

DE 変換公式の最適性について I I

一橋大学 経済学部 杉原正顕(Masaaki Sugihara)

本稿においては, DE 変換公式の最適性に関する次の 2 つの話題を扱う.

《第一の話題》 “従来の DE 公式を越える DE 公式”

《第二の話題》 “IMT 変換の反復によって得られる公式は, 何故 DE 公式を越えられないか”

1 《第一の話題》 “従来の DE 公式を越える DE 公式”

1.1 はじめに

よく知られているように, 積分問題 $\int_0^1 f(x)dx$ に用いる標準的 DE 変換:

$$\varphi_{DE}^A(t) = \frac{1}{2} \tanh(A \sinh(t)) + \frac{1}{2}$$

において, A を $\pi/2$ より大きくすると, 変換後の被積分関数

$$f(\varphi_{DE}^A(t)) \varphi_{DE}^{A'}(t)$$

は減衰が急になるものの, この変換に基づく DE 公式 (変換 $\varphi_{DE}^A(t)$ + 台形公式) を用いた時の数値積分誤差は大きくなってしまふ. では, $\varphi_{DE}^{\pi/2}(t)$ を用いた DE 公式以上に効率のよい数値積分公式 (従来の DE 公式を越える数値積分公式) は考えられないのであろうか? ここでは, この問いに対して一つの解答を与える.

まず初めに, 最も基本的な intrinsic error (関数 1 を数値積分した時の誤差) について詳細に研究し, intrinsic error については, 従来の DE 変換を用いる DE 公式 (DE 変換 + 台形公式) より, 次のような “DE 変換” ($\frac{d}{dt} \psi_{DE-X}^A(t)$) が二重指数関数的に減衰するのでこのように呼んでも差しつかえないと思われる)

$$\psi_{DE-X}^A(t) = \int_{-\infty}^t \exp(-2A \cosh(s)) ds / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2A \cosh(s)) ds$$

$$(A > \pi/2)$$

を用いる DE 公式 (“DE 変換” + 台形公式) の方がより有効であることを示す. さらには, この “DE 変換” ψ_{DE-X}^A を用いる DE 公式がある意味で究極の公式であることを証明する. 次に, “DE 変換” ψ_{DE-X}^A を用いる DE 公式を, 種々

の積分問題に適用し、その効率および実用性を従来のDE公式と比較検討する。

以下の節の構成は次のとおりである。まず、1.2 従来のDE公式の intrinsic error において、従来のDE公式の intrinsic error の評価を復習し、従来のDE変換 ψ_{DE}^A を用いるDE公式の場合には、Aを $\pi/2$ より大きくすると、 $A = \pi/2$ の場合に比べて intrinsic error が大きくなってしまふことを見る。次に、1.3 “DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式 において、1.2における intrinsic error の評価を踏まえて、従来のDE変換を用いるDE公式よりも intrinsic error を小さくできる公式を模索し、“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いるDE公式を導入する。さらに、この“DE変換”を用いるDE公式がある意味で究極の公式であることを示す。1.4 “DE変換”を用いたDE公式の効率および実用性 においては、数値実験を通して、“DE変換”を用いるDE公式の効率および実用性を、従来のDE公式と比較する。最後の1.5 まとめと今後の課題 では、まとめと今後の課題について述べる。

1.2 従来のDE公式の intrinsic error

従来のDE公式の intrinsic error の評価を復習する。

次の Stenger の補題を用いる。

Stenger の補題 [4]

領域 $D_d = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ で正則な関数 f が次の条件を満足するとする。

$$(i) \quad N_d(f) = \lim_{c \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+ci)| + |f(x-ci)| dx < +\infty$$

(但し、 $0 \leq c < d$ を満足する任意の c について右辺は存在するとする)

(ii) $0 \leq c < d$ を満足する任意の c に対して

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} |f(x+yi)| dy = 0$$

このとき、任意の $h > 0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{2\pi d}{h})}{1 - \exp(-\frac{2\pi d}{h})} N_d(f)$$

まず、上記の Stenger の補題を用いて、従来の DE 公式の intrinsic error を次のように評価していく。（以下、記述を簡単にするために

$$\frac{d}{dt} \varphi_{DE}^A(t) = \frac{(A/2) \cosh(t)}{\cosh^2(A \sinh(t))}$$

の代わりに $w(z)$ という記号を用いる)

$$\begin{aligned} |\text{intrinsic error}| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx - h \sum_{j=-N/2}^{N/2} w(jh) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} w(jh) \right| + h \sum_{|j| > N/2} |w(jh)| \\ &\leq \frac{\exp(-\frac{2\pi d}{h})}{1 - \exp(-\frac{2\pi d}{h})} N_d(f) + h \sum_{|j| > N/2} |w(jh)| \end{aligned}$$

(ここで、 d は $w(z)$ が Stenger の補題にいう条件を満足するような d の値)

$$\leq C_1 \exp(-\frac{2\pi d}{h}) + C_2 h \exp(-\frac{A}{2} \exp(\frac{N}{2}h) + \frac{N}{2}h) \quad (1.1)$$

(ここで、 C_1, C_2 は、 N および h には無関係な定数。但し、 $h < 1$ と仮定しておく)

次に、式 (1.1) の第一項の指数部と第二項の指数部が等しくなるように h をとる。つまり、等式：

$$-\frac{2\pi d}{h} = -\frac{A}{2} \exp(\frac{N}{2}h) + \frac{N}{2}h$$

が成立つように h をとる。このように決定された h を $h(N; d, A)$ と記すことにする。この $h = h(N; d, A)$ を式 (1.1) に代入して、intrinsic error の評価：

$$|\text{intrinsic error}| \leq C \exp(-\frac{2\pi d}{h(N; d, A)}) \quad (1.2)$$

を得る。

Remark 上に記した intrinsic error の評価から分かるように、intrinsic error は、 A (DE 変換に含まれるパラメータ = $w(z)$ の実軸上での減衰度) と d ($w(z)$ が Stenger の補題にいう条件を満足するような d の値) に依存して決まる。特に、 A, d が大きければ大きいほど intrinsic error は小さくなる。

今, さらに, 上記の評価を進め, 従来のDE公式 (DE変換 ϕ_{DE}^A + 台形公式) においては A を $\pi/2$ より大きくすると効率が悪くなることを示す. そのために d が A にどのように依存するかを調べる. それには,

$$w(z) = \frac{(A/2)\cosh(z)}{\cosh^2(A \sinh(z))}$$

の特異点を調べればよい. 簡単な計算から, $w(z)$ は次の2種類の特異点:

- (1) $\sin^{-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2A}\right)$ (k : integer)
- (2) $\cosh^{-1}\left(\frac{(2l+1)\pi}{2A}\right) + \frac{(2m+1)\pi}{2}i$ (l, m : integer)

(但し, k は $\sin^{-1}(\cdot)$ が実数になるような整数値のみ, l は $\cosh^{-1}(\cdot)$ が実数になるような整数値のみをとるとする)

を持つことがわかる (図1参照).

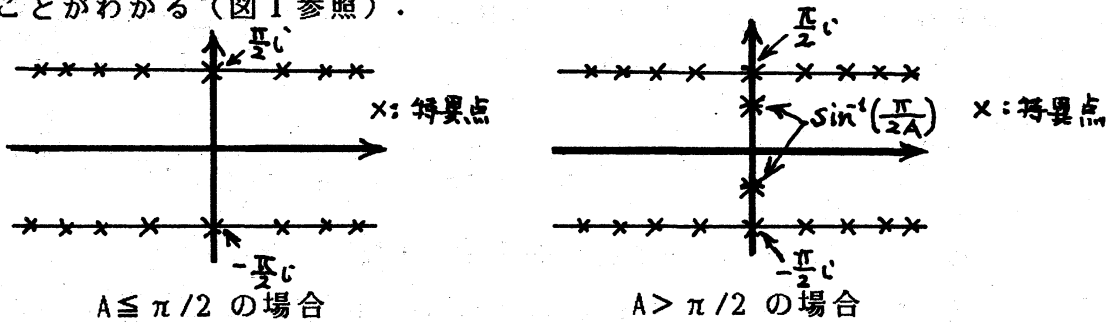


図1.1 $w(z)$ の特異点

このことから, 次の d の A に対する依存性:

$A \leq \pi/2$ ならば d としては $d = \pi/2 - \varepsilon$ (ε は任意の正数) なる値が取れ,

$A > \pi/2$ ならば d としては $d = \sin(\pi/(2A)) - \varepsilon$ (ε は任意の正数) なる値しか取れないこと

が分かる (ここで, $\sin(\pi/(2A)) < \pi/2$ に注意). この結果から, $h(N; A, d)$ の定義方程式 (1.1) および intrinsic error の評価式 (1.2) に注意すると

intrinsic error は $A = \pi/2$ の場合に最小になり, $A > \pi/2$ の場合には

$A = \pi/2$ の場合に比べ大きくなる

ことが分かる. これは, ここで示したかったこと: “従来のDE公式 (DE変換 ϕ_{DE}^A + 台形公式) においては A を $\pi/2$ より大きくすると効率が悪くなる” に他ならない.

1.3 “DE変換” $\psi_{DE-X}^A(t)$ を用いたDE公式

1.2で述べたことから分かるように、DE公式の場合、 A を $\pi/2$ より大きくすると公式の効率が悪くなるのは、 $w(z) = \frac{d}{dz} \phi_{DE}^A(z)$ において A を $\pi/2$ より大きくすると d の値が $\pi/2 - \varepsilon$ (ε は任意の正数)より小さくなってしまうためである。従って、DE公式より効率のよい公式を作るためには、そのようなことのない関数 $w(z)$ を探す必要がある。では、そのような関数 ($\frac{d}{dz} \phi_{DE}^A$ と同様に実軸で $|x| \rightarrow \infty$ のとき $\exp(-A \exp(|x|))$ の order で減衰し、かつ、 A が大きくなっても d の値が $\pi/2 - \varepsilon$ (ε は任意の正数)のままで変わらない関数)はあるのか？ 少々模索してみれば、“そのような関数”として次の関数が見つかる。

$$\exp(-2A \cosh(z))$$

(この関数が“そのような関数”であることは殆ど自明であるので、その証明は略す) かくして、次の“DE変換”：

$$\psi_{DE-X}^A(t) = \int_{-\infty}^t \exp(-2A \cosh(s)) ds / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2A \cosh(s)) ds$$

が得られる(これが、1.1で述べた“DE変換”である)。

この節の初めに述べたことから、この“DE変換”を用いたDE公式の方が、従来のDE変換を用いたDE公式よりも intrinsic error を小さくできることは、少なくとも理論的には明かである。後に、数値実験を通して、実際に、この“DE変換”を用いたDE公式の方が、従来のDE変換を用いたDE公式よりも intrinsic error を小さくできることを示す。

今、さらに、この“DE変換”を用いたDE公式より intrinsic error を小さくできるような公式は考えられないかを考察する。1.2で述べた intrinsic error の評価から容易に分かるように、“DE変換”を用いたDE公式より intrinsic error を小さくできるような公式を作るためには、実軸上で任意の A に対して $\exp(-A \exp(|x|))$ の order より速く減衰し、かつ、 d の値を $\pi/2 - \varepsilon$ (ε は任意の正数)ととれる関数を見つけられればよい。しかし、次の定理から分かるように、そのような関数は0以外に存在しないのである。

定理 1.1 (二重指数関数の減衰の極限性)

関数 f が次の 3 条件:

- (i) $f(z)$ は D_d で解析的で $\bar{D}_d$ で連続.
- (ii) $f(z)$ は $\bar{D}_d$ で有界: $|f(z)| \leq M$
- (iii) $f(x) = O\left(\exp(-m(|x|))\exp\left(\frac{\pi}{2d}|x|\right)\right)$ ($|x| \rightarrow +\infty, x \in \mathbb{R}$)

(ここで $m(x)$ は $m(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) なる任意の実数値関数)

を満足するならば, $f(z) \equiv 0$

従って, “DE 変換” を用いた DE 公式より intrinsic error を小さくできるような公式を作ることとはできないのである. この意味で “DE 変換” を用いた DE 公式は, 究極の公式であると言える.

1.4 “DE 変換” を用いた DE 公式の効率および実用性

ここでは, 種々の積分問題に, 従来の DE 変換 ϕ_{DE}^A を用いた DE 公式と, 本稿で導入した “DE 変換” ψ_{DE-X}^A を用いた DE 公式を適用して, その数値積分誤差を比較する.

今, 関数 f を数値積分しようとする場合を考える. DE 公式は, 元来, 無限和

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\phi(jh))\phi'(jh)$$

を次のような有限和:

$$h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\phi(jh))\phi'(jh)$$

で置き換えて得られる公式であるから, 有限和のとり方 (N_-, N_+ のとり方) によって数値積分誤差は, 大きく変わり得る. 従って, 有限和のとり方を定め, 刻み幅が h のときの DE 公式の数値積分誤差を定義しなければ, 公式の比較はできない. 文献 [7] などでは, N_-, N_+ のとり方として, discretization error:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\phi(jh))\phi'(jh) \right|$$

と trimming error (上記の無限和を有限和に置き換えたために生ずる誤差):

$$h \sum_{j < N_-, j > N_+} |f(\varphi(jh))\varphi'(jh)|$$

が等しくなるようにとり，そのようにした時の誤差をDE公式の数値積分誤差としている．このようにして得られる誤差は，一般に，積分を有限和で近似する時の誤差の最小値となっており，それをDE公式の数値積分誤差と考えるのは，ごく自然なことである．ここでも，この考え方を踏襲することにする．しかし，discretization error と trimming error が等しくなるような N_- , N_+ を計算して，数値積分誤差を求めるのは大変な手間を要するので，ここでは，便宜的に，次のようにして，DE公式の数値積分誤差の近似値を求め，それをDE公式の数値積分誤差と見なすことにした．

【DE公式の数値積分誤差の近似値の求め方】

まず， N_- , N_+ を十分大きくとって $h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$ を計算し，

discretization error:

$$\varepsilon = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx - h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh) \right|$$

を求める．次に，和 $h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$ のうち，次の不等式：

$$h|f(\varphi(jh))\varphi'(jh)| > \varepsilon/2$$

を満足する項のみについて和をとり，そのときの数値積分誤差：

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx - h \sum_{h|f(\varphi(jh))\varphi'(jh)| > \varepsilon/2} f(\varphi(jh))\varphi'(jh) \right|$$

を刻み幅が h のときのDE公式の数値積分誤差の近似値とする．ここで，数値積分に要する関数評価回数（分点総数）は，和：

$$h \sum_{h|f(\varphi(jh))\varphi'(jh)| > \varepsilon/2} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$$

を計算するのに要した関数評価回数である．

以下，数値実験では，従来のDE変換 φ_{DE}^A ，および，“DE変換” ψ_{DE-X}^A （ A の値 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0）を用いたDE公式を，次の6つの関数に適用して数値積分誤差を調べた．

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = x$$

$$f_3(x) = \exp(x)$$

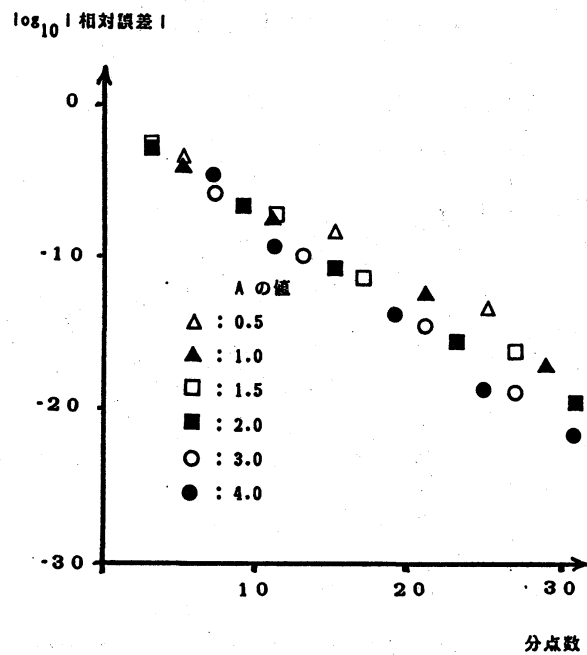
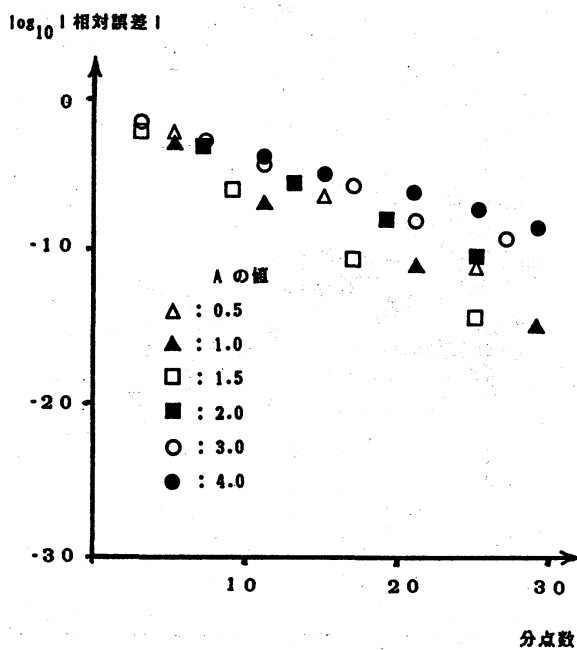
$$f_4(x) = \sqrt{x}$$

$$f_5(x) = \log(x)$$

$$f_6(x) = 1/\sqrt{x}$$

(関数の特異性に注意)

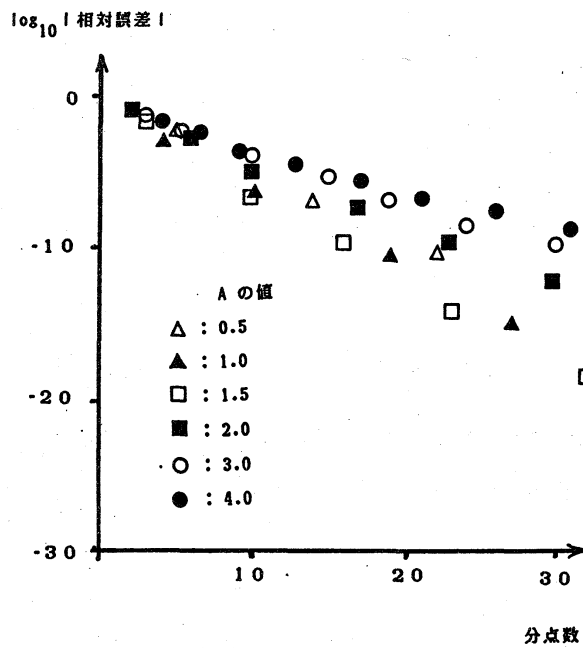
数値実験の結果を図1.2に示す.



