

LINEAR VISIBLE ACTIONS

ATSUMU SASAKI

ABSTRACT. Let V be a vector space over $\mathbb{C}$ and K a connected compact Lie group acting on V linearly. In [12, 13], we showed that the induced representation of K on the polynomial ring $\mathbb{C}[V]$ is multiplicity-free if and only if the linear K -action on V is strongly visible. In this note, we focus on four pairs $(K, V) = (Sp(n), \mathbb{C}^{2n})$, $(Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$, $(Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$, and $(G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$, which are new examples of strongly visible actions. We explain how to find a real vector space S which meets every K -orbit in V .

This note is a survey of the author's paper [12].

1. 導入

連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に線型に作用していると
する. このとき, 自然に多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上に $G_{\mathbb{C}}$ の表現 π が

$$(\pi(g)f)(v) = f(g^{-1}v)$$

によって定義される ($f \in \mathbb{C}[V], v \in V, g \in G_{\mathbb{C}}$). K を $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型とする. 2006
年の RIMS 研究集会¹ および 2007 年の RIMS 研究集会² では, 次の定理が成り立つことを
紹介した.

定理 1.1. 次の 2 条件は同値である.

- (i) 表現 $(\pi, \mathbb{C}[V])$ は $G_{\mathbb{C}}$ の無重複表現である³.
- (ii) K の V への線型作用は強可視的である.

ここで, 強可視的作用とは複素多様体に対して次で定義される概念である.

定義 1.2 ([5, Definition 3.3.1]). リー群 G の複素多様体 D への正則な作用が次の 2 条件を
満たすとき, この作用を**強可視的**であるという:

- (a) D の実部分多様体 S が存在して, $D' = G \cdot S$ は D の開集合である.
- (b) D' の反正則微分同相 σ が存在して, $\sigma|_S = \text{id}_S$ を満たし, かつ σ は D' 内の各 G -
軌道を保存する.

上の 2 条件を満たす実部分多様体 S を**スライス**という. スライス S は自然に全実部分
多様体となる ([5, Remark 3.3.2]). 強可視的作用は, [4, Definition 2.3] の意味で ‘可視的’
である ([5, Theorem 4]).

Received December 21, 2008. Accepted June 18, 2009.

¹「表現論と等質空間上の解析学」2006 年 8 月.

²「群の表現と等質空間上の調和解析」2007 年 9 月.

³このとき, $(G_{\mathbb{C}}, V)$ を無重複空間と呼んでいる.

近年、強可視的作用の研究はエルミート対称空間 [7] や旗多様体 [6] など、様々な設定において行われている。本講究録では、複素多様体として $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V を扱う。

(i) を満たす $(G_{\mathbb{C}}, V)$ は Kac [3] (V への作用が既約な場合), Benson–Ratcliff [1], Leahy [9] (V への作用が可約な場合) によって分類された。定理 1.1 の (i) $\Rightarrow$ (ii) は、分類表にある各 $(G_{\mathbb{C}}, V)$ に対してスライス S と反正則微分同相 σ を具体的に構成することで示される。一方、定理 1.1 の (ii) $\Rightarrow$ (i) は、無重複性の伝播定理によって一般的に示される。

本講究録では、定理 1.1 の (i) を満たす $(G_{\mathbb{C}}, V)$ で作用が既約な場合を扱い、その分類をスライスの構成の立場から整理する。また、次の 4 つの $(G_{\mathbb{C}}, V)$ について、コンパクトな実型 K の作用によるスライス S の構成法を具体的に解説する：

$$(G_{\mathbb{C}}, V) = (Sp(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^{2n}), (Spin(7, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^8), \\ (Spin(9, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^{16}), (G_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}^7).$$

特に、 S は $K \cdot S$ が V に一致するものを選ぶことを見る。その証明には、球面における作用の推移性を用いる (詳しくは §3 参照)。

なお、本講究録は [12] の一部を要約したものである。

2. 既約な場合の 3 つの TYPE

以下、定理 1.1 の (i) を仮定し、 $G_{\mathbb{C}}$ の V への作用が既約な場合を考える。Weyl のユニタリ・トリックによって、 $G_{\mathbb{C}}$ の V への作用はコンパクトな実型 K の V への作用と 1:1 に対応する。よって、コンパクトリー群との組 (K, V) で表すことにする。

2.1. まず、 K の V への作用の強可視性がエルミート対称空間における研究 [7] に帰着できる場合を Type 1 とする。

Type 1. コンパクトリー群 K の V への線型作用が、(必要ならば K を局所同型なものに取り替えて) ある非コンパクトな既約エルミート対称空間 $M = G/K$ (G は非コンパクトな単純リー群で K を極大コンパクト部分群として含む) の点 $o = eK \in M$ における K の等方表現として実現できる。

Type 1 に属する (K, V) は $(SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$, $(SU(n) \times \mathbb{T}, S^2(\mathbb{C}^n))$, $(SU(n) \times \mathbb{T}, \bigwedge^2(\mathbb{C}^n))$, $(Spin(10) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$, $(E_6, \mathbb{C}^{27})$ である。

エルミート対称空間 $M = G/K$ における可視的作用の研究は [7] で行われ、接空間 $T_o M$ 上の K の等方表現は [5, Theorem 18] で強可視的であることが示されている。

(K, V) が Type 1 のとき、スライス S はその次元が M の階数 (= G の実階数) に一致するものを選ぶことができる。

例 2.1. $(K, V) = (SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}, M(m, n; \mathbb{C}))$ とする。 $K \approx S(U(m) \times U(n))$ の V における作用は、 $M = G/K = SU(m, n)/S(U(m) \times U(n))$ に対する等方表現として実現される。実際に、 $G = SU(m, n)$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m, n)$ のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(K) + \mathfrak{p}$ とすると、 $T_o M \simeq \mathfrak{p} \simeq V$ である。接空間 $T_o M$ 上の K の等方表現を $\mathfrak{p}$ 上の随伴表現と同一

視する． $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を1つ選ぶと， $\mathfrak{p} = K \cdot \mathfrak{a}$ が成り立ち，よって $\mathfrak{a}$ はこの作用におけるスライスとなる⁴．スライスの次元は $\dim \mathfrak{a} = \mathbb{R}\text{-rank } G = \text{rank } G/K$ である．

2.2. 次に，コンパクトリー群 K が $U(p) \times Sp(q)$ と局所同型， $V = M(p, 2q; \mathbb{C})$ の形で与えられる場合をType 2とする．

Type 2. (K, V) が次のいずれかの場合である⁵：

- (i) $(U(2) \times Sp(n), M(2, 2n; \mathbb{C}))$ ($n \geq 2$).
- (ii) $(U(3) \times Sp(n), M(3, 2n; \mathbb{C}))$ ($n \geq 2$).
- (iii) $(U(m) \times Sp(2), M(m, 4; \mathbb{C}))$ ($m \geq 4$).

スライス S はその次元は (i); 3次元，(ii); 5次元 ($n = 2$)，6次元 ($n \geq 3$)，(iii); 6次元となるものを選ぶことができる (cf. [12, Section 4]).

2.3. 既約な (K, V) の分類のうち，Type 1にもType 2にも属さない次の4つをType 3とする⁶：

$$(2.1) \quad (Sp(n), \mathbb{C}^{2n}), (Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8), (Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16}), (G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7).$$

Type 3において，スライスの構成は“単位球面における推移的作用”が鍵となる．

W を内積 $(\cdot, \cdot)_W$ をもつ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．また， $S(W)$ を内積 $(\cdot, \cdot)_W$ に関する W 内の単位球面を表すとする．

Type 3. 次の条件 (T) を満たすコンパクトリー群 K_i と $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 W_i の列 $(K_1, W_1) \supset (K_2, W_2) \supset \cdots$ を抽出することで，スライスを構成することができる：

(T) K_i は W_i 内の単位球面 $S(W_i)$ に推移的に作用する ($i = 1, 2, \dots$).

3. 準備

Type 3の解説に入る前に，いくつかの準備が必要である．

3.1. まず，次のよく知られた補題を用意する．

補題 3.1. コンパクトリー群 G が W に線型に作用するという設定の下で， G が単位球面 $S(W)$ に推移的に作用するとき， $v_1 \in S(W)$ を選んで $W = G \cdot \mathbb{R}v_1$ と分解される．

コンパクトリー群 G の v_1 における等方部分群を G_{v_1} で表す．補題 3.1 の設定の下で， $W_1 = (\mathbb{R}v_1)^\perp$ を W における $\mathbb{R}v_1$ の直交補空間とする．コンパクトリー群 G は W の複素化 $W_{\mathbb{C}} = W + \sqrt{-1}W$ に対角に作用する．

⁴この場合， σ として V の標準的な複素共役写像を選ぶことができる．Type 1において，定義 1.2 を満たす反正則微分同相 σ の存在は [7, Lemma 2.4] で示されている．

⁵ $p \geq 4, q \geq 3$ とするとき， $\mathbb{C}[M(p, 2q; \mathbb{C})]$ 上の $GL(p, \mathbb{C}) \times Sp(q, \mathbb{C})$ の表現 π は無重複表現ではない．

⁶[11] では，Type 3 を $(Spin(9), \mathbb{C}^{16})$ とそれ以外に分けた ([11] ではそれぞれ Case 4, Case 2 と名付けた)．後者は， K -軌道空間が Type 1 に属するある (K, V) における軌道空間と一致するという解釈を与えている．例えば， $\mathbb{C}^8$ における $(Spin(7) \times \mathbb{T})$ -軌道空間は， $(SO(8) \times \mathbb{T})$ -軌道空間と一致する．

補題 3.2. 補題 3.1 の設定の下で, 等方部分群 G_{v_1} が単位球面 $S(W_1)$ に推移的に作用するならば, $v_2 \in S(W_1)$ を選んで

$$W_{\mathbb{C}} = G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2))$$

と分解される.

Proof. 等方部分群 G_{v_1} が単位球面 $S(W_1)$ に推移的に作用することより, 補題 3.1 から $W_1 = K_{v_1} \cdot \mathbb{R}v_2$ と分解される. よって,

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{C}} &= G \cdot \mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus W_1) \\ &= G \cdot \mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus G_{v_1} \cdot \mathbb{R}v_2) \\ &= G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2)). \end{aligned}$$

□

次の補題は補題 3.2 と同様に証明される.

補題 3.3. 補題 3.1 の設定の下で, $W_1 = (\mathbb{R}v_0)^\perp$ が次の 3 条件を仮定する.

- (a) 等方部分群 G_{v_1} の W_1 への作用は可約で, 2 つの G_{v_1} -不変な部分空間 W_2, W_3 の直和に分解される.
- (b) 等方部分群 G_{v_1} は単位球面 $S(W_2)$ に推移的に作用する.
- (c) $v_2 \in S(W_2)$ を 1 つ選び, v_2 における G_{v_1} の等方部分群を G_{v_1, v_2} とするとき, G_{v_1, v_2} は $S(W_3)$ に推移的に作用する.

このとき, $v_3 \in S(W_3)$ を選んで

$$W_{\mathbb{C}} = G \cdot (\mathbb{R}v_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3))$$

と分解される.

下の表は, コンパクトリー群 K が単位球面 $S(W)$ に推移的に作用するような組 (G, W) の例である (cf. [10, 2]).

G	W	$S(W)$
$SU(n)$	$\mathbb{C}^n$	S^{2n-1}
$Sp(n)$	$\mathbb{C}^{2n}$	S^{4n-1}
$Spin(7)$	$\mathbb{R}^8$	S^7
$Spin(9)$	$\mathbb{R}^{16}$	S^{15}
G_2	$\mathbb{R}^7$	S^6

TABLE 1. $S(W)$ に推移的に作用するコンパクトリー群 K

3.2. 次に、1次元トーラス $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ における $\mathbb{C}^n$ の作用を考えよう。任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して、 $R(v), I(v) \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ v の実部、虚部を表す。このとき、 $v \in \mathbb{C}^n$ は $v = R(v) + \sqrt{-1}I(v)$ と一意的に表される。

補題 3.4. 任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して、 $R(\alpha v)$ と $I(\alpha v)$ の $\mathbb{R}^n$ 上の内積 $(R(\alpha v), I(\alpha v))$ が 0 となる $\alpha \in \mathbb{T}$ が存在する。

Proof. $\alpha = e^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{T}$ を任意に選ぶ。 $s = (\|R(v)\|^2 - \|I(v)\|^2)/2$, $t = (R(v), I(v))$ とおく (ただし、 $\|v\|^2 := (v, v)$) と、

$$(R(\alpha v), I(\alpha v)) = \sqrt{s^2 + t^2} \sin(2\theta + \eta)$$

を満たす $\eta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が存在する。よって、 θ として $-\eta/2$ を選べばよい。 $\square$

4. TYPE 3 におけるスライスの構成

Type 3 におけるスライスの構成法を解説しよう。条件 (T) を用いる回数およびそれに伴い適用する補題によって、(2.1) で挙げた 4 つの (K, V) を次のように分ける：

	(K, V)	補題
(1)	$(Sp(n), \mathbb{C}^{2n})$	補題 3.1
(2)	$(Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$ と $(G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$	補題 3.2 + 補題 3.4
(3)	$(Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$	補題 3.3 + 補題 3.4

4.1. Type 3 (1). $K = Sp(n)$, $V = \mathbb{C}^{2n}$ とする。 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2n}$ を $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底とする。 $Sp(n)$ は $S(\mathbb{C}^{2n}) = S^{4n-1}$ に推移的に作用するので、補題 3.1 により次の定理が成り立つ。

定理 4.1. S を 1 次元のベクトル空間 $S = \mathbb{R}\vec{e}_1$ とする。このとき、 $V = K \cdot S$ と分解される。また、 S は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の複素共役写像に関してスライスとなり、よってこの作用は強可視的である。

注意 4.2. $(K, V) = (U(n), \mathbb{C}^n)$ は、 $U(n) \simeq S(U(n) \times U(1))$, $\mathbb{C}^n = M(n, 1; \mathbb{C})$ と見ることとで Type 1 に属する (cf. 例 2.1)。

一方、 $U(n)$ は $S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$ に推移的に作用するので (cf. Table 1), 補題 3.1 を適用することで 1 次元のスライスを構成することができる。よって、Type 3 (1) にも属すると考えられる。

なお、それぞれの方法で得られたスライスは (同型を除いて) 一致する。

4.2. Type 3 (2). Type 3 (1) は、単位球面 $S(V)$ にコンパクトリー群 K が推移的に作用することを用いてスライスを構成した (条件 (T) を 1 回用いた)。一方、Type 3 (2) および (3) は、コンパクト群 K は $S(V)$ には推移的に作用しないが、 V の実型 W 内の単位球面 $S(W)$ に推移的に作用することが分かる。

この節では、 $(K, V) = (Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$ の場合に S を構成しよう。 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_8$ を $\mathbb{C}^8$ の標準基底とする。

定理 4.3. S を 2 次元のベクトル空間 $S = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2$ とする。このとき、 $V = K \cdot S$ と分解される。

S の構成の鍵は、コンパクトリー群と単位球面の部分列

$$(Spin(7), S(\mathbb{R}^8)) \supset (G_2, S(\mathbb{R}^7))$$

を補題 3.2 に適用することである (条件 (T) を 2 回用いる).

Proof. 次の事実

(4.1a) $Spin(7)$ は $S(\mathbb{R}^8) = S^7$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

(4.1b) $\vec{e}_1$ における $Spin(7)$ の等方部分群は G_2 と同型である.

(4.1c) G_2 は $S(\mathbb{R}^7) = S^6$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

によって、補題 3.2 を適用することができる. よって、 $\mathbb{C}^8$ は $Spin(7)$ の作用によって

$$(4.2) \quad \mathbb{C}^8 = Spin(7) \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2))$$

と分解される.

