

鏡映群・基本不変式・ヤコビアン

についての注意

国際基督教大学 (ICU) 寺尾宏明

G を有限 n -タリ鏡映群とし、 l 次元 n -タリ空間 V に作用しているとする。 $S = S(V^*)$ (V の双対空間 V^* の対称代数) の中で、 G 不変なもの全体を S^G と書くと、Chevalley の定理より、

$$S^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_l]$$

となるような同次多項式 $f_1, \dots, f_l$ の存在が知られている。これらの $f_1, \dots, f_l$ を G の基本不変式という。さて、1960 年に、R. Steinberg は、次のことを示した。

定理 (Steinberg [3]). $f_1, \dots, f_l$ の Jacobian は、

$$c \cdot \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1} = \frac{c}{\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H} \quad (c \in \mathbb{C}^\times)$$

ただし、 $\mathcal{A}$ は G の鏡映面のすべての集合、 $\alpha_H \in V^*$ は、 $\ker(\alpha_H) = H$ なる元、 $e_H := \#\{g \in G \mid g \text{ は } H \text{ 上で恒等}$

写像}とする。

特に、 G に属する鏡映の位数がすべて2ならば、各 e_H は2だから（例えば、 G がCoxeter群ならそうなる）、

$\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1} = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ となり、Jacobianが丁度、鏡映面全体のなす因子、被約定義多項式を与えていることになる。

Steinbergの原証明は、Molien seriesを用いる群論的なものであるが、ここでは、イデアル論的な新証明を与えることを目標としたい。keyになる定理は、より一般的な形で、Wiebe [4; Satz 2], K. Saito [1; 3.4], Scheja-Storch [2; 1.2]によって示されているが、ここでは、我々に必要な形でのみ述べて、証明を付ける。

定理. K : 体, $S = K[x_1, \dots, x_\ell]$: 多項式環

$f_1, \dots, f_\ell \in S$ が、同次多項式で (degree > 0) かつ、正則列であるとする。このとき、 $f_1, \dots, f_\ell$ のJacobian J は、イデアル $(f_1, \dots, f_\ell)S$ に属さない。

証明. $(f_2, \dots, f_\ell)S$ の素因子の高さは、すべて $(\ell-1)$ だから、

$$(x_1, \dots, x_\ell)S \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \quad (\cup \text{は } (f_2, \dots, f_\ell) \text{ の素}$$

2

因子上を動く) が成立している。従って, $\exists x_i$ s.t.

$$x_i \notin \bigcup \mathcal{P} \Rightarrow (f_2, \dots, f_\ell): (x_i) = (f_2, \dots, f_\ell).$$

簡単のため, $i=1$ とし.

$$(f_2, \dots, f_\ell): (x_1) = (f_2, \dots, f_\ell)$$

と (2) より, $x_1, f_2, \dots, f_\ell$ が, 正則列になる.

以下, 定理を ℓ に関する帰納法で示す.

$$\ell=1: \text{明らか. } (f_1 = x_1^n, J = n x_1^{n-1} \notin (x_1^n))$$

$$\ell > 1: f \in K[x_1, \dots, x_\ell] \text{ に対し.}$$

$$\bar{f} := f(0, x_2, \dots, x_\ell) \in K[x_2, \dots, x_\ell] \text{ と書く. すると,}$$

$\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_\ell$ は, $K[x_2, \dots, x_\ell]$ 内の正則列になる. 帰納法の仮定から,

$$\frac{\partial(\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_\ell)}{\partial(x_2, \dots, x_\ell)} \notin (\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_\ell)$$

これより,

$$(*) \quad J_1 := \frac{\partial(f_2, \dots, f_\ell)}{\partial(x_2, \dots, x_\ell)} \notin (x_1, f_2, \dots, f_\ell)$$

を得る. 一方, Euler 等式より,

$$\sum_i x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = (\deg f_j) f_j \quad (1 \leq j \leq \ell).$$

Cramer's rule より.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\deg f_1) f_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\deg f_e) f_e & \partial f_e / \partial x_2 & \cdots & \partial f_e / \partial x_e \end{vmatrix}}{J}$$

従, 2.

$$(**) \quad x_1 J \equiv (\deg f_1) f_1 J_1 \pmod{(f_2, \dots, f_e)}.$$

以下, $\equiv$ はすべて $\pmod{(f_2, \dots, f_e)}$ の意味で用いる.

もし, $J \in (f_1, \dots, f_e)$ と仮定すると, $\exists t \in S$ s.t.

$$J \equiv t f_1$$

$$\Rightarrow x_1 J \equiv t x_1 f_1$$

$$\Rightarrow (\deg f_1) f_1 J_1 \equiv t_1 x_1 f_1 \quad (\text{by } (**))$$

$$\Rightarrow (\deg f_1) J_1 \equiv t_1 x_1 \quad ((f_2, \dots, f_e): (f_1) = (f_2, \dots, f_e))$$

$$\Rightarrow J_1 \in (x_1, f_2, \dots, f_e).$$

これは, (*) に矛盾する. $\square$

注意. この定理の幾何学的意味については, 齋藤 [1] の中で

広中による指摘がある. $F := (f_1, \dots, f_e): \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^e$

なる open map による l -form $\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_e}{y_e}$ の引き戻し

の適当な l サイクルによる積分がゼロにならないというのが

その大意である。

Steinberg の定理の新証明のためには、あとは、 J と、 $\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ との関係を調べる必要がある。

補題. $J \in (\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}) \cdot \mathbb{C}[f_1, \dots, f_\ell]$.

証明. (1) $g \in G$ を鏡映とし、その鏡映面が $x_1 = 0$ で定義されるように、 V^* の正規直交基底 $x_1, \dots, x_\ell$ を取る。 $x_1 \in V^* \wedge$ の g の作用は、 $g(x_1) = (\det g)^{-1} x_1$ で与えられる。 $x_1 = 0$ 以外の鏡映面たちについては、 g によって、これらの定義式の置換が引き起こされるから、結局、

$g(\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H) = (\det g)^{-1} (\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H)$ を得る。 e_H の定義より、 $\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}$ は G 不変だから、

$$(*) \quad g(\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}) = (\det g) (\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1})$$

を得る。

$$(2) \quad J = \frac{\partial(f_1, \dots, f_\ell)}{\partial(x_1, \dots, x_\ell)} \text{ は、 } g \in G \text{ に } 1, 2,$$

$$(**) \quad g(J) = (\det g) J$$

と変換されることは容易にわかる。

(3) $x_1=0$ を鏡映面. $g \in G$ をその回りの位数 e の鏡映とする. $f \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_\ell]$ は, g 不変だから, f は, $x_1^e, x_2, \dots, x_\ell$ に関する多項式になる. 従って, $\partial f_1 / \partial x_1, \dots, \partial f_\ell / \partial x_1$ 等はすべて x_1^{e-1} で割り切れる. よって, J も x_1^{e-1} で割り切れる. 結局, J は, $\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ で割り切れる.

(4) $(*)$ と $(**)$ は, J と $\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ とが同じ変換法則を満たすことを示している. そして, (3) より, J は $\prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1}$ で割り切れ. その商は G 不変である. $\square$

先の定理から, $J \notin (f_1, \dots, f_\ell)$ であるから, 上の補題より, Steinberg の定理を得る.

問題. $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell] (= S(V^*))$ 上の G 不変な derivations を, $(\text{Ders})^G$ と書くとき, その基底を

$$\theta_i = \sum_j p_{ij} (\partial / \partial x_j) \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

とするとき, $\det[p_{ij}] \notin (f_1, \dots, f_\ell)$ が, 上記の如くに示せないか? (この問題で, $\text{Ders} \rightarrow \Omega_S^1$, $\partial / \partial x_j \rightarrow dx_j$ と, dualize すると, 丁度, 先の定理の主張になる.)

References

- [1] Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten.
Inventiones math. 23, 289-325 (1974).
- [2] Scheja, G. and Storch, U.: Über Spurfunktionen
bei vollständigen Durchschnitten.
J. Reine Angew. Math. 278/279, 174-190 (1975).
- [3] Steinberg, R.: Invariants of finite reflection
groups. Canad. J. Math. 12, 616-618 (1960).
- [4] Wiebe, H.: Über homologische Invarianten
lokaler Ringe. Math. Ann. 179, 257-274 (1969).