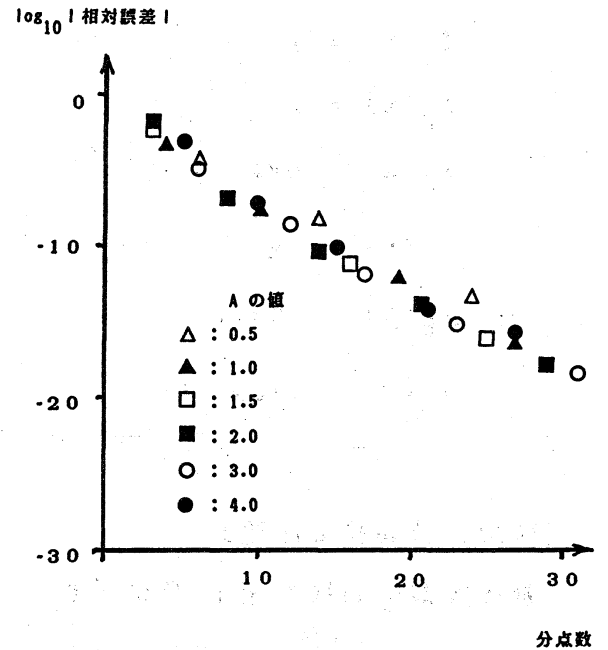
(1) ϕ_{DE}^A を用いたDE公式を
 $f_1(x)=1$ に適用したときの誤差

(2) ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式を
 $f_1(x)=1$ に適用したときの誤差

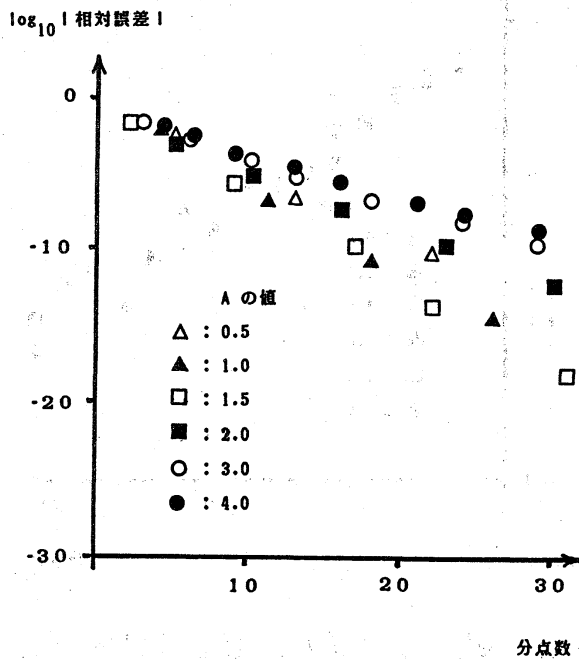
図1.2 $\phi_{DE}^A, \psi_{DE-X}^A$ を用いたDE公式の数値積分誤差



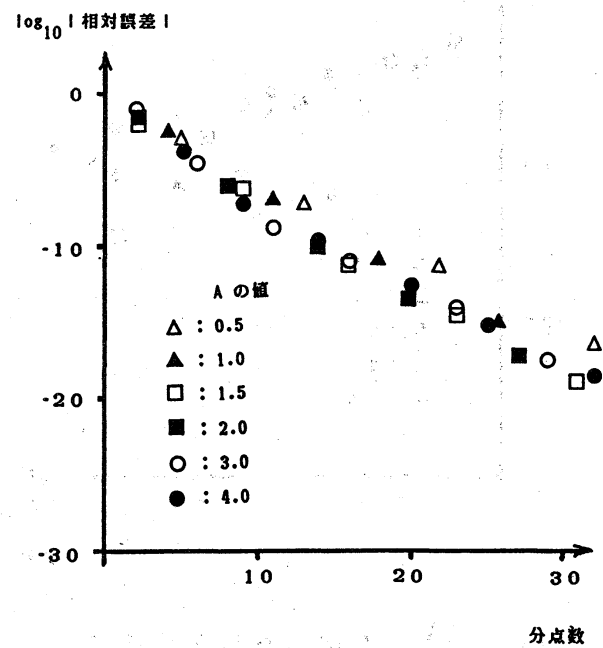
(7) φ_{DE}^A を用いた DE 公式を $f_4(x) = \sqrt{x}$ に適用したときの誤差



(8) ψ_{DE-X}^A を用いた DE 公式を $f_4(x) = \sqrt{x}$ に適用したときの誤差

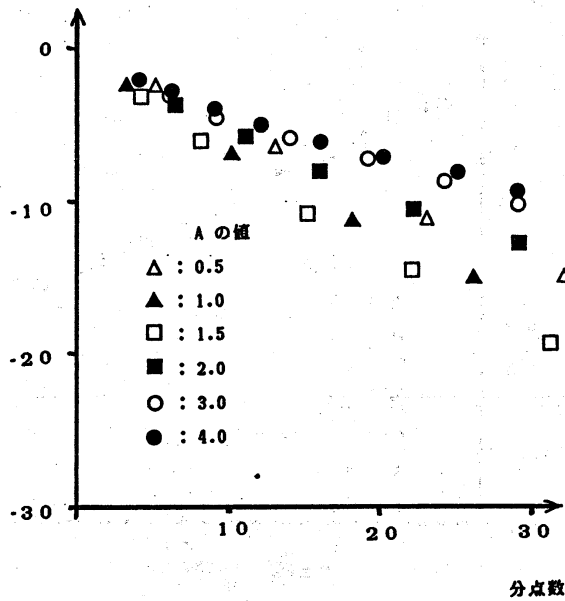
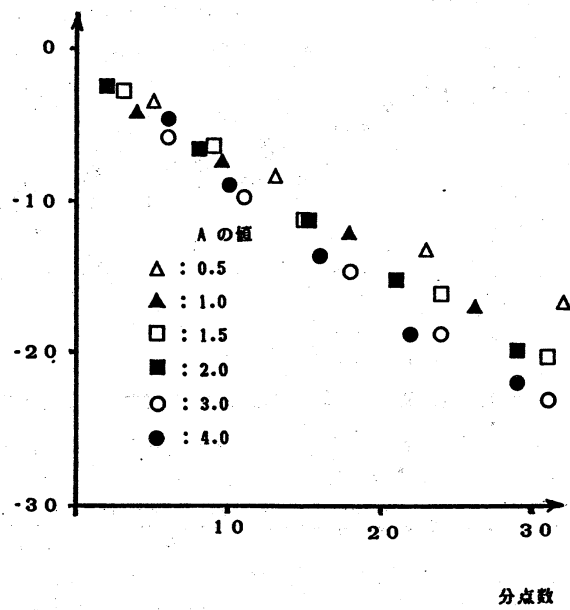


(9) φ_{DE}^A を用いた DE 公式を $f_5(x) = \log(x)$ に適用したときの誤差



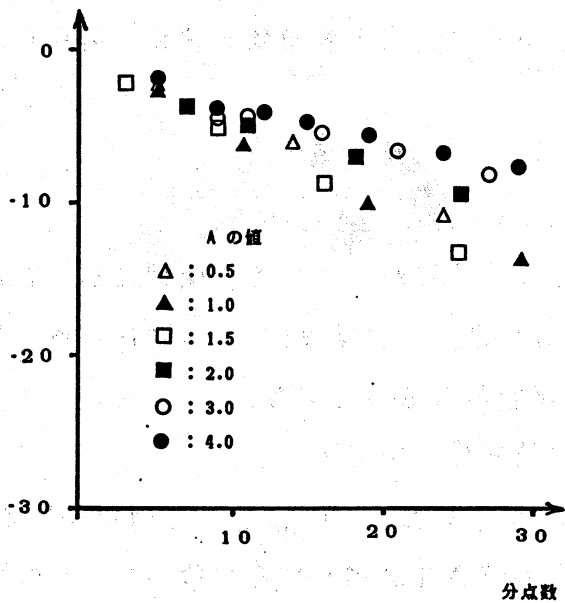
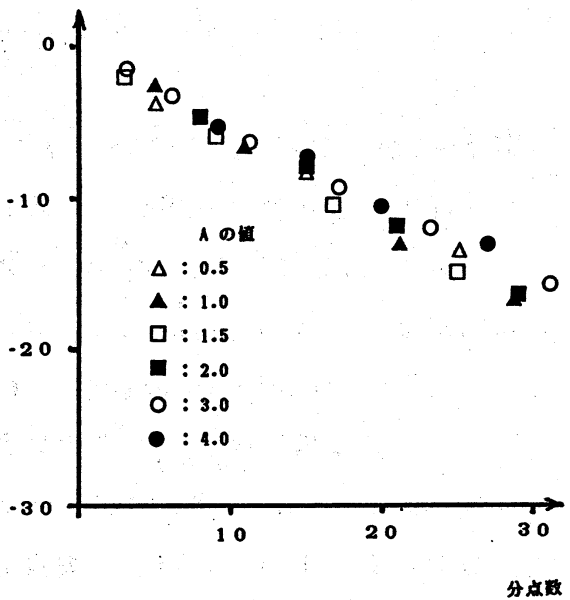
(10) ψ_{DE-X}^A を用いた DE 公式を $f_5(x) = \log(x)$ に適用したときの誤差

図 1.2 $\varphi_{DE}^A, \psi_{DE-X}^A$ を用いた DE 公式の数値積分誤差 (続き)

$\log_{10} | \text{相対誤差} |$  $\log_{10} | \text{相対誤差} |$ 

(3) ϕ_{DE}^A を用いた D E 公式を
 $f_2(x)=x$ に適用したときの誤差

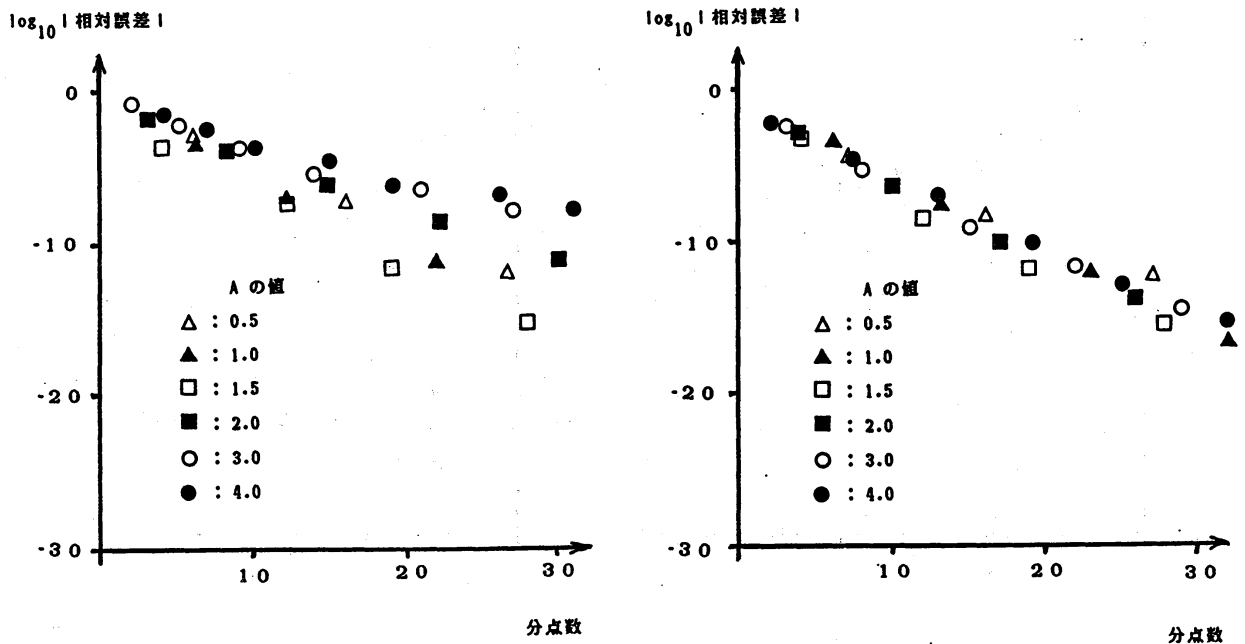
(4) ψ_{DE-X}^A を用いた D E 公式を
 $f_2(x)=x$ に適用したときの誤差

