text{環の同型})$$

が成立する。但し, $(\theta_0, \dots, \theta_d)$ は $\mathbb{C}[P]$ の次数 1 の元から

成る parameter 系. $\mathbb{C}[P]$ は Gorenstein 環より, $(\theta_0, \dots, \theta_d)$

は regular sequence であり, $\dim H^{2i}(X; \mathbb{C}) = \dim (\mathbb{C}[P] / (\theta_0, \dots, \theta_d))_i = h_{i+1}(P)$. ($-1 \leq i \leq d+1$).

P が原点に対し対称的なとき, P は "centrally symmetric" という. 対称的という事は, P に位数 2 の群が作用しているという事であり, この作用は X_P , $\mathbb{C}[P]$, $H^*(X; \mathbb{C})$ に拡張される. この作用と, hard Lefschetz Theorem (Stanley の論文によると, 斎藤盛彦氏によつて intersection cohomology を使つて証明が与えられたそうだが) を組合せると, 次のような結果が得られる.

定理. P が $(d-1)$ 次元 centrally symmetric simplicial polytope
 $\Rightarrow$ (1) $h_i(P) \geq \binom{d}{i}$, 特に $f_{d-1} \geq 2^d$
 (2) $h_i(P) - h_{i-2}(P) \geq \binom{d}{i} - \binom{d}{i-1}$ ($1 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$)
 (3) $h_{i-1}(P) = \binom{d}{i}$ とする i , ($2 \leq i \leq d$) が存在するとき,
 $\forall j$, $h_{j-1}(P) = \binom{d}{j}$ で, P は "cross-polytope" と同値.

REFERENCES.

- [1] R. Stanley, On the Number of Faces of Centrally-Symmetric Simplicial Polytopes, Graphs and Combinatorics 3, 55-66 (1987).
- [2] R. Stanley, Commutative Algebra and Combinatorics, Progress in Math. 41, Birkhauser 1983.
- [3] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋, (1985)