

周期的急拡大管路流れの安定性と 2 つの波動の伝播

同志社大学工学部 高岡 正憲 (Takaoka Masanori)

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

同志社大学工学部 佐野 太郎 (Taro Sano)

Department of Mechanical Engineering

Doshisha University

1 はじめに

空間的な周期構造をもつ管路は熱交換器や化学反応器などに見られ、同じ形をしたユニット管が多数連結した形をしている。このような流れの理論的な研究ではユニット管路が無限につながっていると仮定されるが、実験や実用的な装置では有限の長さの管路が用いられる。このとき、流れの安定性には対流不安定性と絶対不安定性の 2 種類の不安定性が存在することに注意しなければならない [1]。

周期的管路内流れは管路の周期と同じ周期をもつことが期待され、管路と同じ周期の周期条件を課すことにより調べられることも多い。実際、Ghaddar *et al.* [2] は平行平板の片側にのみ周期的な急拡大部をもつ管路の流れについて数値シミュレーションと線形安定性解析を行った。彼らは管路と同じ周期あるいは 2 倍の周期をもつ流れを仮定して解析を行ったが、結果として管路と同じ周期をもつ攪乱が不安定となって振動流に遷移したとき、その振動周期は空間周期性を仮定しないときと変わらないという結論を得た。このとき、攪乱である伝播波は平板境界層で発見されたトルミン・シュウリヒティング波 (TS 波) と同じ性質をもつことが確かめられた。また、Adachi and Uehara [3] は平行平板管路の両側に凹凸のある周期的管路流れの数値シミュレーションを管路と同じ周期条件のもとで行い、管壁からの流体への熱伝達特性と圧力降下との関係を調べた。

管壁が正弦関数のようになめらかに変化している周期的管路流れの安定性と乱流への遷移は Guzmán and Amon [4] によって調べられたが、ここでも管路と同じ周期の流れ場が仮定が仮定された。一方、Blacher, Creff and Le Quéré [5] は周期条件を用いることなく、この周期的管路の数値シミュレーションを行い、流れの対流不安定性を調べた。彼らは流れが不安定となったときの攪乱をフーリエ分解することにより、流れは管路周期の約半分の周期をもつフーリエ成分を中心とした波束形の攪乱に対して対流不安定となることを見だし、周期条件を課した線形安定性解析の結果と比較して、両者が良く一致することを確認した。

ここでは周期的急拡大部をもつ対称な管路流れを周期性を仮定しないで数値シミュレーションを行い、この管路を伝わる波について調べる。特に、この流れが不安定となって攪乱が成長するとき、この攪乱の性質を管路と同じ周期と 2 倍の周期の周期境界条件のもとでその線形安定性を調べ、両者の攪乱の性質と流れが不安定となる条件の比較を行う。ここで、議論する攪乱は対流不安定型の伝播波攪乱と定在波攪乱である。

ユニット管路の連結部である狭窄部が比較的長い場合、流れの遷移の性質は急拡大部が 1 つだけの管路流れとよく似たものとなる。このような急拡大部を 1 つもつ対称管路を流れる流れはこ

れまでによく調べられており、特に Mizushima *et al.*[6] および Mizushima and Shiotani[7] によって、有限長さの急拡大部をもつ管路流れが調べられ、この流れは比較的小さなレイノルズ数で対称定常流が定在波攪乱に対して不安定となり、非対称な流れへと遷移するが、もう少し大きなレイノルズ数で逆ピッチフォーク分岐を生じて再び対称定常流となることが明らかとなっている。

2 問題の設定と基礎方程式

2.1 基礎方程式

急拡大部をもつ対称なユニット管が N 個連結された管路を考える (図 1)。ユニット管は図 1(a) のように、幅 $2d$ の流入部 ABCJ と流出部 GFNM の間に幅 $2D$ の急拡大部 IDEH をもつ構造をしている。導入部と導出部の長さはいずれも l_r であり、急拡大部の長さは l_e である。座標軸は図 1(a) のように、流入口 AB の中点を原点として、管路の中心軸に沿って x 軸をとり、それと垂直に y 軸をとる。このユニット管を N 個連結した周期構造をもつ管路が図 1(b) であり、このときの座標系は第 1 ユニットの流入口 AB の中点を原点として 1 個のユニット管の場合と同様にとる。

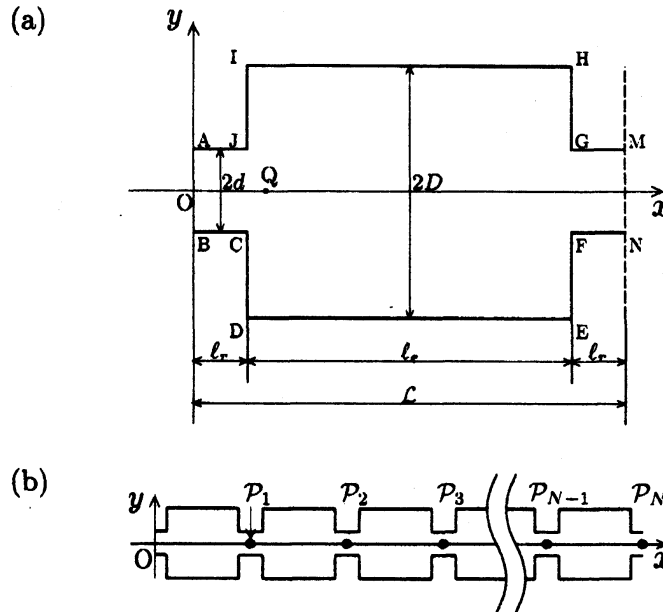


図 1: 管路の形状と座標系. (a) ユニット管の構造. (b) 周期的急拡大管路.

ユニット管の形状を特徴づけるパラメータとして拡大比を $E = D/d$, 急拡大部アスペクト比を $A = l_e/2D$, 無次元流入部長さを $s = l_r/d$ で定義する。ユニット管を連結したとき、管路の縮小部は前方の流出部と後方の流入部が連結されるので、その無次元長さは $2s$ であり、拡大部の無次元長さは $2AE$ であり、各ユニット管の無次元長さすなわち連結管の無次元空間的周期は $L = 2(AE + s)$ と表される。

流れは二次元非圧縮性であると仮定する。流れを支配する方程式はナビエ・ストークス方程式と連続の式であるが、二次元非圧縮性の仮定より、流れ関数 ψ を導入し、 $Re = Ud/\nu$ を $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$ と表すことができる。1 ユニットの流入口 (AB) における x 軸方向の最大流速 U を代表速度にとり¹, 流入口 (AB) の半分の幅 d を代表長さにとって無次元化すると、ナビエ・ス

¹ 周期境界条件を用いるときには、 N 個連結した管路流れと流量を同じにするために、平均流速の $3/2$ を U とする。

トークス方程式と連続の式は流れ関数 $\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を用いて,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2)$$

と表せる。ここで,

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

であり, Re はレイノルズ数で $Re = Ud/\nu$ と定義する。ただし, ν は流体の動粘性係数である。

境界条件として2つの異なる境界条件を用いる。1つは N 個のユニット管路に十分に発達したポワズイユ流が流入する場合であり, もう1つはその近似として n 個 ($n = 1, 2$) のユニットで周期的な流れとなる場合である。いずれの場合にも, すべての壁面境界では滑りなし条件を適用する。すなわち, 流れと平行な壁面上では $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$ であり, 流れ方向に垂直な壁上では $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial x = 0$ と表せる。

N 個のユニット管路流れを計算するとき, 第1ユニットの流入口条件を

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = (1 - y^2), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha, \\ \psi = y(1 - \frac{y^2}{3}) - \alpha(1 - x), \quad \omega = 2y \quad (3)$$

とおく。すなわち, x 方向速度は完全に発達したポワズイユ流である, その流速の y 成分は x 方向流速の α 倍の流速をもつとする。ただし, 特に断らないときは $\alpha = 0$ であり, ある時刻で α の値をたとえば 0 から 0.02 あるいは -0.02 に瞬間的に変更することにより, 流入口で人為的に攪乱を加える。あるいは, 攪乱を加えた後に元の $\alpha = 0$ の値に戻すときには, 時間 $t = [0, 4T]$ の間のみ $\alpha = A_0 \exp\{-(t - 2T)^2/T^2\}$ ($A_0 = \pm 0.02$, $T = \mathcal{L}/10$) のような指数型の関数形で攪乱を加える。最後尾である N 番目のユニットの流出口 ($x = N\mathcal{L}$) での流出条件には, ゾンマーフェルト放射条件を用いる。これは流出境界において移流方程式を用いる方法であり,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

と表される。ここで, $\tilde{c}$ は流出口を通過する波の位相速度であるが, ここではこの位相速度 $\tilde{c}$ として, その位置での流れ方向の局所流速 u を用いる。

空間的に周期性をもつ流れを求めるときには, 管路と同じ周期をもつ流れ (この1周期流れを「モード1」と呼ぶ) と2ユニットで1周期となる流れ (「モード2」) を考える。一般にはモード2はモード1を含むが, ここではモード2は2ユニットで1周期をもつ流れの中でモード1でない流れのみをモード2と呼ぶことにする。このとき, 流入口と流出口における周期境界条件は, n を1または2として

$$\psi(x, y) = \psi(x + n\mathcal{L}, y), \quad \omega(x, y) = \omega(x + n\mathcal{L}, y) \quad (5)$$

と表される。ここでは, モード2流れとして, 隣り合うユニット管路内で一方の流れパターンを x 軸に対して反転すれば他方のパターンとなる流れ, すなわち $x \rightarrow x + \mathcal{L}$, $y \rightarrow -y$ の操作に対して不変となる流れを考えるので, モード2には

$$\psi(x, y) = -\psi(x + \mathcal{L}, -y), \quad \omega(x, y) = -\omega(x + \mathcal{L}, -y) \quad (6)$$

を課す。この条件 (6) により, モード1とモード2を区別することができる。

2.2 対称定常解とその線形安定性

ここでは、管路と同じ周期をもつ対称定常流を数値的に求め、その線形安定性を調べる。線形安定性解析では1ユニットおよび2ユニットで1周期となる攪乱のみを考える。したがって、不安定性の結果現れる流れはモード1流れとモード2流れだけである。

管路と同じ周期をもつ対称定常流(主流と呼ぶ) $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ は方程式

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \Delta \bar{\omega} = 0 \quad (7)$$

$$\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega} \quad (8)$$

と境界条件

$$\bar{\psi}(x, y) = \bar{\psi}(x + L, y), \quad \bar{\omega}(x, y) = \bar{\omega}(x + L, y) \quad (9)$$

を満たす。

主流 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ に攪乱 (ψ', ω') が加わったとき、流れ関数と渦度はそれぞれ $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ および $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ と表せる。これらの式を基礎方程式(1)と(2)に代入して、式(7)と(8)を引き、攪乱の振幅が小さいとして攪乱の非線形項を無視すると、線形攪乱方程式が得られる。さらに攪乱の時間依存性を指数関数に仮定して、 $\psi' = \hat{\psi}e^{\lambda t}$, $\omega' = \hat{\omega}e^{\lambda t}$ とおくと、

$$\lambda \hat{\omega} = J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) - J(\bar{\omega}, \hat{\psi}) + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega}, \quad (10)$$

$$\Delta \hat{\psi} = -\hat{\omega} \quad (11)$$

となる。ここで、 λ は攪乱の複素線形増幅率である。 $\hat{\psi}(x, y)$ と $\hat{\omega}(x, y)$ が満たすべき境界条件はすべての壁面で滑りなし条件であり、不安定性の結果モード1の流れとなる攪乱(モード1の攪乱)は1ユニットの両端で周期境界条件を満たす必要がある。不安定性の結果モード2(モード2の攪乱)の流れとなる攪乱は2ユニットの両端で周期境界条件を満たすのみならず、式(6)を満たさなければならない。

3 数値計算法

3.1 数値シミュレーション

すべての数値計算を、差分法により行う。そのために、計算領域を等間隔($\Delta x = \Delta y$)の正方格子に分割し、渦度輸送方程式(1)を時間微分を1次精度の前進オイラー法で近似し、粘性項および非線形項の空間微分を4次精度の中心差分で近似する。また、ポアソン方程式(2)においては空間微分を4次精度の中心差分を用いて差分近似し、SOR法(Successive Over Relaxation Method)を用いて逐次代入法により解を求める。このとき、収束判定は各格子点 $(i\Delta x, j\Delta y)$ における時刻 $n\Delta t$ での流れ関数 $\psi(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ の k 回目の近似値 $\psi_{i,j}^k$ と $k-1$ 回目の値 $\psi_{i,j}^{k-1}$ の絶対誤差の最大値が $\epsilon_1 = 10^{-7}$ より小さくなったときに解は収束したと見なす。数値シミュレーションは初期値・境界値問題として解く。定常状態への到達の判定には、時刻 $n\Delta t$ と $(n-1)\Delta t$ におけるすべての計算点での y 方向速度 v の相対誤差が 10^{-14} 以下となったときに流れは定常状態に到達したと判断する。振動解の平衡状態への到達の判定では、隣り合う振動振幅の相対誤差が 10^{-4} 以下となったとき平衡状態に達したと判断する。

数値計算においては、主に時間刻みを $\Delta t = 0.02$ とし、計算領域 $x = [0, NL]$, $y = [-D, D]$ において x および y 方向共に等間隔に離散化し、空間刻みを $\Delta x = \Delta y = 0.1$ として計算を行った。ただし、計算結果の精度の確認やいくつかのパラメータに対しては他の時間きざみや空間きざみも用いた。

3.2 主流の数値計算と線形安定性解析

主流の数値計算と線形安定性解析においても数値シミュレーションのときと同様に差分法を用いる。主流方程式 (8) と (9)、線形攪乱方程式 (10) と (11) における空間微分をすべて 4 次精度の差分法で近似し、式 (8) と式 (9) および (10) と (11) のそれぞれの方程式系を SOR 法で解き、複素線形増幅率 λ を求める。SOR 法における解の収束判定は数値シミュレーションの場合と同じ条件を用いる。 $\lambda_r > 0$ のとき、主流は不安定であり、 $\lambda_r < 0$ のとき、安定である。また、 $\lambda_r = 0$ となるとき、レイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c である。

4 計算結果と考察

周期的急拡大部をもつ管路流れの数値シミュレーションを行った。管路形状パラメータとして、これまでの研究で最もよく調べられているパラメータとして、管路拡大比 $E = 3$ 、アスペクト比 $A = 7/3$ を選んだ。 N 個のユニットが連結した管路内を伝わる波について数値シミュレーションの結果を紹介する前に、モード 2 とモード 1 の空間的周期流について、その数値シミュレーションと線形安定性解析の結果を説明する。

4.1 空間的周期流れ

空間的に周期をもつモード 2 とモード 1 の流れを調べる主な目的は、次節で説明する N 個のユニットが連結した管路内を伝わる波を物理的に解釈するためである。また、周期的な構造をもつ管路流れはしばしば空間的に周期条件を用いて計算されてきたので、その妥当性を調べることも目的の 1 つである。

4.1.1 モード 1 流れ

管路の周期と同じ周期をもつ流れ、すなわちモード 1 の流れは (無次元) 流入部長さ s の値が小さい場合と大きい場合で異なる。比較的 s が小さいときの例として $s = 0.5$ の場合の流れ場を説明する。この流れはレイノルズ数が小さいとき、たとえば $Re = 45$ のとき図 2(a) のように対称定常流となる。この流れ場は流入部を通り急拡大部へ出るジェット状流れの両側に循環領域を形成している。このような対称定常流は流入部長さ s の値によらず小さいレイノルズ数では常に実現される。また、モード 1 やモード 2 の周期境界条件だけでなく、 N 個のユニット流れでも同様である。レイノルズ数が少し大きくなって、 $Re = 65$ のときには、流れの中に振動が生じて、図 2(b) のような振動流となる。この図は振動流のある時刻での瞬間の流れ場である。



図 2: 流線図。 $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$ 。(a) 対称定常流, $Re = 45$ 。(b) 振動流, 点 Q において y 方向速度が最大となる時刻での振動流, $Re = 65$ 。

対称定常流から振動流への流れの遷移を調べるために、流れの中の振動を代表する物理量として点 $(x, y) = (1.3, 0)$ (図 1(a) の点 Q) での y 方向速度 v_1 での振動振幅 a_1 をとり、レイノルズ数との関係をグラフに描くと図 3 のようになる。この図で、 $a_1^2 \propto (Re - Re_H)$ の関係があることより、この流れは臨界レイノルズ数 $Re_H = 48.7$ でホップ分岐が生じて、対称定常流が振動流へと遷移することが確認できる。

一方、流入長さ s が大きいとき、たとえば $s = 2$ のときには流れの遷移は $s = 0.5$ の場合と大きく異なる。このとき、レイノルズ数を大きくすると、対称定常流はその対称性を失って、図 4(a)

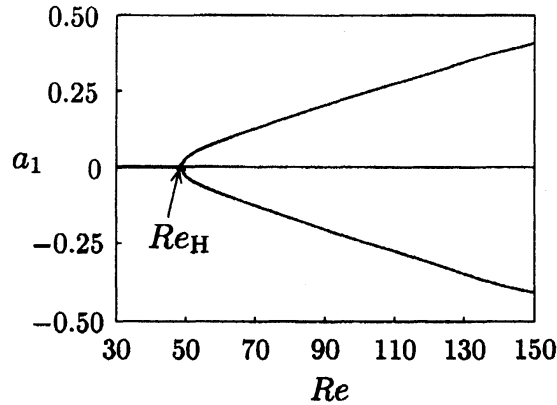


図 3: 分岐図. a_1 : 点 $(x, y) = (1.3, 0)$ (図 1(b) の点 Q) での y 方向速度 v_1 の振幅. $E = 3$, $A = 7/3$.



図 4: 流線図. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 2$. (a) 非対称定常流, $Re = 55$. (b) 対称定常流, $Re = 70$.

のように非対称定常流となり, さらにレイノルズ数を大きくすると図 4(b) のように再び対称定常流へと戻る. このような解の分岐特性は単独の急拡大部をもつ管路流れと同じ性質である [6]. ただし, モード 1 流れはレイノルズ数 $Re = 120 \sim 130$ 程度で振動流へと遷移する. 単独の急拡大部をもつ流れのホップ分岐点が $Re = 843$ であることを考えると, モード 1 の振動流への遷移は非常に小さなレイノルズ数で生じることになる.

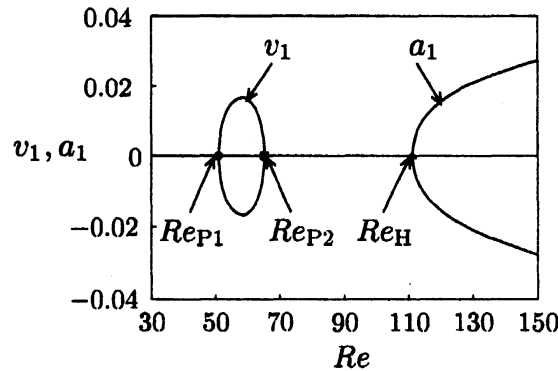


図 5: 分岐図. v_1 : 点 $(x, y) = (1.3, 0)$ (図 1(b) の点 Q) での y 方向速度. a_1 : v_1 の振動振幅. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 2$.

流入部長さ $s = 2$ におけるモード 1 流れの遷移を調べる図 3 が得られる. この図より, 対称定常流は臨界レイノルズ数 $Re_{P1} = 51.0$ でピッチフォーク分岐が生じ非対称定常流へ遷移し, $Re_{P2} = 65.2$ で非対称定常流は対称定常流へと還り, $Re_H = 111.1$ でホップ分岐により振動流へと遷移することがわかった.

流入部長さ $s = 0.5$ と 2 の場合に行ったものと同様な分岐解析を, $s \leq 4$ の範囲で行い, 各 s について臨界レイノルズ数 Re_{P1} , Re_{P2} , Re_H を評価した. その結果を図 6 に流れの遷移図として描いた. この図は $s_{c1} = 1.57$ を境に, 対称定常流が振動流へと遷移する分岐構造をもつものと, 対称定常流が非対称定常流へと遷移し, 再び対称定常流へと遷移した後に振動流へと遷移する分岐構造をもつものとに分かれることを表している.

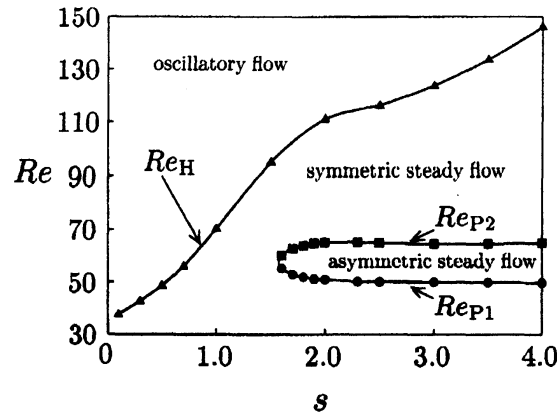


図 6: 遷移図. ●: ピッチフォーク分岐点. ■: 逆ピッチフォーク分岐点. ▲: ホップ分岐点.

4.1.2 モード2流れ

モード2流れ(2ユニットで1周期となる流れ)の数値シミュレーションの結果は、モード1流れとは異なり、より豊富な物理現象を含んでいる。ここでは、計算結果の代表例として流入部長さ $s = 0.5$ の場合を説明する。このときも小さいレイノルズ数では流れは対称定常流であるが、レイノルズ数を大きくすると、ピッチフォーク分岐が生じて、図 7(a) のような非対称定常流となる。レイノルズ数を 60 まで大きくすると、図 7(b)–7(d) のように、非対称な状態を保ちながら振動をするが、 $Re = 80$ では図 7(e)–7(g) のように管路の中心軸に対して対称な振動流となる。すなわち、1 周期にわたって時間平均を行うと対称流である。

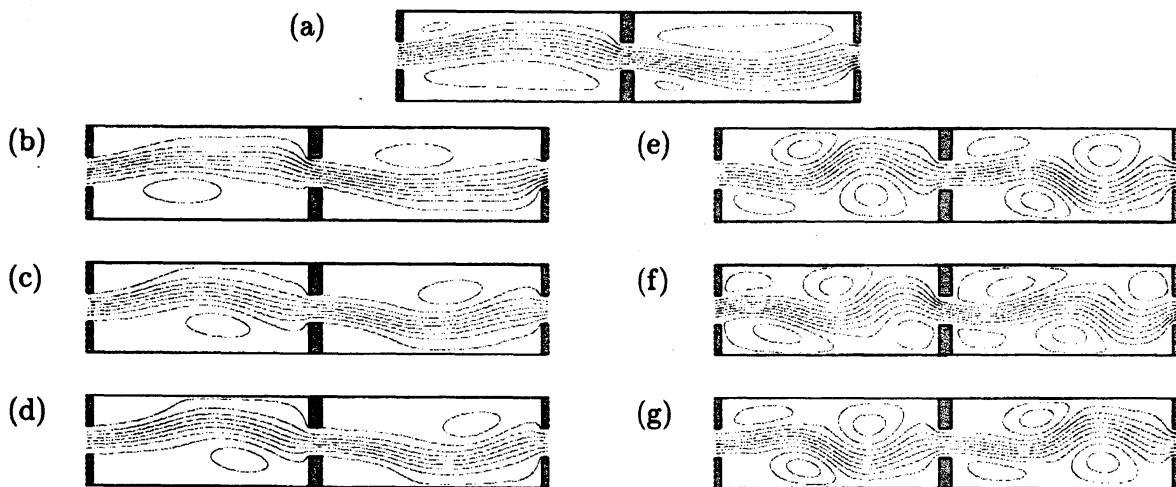


図 7: 流線図. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$. (a) 非対称定常流, $Re = 55$. (b)–(d) 非対称振動流, $Re = 60$. (e)–(g) 振動流, $Re = 80$. (b), (e) $t = t_0$ (点 Q において y 方向速度が最大となる時刻). (c), (f) $t = t_0 + T/4$. (d), (g) $t = t_0 + T$ (T は振動周期).

流入部長さ $s = 0.5$ の場合のモード2流れの遷移を詳しく調べるために、点 $(x, y) = (1.3, 0)$ での y 方向速度 v_1 とその振動振幅 a_1 の分岐構造を描く(図 8)。この流れが振動流となるとき、レイノルズ数が $Re \sim 70$ までは非対称な状態で振動をしているが、 $Re \sim 70$ を超えると、 x 軸を中心とした振動となる。対称な定常流は臨界レイノルズ数 $Re_{P1} = 38.6$ で不安定となり、ピッチフォーク分岐が生じて非対称定常流へと遷移する。また、このようにして生じた非対称定常流は $Re_{H2} = 58.2$ で亜臨界ホップ分岐²が生じることにより同じ周期をもつ振動流へと遷移する。

²この図では亜臨界分岐であることが見えにくいと拡大すると判明する

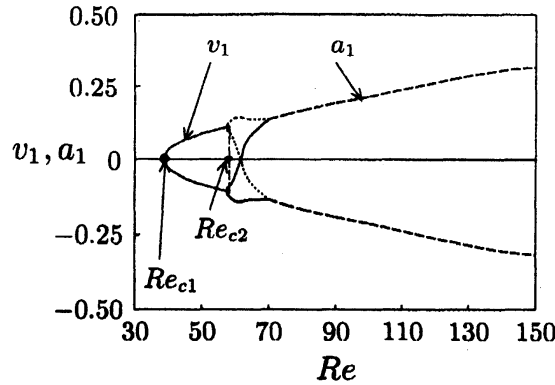


図 8: 分岐図. v_1 : 点 Q における y 方向速度. a_1 : v_1 の振動振幅. $E = 3$, $A = 7/3$. $s = 0.5$.

モード 2 流れの遷移図は図 9 のようになる. この図より, 流れは $s < 1.05$ のとき対称定常流から非対称定常流へと遷移したのち振動流へと遷移する分岐構造をもつ. 一方, $s > 1.05$ のとき対称定常, 非対称定常, 対称定常流へと遷移し最後に振動流へと遷移する分岐構造をもつ.

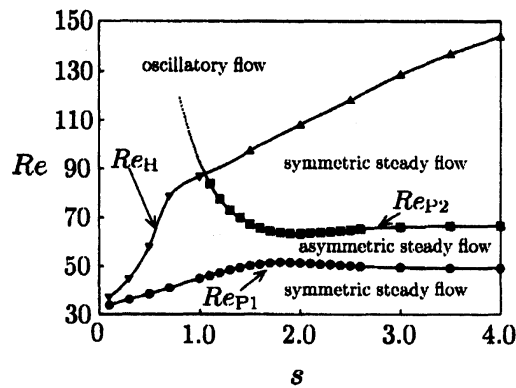


図 9: 遷移図. ●: ピッチフォーク分岐点. ■: 逆ピッチフォーク分岐点. ▼: 亜臨界ホップ分岐点. ▲: ホップ分岐点.

4.1.3 線形安定性解析

数値シミュレーションではモード 1 流れもモード 2 流れもピッチフォーク分岐とホップ分岐をすることがわかった. ピッチフォーク分岐では流入部長さ s が大きくなるとモード 1 流れとモード 2 流れの区別が難しくなる. ここでは, 対称定常流の線形安定性解析を行ない, 流れが対称定常流から非対称定常流へと遷移するピッチフォーク分岐点と逆ピッチフォーク分岐点を調べることで, 数値シミュレーション結果の確認を行う. 対称定常流を数値的に求め, モード 1 とモード 2 のそれぞれの攪乱について線形固有値方程式を解くと, 固有値が得られる. 固有値の例として $s = 2$ の場合のモード 1 とモード 2 の線形増幅率を図 10 に示す. この図からわかるように, たとえばモード 1 ではの攪乱もレイノルズ数が $51.4 \leq Re \leq 65.0$ の範囲で正の線形増幅率をもつ. すなわち, $Re_{P1} = 51.4$ で対称定常流は不安定となり, $Re_{P2} = 65.0$ で対称定常流に戻ることを表している.

流入部長さ $s \leq 4$ の範囲で線形安定性解析を行い, 臨界レイノルズ数をグラフにして整理すると図 11 のようになる. この図から, $s = 1.57$ よりも短い流入部長さのときには, 流れはモード 2 の攪乱についてのみ不安定となるが, これよりも大きい流入部長さのときにはモード 1 とモード 2 の両方の攪乱に対して不安定となることを確かめた. なお, 線形安定性解析から得られた臨界レイノルズ数と数値シミュレーションから評価した値との最大相対誤差は 1.38 % であり, 共に信頼できる結果であることを確認した.

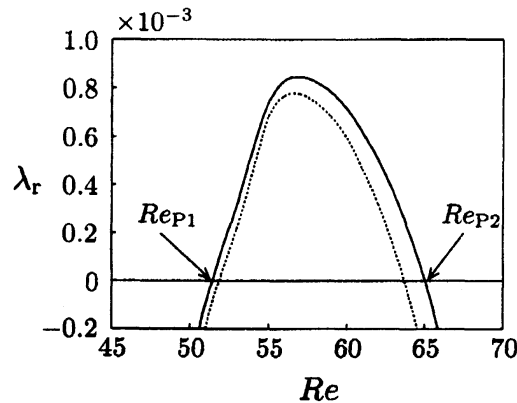


図 10: 線形増幅率 λ . $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 2$. 実線: モード 1, 破線: モード 2

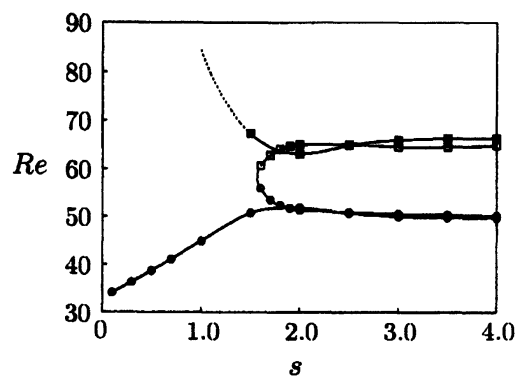


図 11: 遷移図. $\circ$: ピッチフォーク分岐点 (モード 1), $\bullet$: 逆ピッチフォーク分岐点 (モード 1), $\bullet$: ピッチフォーク分岐点 (モード 2), $\blacksquare$: 逆ピッチフォーク分岐点 (モード 2).

4.2 N ユニット連結管路内流れ

流入口で十分に発達したポアズイユ流が流入すると仮定し、流出条件にはゾンマーフェルト放射条件を課した数値シミュレーションを行った。ユニットの数 N は 12 を選んだ。このとき、3 番目のユニット管以降ではほぼ漸近的な流れ場となる。この流れの数値シミュレーション結果の中で、興味深い流れの例として、比較的小さな流入部長さ $s = 0.5$ の場合を説明する。このとき、どのような初期条件から出発しても流れは小さなレイノルズ数においては必ず対称定常流となる。このことを数値シミュレーションだけでなく実験でも確かめた。図 12(a) は $Re = 35$ のときの可視化写真である。図 13(a) は、 $Re = 58$ における流れ場であり、初期条件にかかわらず時間が十分に経つとこの流れ場、あるいは上下反転した流れ場となる。この図では $N = 12$ のうち、下流側の 6 ユニットのみを描いた。このような偏流した定常流も実験により確かめることができた (図 12(b), $Re = 55$)。この流れ場を初期条件 ($t = 0$) として、第 1 番目の管路の流入口へステップ形攪乱を加えたところ、この蛇行した流れの山が谷へ、谷が山へ変化し、 $t = 1000$ で図 13(b) のように第 7 番目 (図 13 での第 1 ユニット目) と第 8 ユニット目のユニット内で流れの蛇行の向きが逆転する流れへと変化した。また、第 10 番目のユニット内では偏流の向きが完全に反転している。 $t = 1600$ で図 13(c) のように、すべてのユニットで初期の蛇行の向きと逆になっている。

第 1 ユニットの流入口で加えた攪乱が下流へと伝播する過程を詳しくみるために、図 1(b) で P_1 から P_{12} までの奇数番目の各点での y 方向速度成分 v の時間変化率 $\partial v / \partial t$ を時間の関数として描くと図 14 のようになる。この図より、流入口で加えた攪乱は、伝播速度の異なる 2 種類の波として伝わっていくことがわかる。図 13 でみたような偏流の上下反転を起こす波は伝播速度の遅い方の波であり、点 P_3 より下流ではほぼ一定の波形をもち、どこまでも振幅が減衰することなく伝

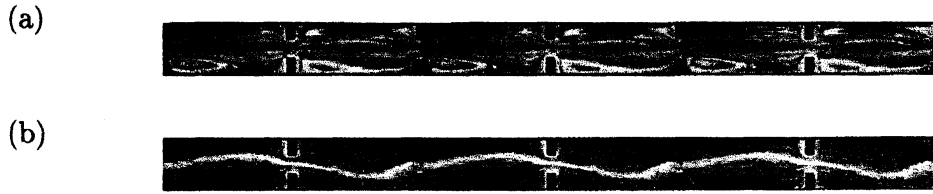


図 12: 可視化写真. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$. (a) 対称定常流, $Re = 35$. (b) 非対称定常流, $Re = 55$.

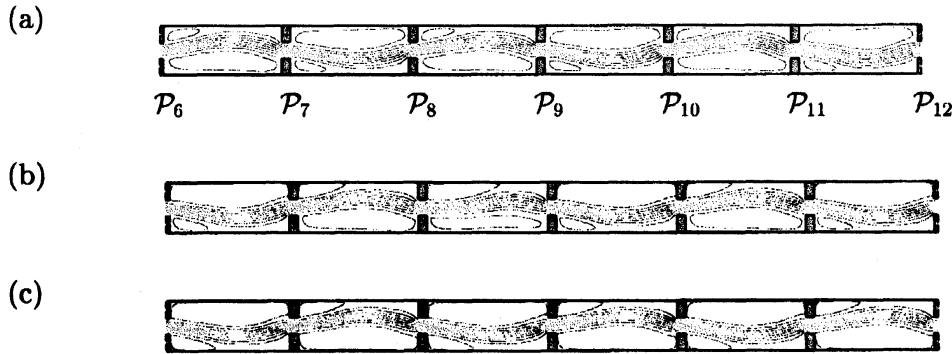


図 13: N ユニット流れの流れ場. 下流側 6 ユニット. α を 0 から -0.02 としたときの流れパターンの遷移過程. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 58$. (a) $t = 0$, (b) 1000, (c) 1600.

わる非常に面白い性質をもつ波である。遅い波はこれまでには知られていない興味深い波であるが、既に Mizushima, Yoshida and Takaoka[8] によって詳しい説明があるのでそちらに譲り、ここでは速い伝播速度で伝わる波について詳しく説明する。

速い波が管路を伝わる時、振動流れ場から対称定常流を差し引いて求めた攪乱流れ場は図 15(a)–15(c) のようになり、攪乱は振幅と波長を変えながら波束として下流へと伝わっていく。この速い伝播速度をもつ波（速い波）の伝播速度と増幅について詳しく調べる。図 14(a) の点 P_{11} での波束を取り出し拡大すると図 14(b) のようになる。この図で描かれているように、波束はある時刻 t_n ($n = 1, 2, \dots, N$) において各測定点での最大値と最小値をもつ。時刻 t_n における $\partial v / \partial t$ の最大値と最小値の差を a_n と定義する。こうして求めた波束の振動振幅の対数 $\ln a_n$ を縦軸にとり、横軸に t_n をとってグラフに描くと、そのグラフはある近似直線に漸近する。その直線の傾き σ は波束攪乱の増幅率を表す。この直線の傾き σ が正のとき、波束攪乱は下流に進むにつれ振幅が増幅し、対流不安定であると考えられる。傾きが負のとき減衰するので対流安定と呼ぶ。流入部長さ $s = 0.5$ の場合について、 $40 \leq Re \leq 80$ の範囲で増幅率 σ を評価した結果が図 17 である。この

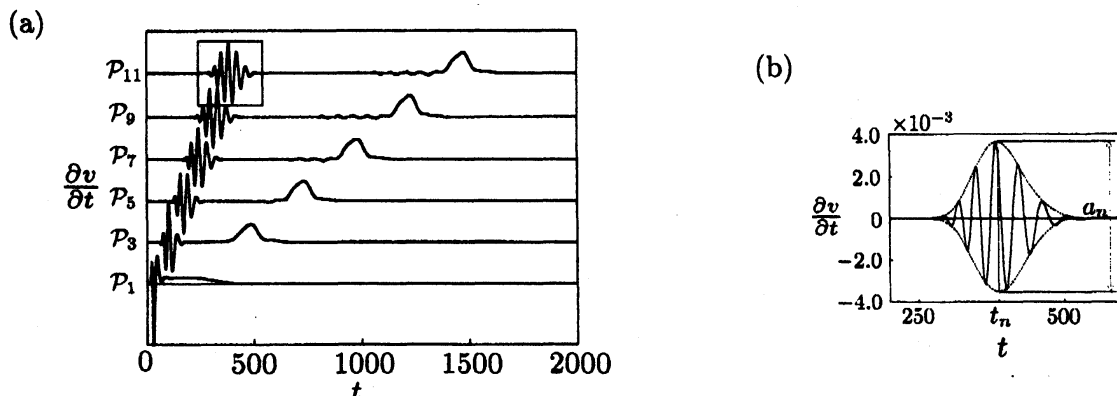


図 14: N ユニット流れの流れ場中を伝わる攪乱. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 58$. (a) α を 0 から -0.02 としたときの時間変化率 $\partial v / \partial t$. (b) 点 P_{11} における波束の拡大図.

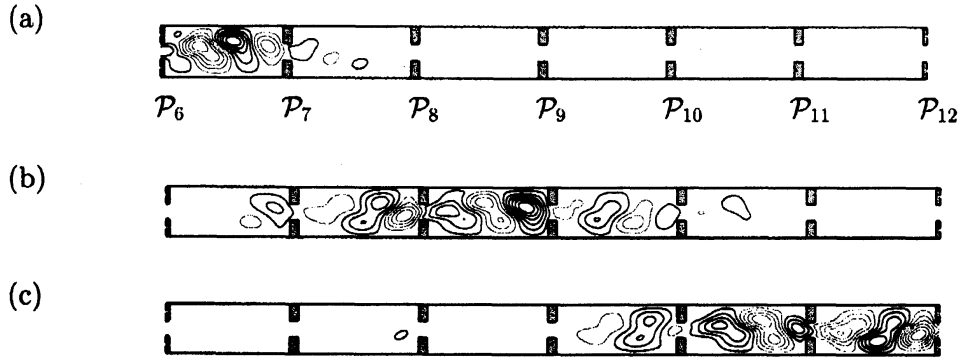


図 15: 攪乱を加えたとき ($\alpha = 0 \rightarrow -0.02$) としたときの攪乱場の伝播. 下流側 6 ユニット. $E = 3$, $A = 7/3$, $s = 0.5$, $Re = 58$. (a) $t = 200$, (b) $t = 300$, (c) $t = 400$.