 $\log_{10} | \text{相対誤差} |$  $\log_{10} | \text{相対誤差} |$ 

(5) ϕ_{DE}^A を用いた D E 公式を
 $f_3(x)=\exp(x)$ に適用したときの誤差

(6) ψ_{DE-X}^A を用いた D E 公式を
 $f_3(x)=\exp(x)$ に適用したときの誤差

図 1.2 $\phi_{DE}^A, \psi_{DE-X}^A$ を用いた D E 公式の数値積分誤差 (続き)



- (11) φ_{DE}^A を用いた DE 公式を $f_6(x)=1/\sqrt{x}$ に適用したときの誤差
- (12) ψ_{DE-X}^A を用いた DE 公式を $f_6(x)=1/\sqrt{x}$ に適用したときの誤差

図 1.2 $\varphi_{DE}^A, \psi_{DE-X}^A$ を用いた DE 公式の数値積分誤差 (続き)

図 1.2 から次のようなことが見て取れる。

(1) 《従来の DE 変換を用いた DE 公式について》

A の値を 1.5 にした φ_{DE}^A を用いる DE 公式が、すべての関数に対して最も効率がよい。(intrinsic error に関しては、この結果は 1.2 で述べた従来の DE 公式の intrinsic error の理論的評価と合致している)

(2) 《“DE 変換” ψ_{DE-X}^A を用いた DE 公式について》

intrinsic error に関しては、A の値を 4.0 にした ψ_{DE-X}^A を用いる DE 公式が最も効率がよい。しかし、被積分関数の特異性が強くなるに従って、A の値を 1.5 の前後の値にした ψ_{DE-X}^A を用いる DE 公式が、最も効率のよい公式となる。但し、A の値の大きな ψ_{DE-X}^A を用いる DE 公式も、それほど効率は悪くはない。(intrinsic error に関しては、この結果は 1.3 で述べた“DE 変換”を用いた DE 公式の intrinsic error の理論的評価と合致している)

(3) 《従来のDE変換を用いたDE公式と“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式の比較》

比較的素直な関数に関しては，従来のDE変換を用いたDE公式より，“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式（Aの値は大きめ）の方が有効である．しかし，特異性の強い関数に関しては，従来のDE変換を用いたDE公式と“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式は，対等である．

1.4 まとめと今後の課題

従来のDE公式の intrinsic error を理論的に解析することによって，intrinsic error に関して，従来のDE変換を用いたDE公式よりも有効である“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式を導入した．この公式は，比較的素直な関数に関しては，従来のDE変換を用いたDE公式より有効である．しかし，特異性の強い関数に関しては，従来のDE変換を用いたDE公式と対等である．

一般に，intrinsic error の小さい変数変換型の数値積分公式は，他の関数の数値積分誤差も小さいと思われる（信じられている？）が，このことは，上記のことからもわかるように，ここでは，正しくないようである．このあたりの事情の解明も含めて，“DE変換” ψ_{DE-X}^A を用いたDE公式の数値積分誤差の詳細な解析（例えば，誤差の特性関数の解析など）は，今後の課題としたい．

2. 《第二の話題》 “IMT変換の反復によって得られる公式は、何故DE公式を越えられないか”

2.1 はじめに

1974年、伊理、森口、高沢は、[1]において、積分問題 $\int_0^1 f(x)dx$ に対する数値積分公式として、次のような変数変換に基づく公式（IMT公式）：

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\varphi_{\text{IMT}}\left(\frac{k}{N}\right)\right) \varphi'_{\text{IMT}}\left(\frac{k}{N}\right)$$

$$\text{ここで, } \varphi_{\text{IMT}}(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right) ds / \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right) ds$$

を提案し、この公式を用いたときの数値積分誤差が次のように評価されること

$$\exp(-c\sqrt{N})$$

を示した。その後、室田、伊理[3]は、IMT変換を反復して用いることによって得られる数値積分公式：

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\varphi_{\text{IMT}}^{(i)}\left(\frac{k}{N}\right)\right) \varphi'_{\text{IMT}}\left(\frac{k}{N}\right)$$

$$\text{ここで, } \varphi_{\text{IMT}}^{(1)}(t) = \varphi_{\text{IMT}}(t), \varphi_{\text{IMT}}^{(i+1)}(t) = \varphi_{\text{IMT}}^{(i)}(\varphi_{\text{IMT}}(t)) \quad (i \geq 1)$$

文献[3]では

変換 $\varphi_{\text{IMT}}^{(2)}$ を用いる公式を IMT-double rule

変換 $\varphi_{\text{IMT}}^{(3)}$ を用いる公式を IMT-triple rule

変換 $\varphi_{\text{IMT}}^{(4)}$ を用いる公式を IMT-quadruple rule

と呼んでいる。

を導入し、この公式を用いたときの数値積分誤差が次のように評価されること

$$\text{IMT-Double rule: } \exp\left(-\frac{cN}{(\log N)^2}\right)$$

$$\text{IMT-Triple rule: } \exp\left(-\frac{cN}{(\log N)(\log \log N)^2}\right)$$

$$\text{IMT-Quadruple rule: } \exp\left(-\frac{cN}{(\log N)(\log \log N)(\log \log \log N)^2}\right).$$

を示し、IMT変換の反復によって得られる公式を用いることによってIMT公式を用いたときに比べ数値積分誤差が飛躍的に改善できることを示した。しかし、この一連の誤差評価からわかるように、“IMT変換の反復の回数をいくら多くしても、得られる公式の数値積分誤差は、DE公式の数値積分誤差 $C \exp(-c N / \log N)$ より良くはならない。” 第二の話題は、この現象に対する一つの説明である。まず、IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定し、その関数空間上で、不等式“数値積分公式の誤差ノルム $\geq C \exp(-c N / \log N)$ ”（ここで、 C, c はIMT変換の反復回数には関係しない定数としてとることができる）が成立することを示し、この現象に対する一つの説明を与える。

以下の節の構成は次のとおりである。まず、2.2 IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間 において、IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定する。次に、2.3 数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価 で、IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間における数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価 “数値積分公式の誤差ノルム $\geq C \exp(-c N / \log N)$ ” を示す。

2.2 IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間

IMT公式に関しては、すでに、[6]において、公式が有効であるような関数空間を設定した。それとまったく同様にして、[2]にあるIMT変換の反復によって得られる公式の誤差解析を参照すれば、IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定できる。詳細は省略するが、結果として、つぎのような関数空間を得る。

$$H_{R-IMT}^{\alpha} = \{ f \mid f \text{ は Riemann 面 } \varphi_{IMT}(\Delta) \text{ 上で正則, かつ, } \sup_{z \in \varphi_{IMT}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty \text{ なる関数} \}$$

但し、 $\alpha > -1$ で Δ は図2.1に描いたような領域（領域の高さは十分に低いとする）であり、図にも記してあるように境界が直線 $x=0, x=1$ に接している（例えば、IMT-double rule の場合、境界の $x=0$ への接し方は $x=y/(\log y)^2$ であり、IMT変換の反復回数が増えるほど接し方は強くなる）。

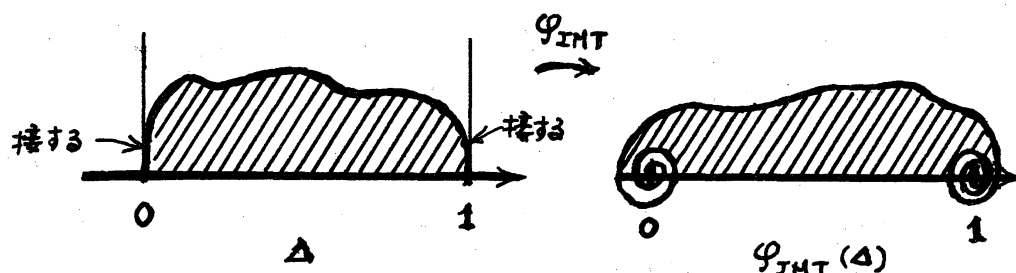


図 2.1 領域 Δ および Riemann 面 $\varphi_{\text{IMT}}(\Delta)$ の概略図

ここで、空間のノルムは、 $\|f\| = \sup_{z \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})|$ でい

れ、この空間上での線形作用素のノルムとしては、通常的作用素ノルムをとることとする。

この関数空間は、一見奇怪に見えるが、条件

$$\sup_{z \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty$$

を次のように書き替えてみれば

$$|f(z)| \leq \|f\| z^{\alpha}(1-z)^{\alpha} \quad (\forall z \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta))$$

わかるように、 $z=0$ 、及び $z=1$ における特異性が $z^{\alpha}(1-z)^{\alpha}$ 以下であるような関数の成す空間である。従って、この関数空間は、決して奇怪なものではない。

2.3 数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価

2.1 で導入した関数空間 $H_{R-\text{IMT}}^{\alpha}$ において、数値積分公式 (N 個の関数値及び導関数値を用いた公式) :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} f^{(j)}(x_i) \quad \left(\sum_{i=1}^k m_i = N, a_{ij} \in \mathbb{C}, x_{ij} \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta) \right)$$

を考える。そして、この数値積分公式に対する誤差生成作用素を次のように定義する：

$$E_N(x_i; a_{ij})(f) \equiv \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} f^{(j)}(x_i) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

以下の目標は、数値積分公式の分点 x_i や重み a_{ij} を動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限：

$$\inf_{x_i \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta), a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{R-\text{IMT}}^{\alpha}}$$

を求める（評価する）ことである。

まず，DE変換：

$$\varphi_{DE}(t) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right) + \frac{1}{2}$$

によって H_{R-IMT}^α から導入される関数空間：

$$H_{DE}^\alpha = \left\{ f \mid f \text{ は } \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)) \text{ 上で正則, かつ, } \sup_{w \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(w)/(\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}(1-\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}\varphi'_{DE}(w)| < +\infty \text{ なる関数} \right\}$$

を考える。但し，空間のノルムは，

$$\|f\| = \sup_{w \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(w)/(\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}(1-\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}\varphi'_{DE}(w)|$$

でいれ，この空間上での線形作用素のノルムとしては，通常的作用素ノルムをとることにする。空間 H_{R-IMT}^α と空間 H_{DE}^α の基本関係（空間 H_{R-IMT}^α 上の数値積分誤差生成作用素のノルムと空間 H_{DE}^α 上の数値積分誤差生成作用素のノルムの基本関係）は次の補題 2.1 で与えられる。

補題 2.1

$$(1) \quad f \in H_{R-IMT}^\alpha \text{ ならば } f(\varphi_{DE})\varphi'_{DE} \in H_{DE}^\alpha \text{ で } \|f\| = \|f(\varphi_{DE})\varphi'_{DE}\|$$

$$\text{逆に, } g \in H_{DE}^\alpha \text{ ならば } g(\varphi_{DE}^{-1})(\varphi_{DE}^{-1})' \in H_{R-IMT}^\alpha \text{ で } \|g\| = \|g(\varphi_{DE}^{-1})(\varphi_{DE}^{-1})'\|$$

$$(2) \quad \text{任意の } x_i \in \varphi_{IMT}(\Delta), a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ に対して } y_i \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)), b_{ij} \in \mathbb{C} \text{ が存在して}$$

$$\|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{R-IMT}^\alpha} = \|E_N(y_i; b_{ij})\|_{H_{DE}^\alpha}$$