図より, σ が負の値から正の値となるレイノルズ数が対流不安定の臨界レイノルズ数 $Re_C = 59.2$ であることがわかった.

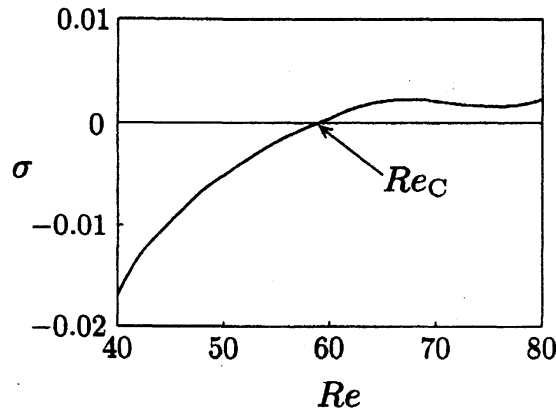


図 16: 波束攪乱の増幅率, $s = 0.5$.

同様の方法で流入部長さが $s \leq 4$ の範囲の各 s の値について, 局在した攪乱を第 1 ユニット流入口で与えて, 波束攪乱が対流不安定となる臨界レイノルズ数 Re_C を求め, グラフに描くと遷移図 17 の実線のようになる. この図ではモード 1 流れとモード 2 流れがホップ分岐を生じる臨界レイノルズ数をそれぞれ点線 (Re_{H1}) と破線 (Re_{H2}) で示した. 対流不安定性を生じる臨界レイノルズ数 Re_C (実線) とモード 1 流れがホップ分岐を生じる臨界レイノルズ数 Re_{H1} (点線) は $s \leq 1.5$ で, モード 2 流れがホップ分岐を生じる臨界レイノルズ数 Re_{H2} (破線) は $0.6 \leq s \leq 1.5$ で一致していない. この範囲ではモード 2 の逆ピッチフォーク分岐点とホップ分岐が $s = 1.05$ 付近で入れ替わることに加えて, N ユニット連結管路とモード 1 およびモード 2 との主流の形がそれぞれ異なり, 攪乱の伝わる経路の長さが違うことが両臨界レイノルズ数の相違を生み出していると考えられる. また, モード 2 流れがホップ分岐を生じる臨界レイノルズ数が対流不安定性の臨界レイノルズ数とわずかに異なるのは波束攪乱が 2 ユニットよりも長い範囲に広がっており, フロケの定理を適用し α ユニット (α : 実数) で 1 周期となる流れを考慮すればさらに良く一致する可能性は残されている. ただし, そのような作業は本質ではなく, 実際に計算を行うのは非常に難しい作業となる. これらの結果より, 周期的急拡大部を伝播する波束攪乱の対流不安定性の臨界条件を求めるには, 空間的に周期性を仮定した周期境界条件のもとで流れが振動流となるホップ分岐点を求めればその近似値が得られることが結論づけられる. また, その伝播する波束攪乱は周期条件のもとでホップ分岐を生じる攪乱とほぼ同様な性質をもつことがわかった.

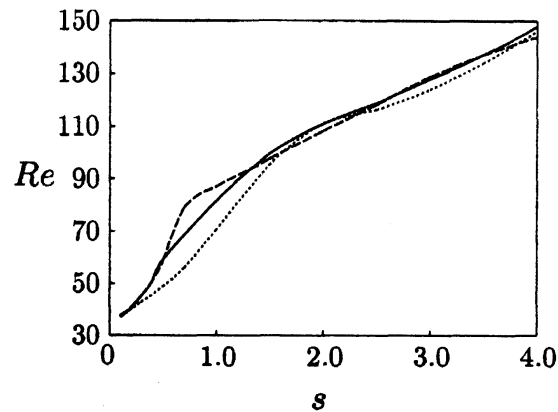


図 17: 対流不安定性の臨界レイノルズ数とモード 1 とモード 2 のホップ分岐が生じる臨界レイノルズ数の比較. 実線: 対流不安定性. 点線: モード 1. 破線: モード 2.

参考文献

- [1] 水島二郎, 藤村薫 (2003) 流れの安定性 (朝倉書店, Tokyo).
- [2] N. K. Ghaddar, K. Z. Korczak, B. B. Mikic and A. T. Patera (1986) Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels. Part 1. Stability and self-sustained oscillation. *J. Fluid Mech.* **163**, 99-127.
- [3] T. Adachi, H. Uehara (2001) Correlation between heat transfer and pressure drop in channels with periodically grooved parts. *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 4333-4343.
- [4] A. M. Guzmán, C. H. Amon (1994) Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle-Takens-Newhouse scenario. *Phys. Fluids* **6** (6), 1994-2002.
- [5] S. Blancher, R. Creff and P. Le Quere (2004) Analysis of convective hydrodynamic instabilities in a symmetric wavy channel. *Phys. Fluids* **16** (10), 3726-3737.
- [6] J. Mizushima, H. Okamoto and H. Yamaguchi (1996) Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part. *Phys. Fluids* **8** (11), 2933-2942.
- [7] J. Mizushima and Y. Shiotani (2001) Transitions and instabilities of flow in a symmetric channel with a suddenly expanded and contracted part. *J. Fluid Mech.* **434**, 355-369.
- [8] J. Mizushima, S. Yoshida and M. Takaoka (2006) Deflection-flipping waves in a symmetric channel with spatially periodic expansions and contractions. *J. Phys. Soc. Japan* **75**, 113401-1-4.