逆に，任意の $y_i \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)), b_{ij} \in \mathbb{C}$ に対して $x_i \in \varphi_{IMT}(\Delta), a_{ij} \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\|E_N(y_i; b_{ij})\|_{H_{DE}^\alpha} = \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{R-IMT}^\alpha}$$

（証明は容易であるから省略する）

この補題からわかるように，等式：

$$\inf_{x_i \in \varphi_{IMT}(\Delta), a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{R-IMT}^\alpha} = \inf_{y_i \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)), b_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(y_i; b_{ij})\|_{H_{DE}^\alpha}$$

が成立するから、 H_{R-IMT}^α における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限の評価は H_{DE}^α における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限の評価に帰着される。

以下 H_{DE}^α における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限を評価する。そのために、関数空間 H_{DE}^α がどのような空間なのかを調べる。まず $\varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ の解析が必要である。いま、 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ ($D_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$) を考えると、図 2.2 からわかるように $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ は 0, 1 を分岐点にもつ無限葉の Riemann 面で、1 枚目の Riemann 面は複素平面から分岐点 $\{0, 1\}$ を除いたものであり、他の Riemann 面は複素平面から分岐点 $\{0, 1\}$ および直線 $\operatorname{Re} z = 1/2$ を除いたものである。

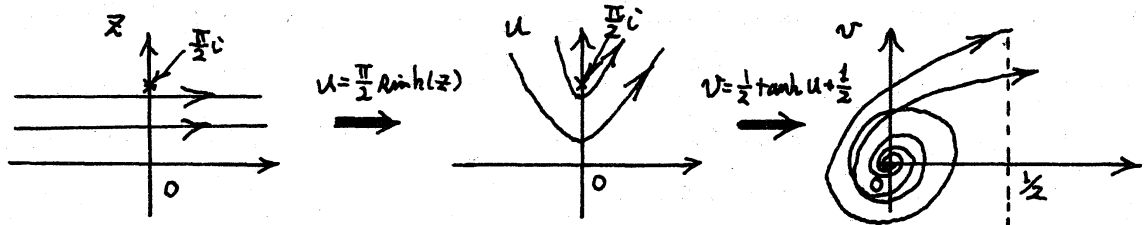


図 2.2 Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ (領域 $D_{\pi/2}$ の内の実軸に平行な直線群が φ_{DE} によってどのように変換されるかを描いたもの)

このことから、 $\varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ は $D_{\pi/2}$ に含まれる領域であることが分かる。従って関数空間 H_{DE}^α は、次のような関数空間

$$\mathcal{H}_{DE}^\alpha(\mathcal{D}) = \{ f \mid f \text{ は 領域 } \mathcal{D} \text{ で正則, かつ, } \sup_{w \in \mathcal{D}} |f(w) / (\varphi_{DE}(w)^{-\alpha} (1 - \varphi_{DE}(w))^{-\alpha} \varphi'_{DE}(w))| < +\infty \text{ なる関数} \}$$

ここで $\mathcal{D}$ は $D_{\pi/2}$ に含まれる領域。

の特殊なものに他ならないことがわかる。この関数空間 $\mathcal{H}_{DE}^\alpha(\mathcal{D})$ における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素ノルムの下限の評価は、[5] で与えた誤差生成作用素ノルムの下限の評価法を用いれば、容易に得られる。結果は次のようになる：

$$\inf_{x \in \mathcal{D}, a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{\mathcal{H}_{DE}^\alpha(\mathcal{D})} \geq C \exp(-c N / \log N)$$

(ここで、 C, c は領域 $\mathcal{D}$ には関係しない定数としてとることができる)
従って、関数空間 H_{DE}^α における数値積分公式の誤差生成作用素ノルムの下限の評価は次のようになる。

$$\inf_{x_i \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)), a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{DE}^\alpha} \geq C \exp(-c N/\log N)$$

上記の評価は、先に述べた H_{R-IMT}^α と H_{DE}^α の関係に鑑みれば、IMT変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間 H_{R-IMT}^α において数値積分公式の誤差ノルムが下からの次のように

$$\inf_{x_i \in \varphi_{IMT}(\Delta), a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{H_{R-IMT}^\alpha} \geq C \exp(-c N/\log N)$$

(ここで、 C, c は IMT 変換の反復回数には関係しない定数としてとることができる)

評価されることを示している。これは、我々がここで示したかったことである。

Remark 1 関数空間 $\mathcal{H}_{DE}^\alpha(\mathcal{D})$ における数値積分公式の誤差生成作用素のノルムの下限の評価の結果、および、Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ に含まれる領域と $D_{\pi/2}$ に含まれる領域の対応関係に注意すれば、次の定理を得る(上で示した IMT 変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間 H_{R-IMT}^α における数値積分公式の誤差ノルムが下からの評価は、この定理の特殊な場合に過ぎないとも言える)。

定理 2.2

$\mathcal{D}$ を Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ に含まれる任意の領域とする(図 2.3)。



図 2.3 Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ に含まれる領域 $\mathcal{D}$

そして、次のような関数空間を考える：

$$\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D}) = \{ f \mid f \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上で正則, かつ,}$$

$$\sup_{z \in \mathcal{D}} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty \text{ なる関数} \}$$

このとき,

$$\inf_{x_i \in \mathcal{D}, a_{ij} \in \mathbb{C}} \|E_N(x_i; a_{ij})\|_{\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})} \geq C \exp(-c N/\log N)$$

(ここで、 C, c は $\mathcal{D}$ には関係しない定数としてとることができる)

参考文献

- [1] 伊理正夫, 森口繁一, 高沢嘉光: ある数値積分公式について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.21 (1970), pp.82-118.
- [2] 室田一雄: On numerical quadrature formulas robust against endpoint singularities, 東京大学計数工学科卒業論文 1978.
- [3] K. Murota and M. Iri: Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, Numer. Math., Vol.38(1982), pp.327-363.
- [4] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12(1973), pp.103-114.
- [5] 杉原正顕: DE変換公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.585 (1986), pp.150-170.
- [6] 杉原正顕: IMT積分公式が有効な関数族について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.613(1987), pp.170-187.
- [7] H. Takahasi and M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Vol.9(1974), pp.721-741.