次に、 V の任意の元 v をとる. 補題 3.4 によって $\alpha \in \mathbb{T}$ で $R(\alpha v)$ と $I(\alpha v)$ の $\mathbb{R}^8$ における標準内積が 0 となるものを選ぶことができる. この $\alpha \in \mathbb{T}$ に対して、 $v' = \alpha v$ とおく. 分解 (4.2) にしたがって $v' \in V$ は

$$v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(r_3\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2))$$

と表すことができる ($\exists g \in Spin(7), \exists r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$).

もし $r_1 = 0$ のとき、 $v' \in \sqrt{-1}\mathbb{R}^8$ である. 補題 3.1 によって $\sqrt{-1}\mathbb{R}^8 = Spin(7) \cdot \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2$ と分解されるので、

$$v = \alpha^{-1}v' \in K \cdot \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2 \subset K \cdot S.$$

一方、 $r_1 \neq 0$ とする. $Spin(7)$ は $SO(8)$ の部分群であるから $\mathbb{R}^8$ 上の標準内積を保存する. よって、

$$0 = (R(v'), I(v')) = (r_1\vec{e}_1, r_3\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2) = r_1r_3$$

となる. ゆえに $r_3 = 0$ となり、 $v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}r_2\vec{e}_2)$ となる. したがって、

$$v = \alpha^{-1}(g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}r_2\vec{e}_2)) \in K \cdot S.$$

以上より、 $V \subset K \cdot S$ が示された. 逆の包含関係は明らかである. □

定理 4.3 で述べた 2 次元のベクトル空間 S に対して、定義 1.2 の (b) を満たす反正則微分同相 σ が存在する. よって、この作用は強可視的である⁷.

$(K, V) = (G_2 \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^7)$ の場合も同様にして、部分列

$$(G_2, S(\mathbb{R}^7)) \supset (SU(3), S(\mathbb{C}^3))$$

を用いて 2 次元のスライスを構成することができる.

⁷証明は [12, Lemmas 5.9, 5.10] を参照. なお、[12] では $\mathbb{C}^8$ を複素ケーリー代数 $\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ として、 $Spin(7)$ を実ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ 上の線型同型群の部分群として実現して、 S と σ を記述している. G_2 は $\mathfrak{C}$ の自己同型群として、 $\mathbb{C}^7$ は $\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ の (ケーリー代数として) の虚部として実現している.

4.3. Type 3 (3). 最後に, $(K, V) = (Spin(9) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^{16})$ のときにスライスを構成しよう. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{16}$ を $\mathbb{C}^{16}$ の標準基底とする.

定理 4.4. S を 3 次元の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $S = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_9)$ とする. このとき, $V = G \cdot S$ と分解される.

S の構成の鍵は, コンパクトリー群と単位球面の部分列

$$(Spin(9), S(\mathbb{R}^{16})) \supset (Spin(7), S(\mathbb{R}^8)) \supset (G_2, S(\mathbb{R}^7))$$

を補題 3.3 に適用することである.

Sketch of Proof. 次の事実

(4.3a) $Spin(9)$ は $S(\mathbb{R}^{16}) = S^{15}$ に推移的に作用する (cf. Table 1).

(4.3b) $\vec{e}_1$ における $Spin(9)$ の等方部分群は $Spin(7)$ と同型である.

(4.3c) $Spin(7)$ の $\mathbb{R}^{16}$ の作用は可約で $\mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^8$ に分裂する.

と §4.2 で述べた事実 (4.1a)–(4.1c) を用いる. 補題 3.3 より

$$\mathbb{C}^{16} = Spin(9) \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_9))$$

と分解される. また, 補題 3.4 を用いて $\mathbb{T}$ の作用を考慮すると, $(Spin(7) \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^8)$ の場合と同様の議論によって $V \subset K \cdot S$ が示される. $\square$

定理 4.4 で述べた S に対して, 定義 1.2 の (b) を満たす反正則微分同相 σ が存在する⁸. よって, この作用は強可視的である.

以上で, Type 3 の場合がすべて示された.

REFERENCES

- [1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.
- [2] A. Borel, Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 1378–1380.
- [3] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.
- [4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

⁸[12] では $\mathbb{C}^{16}$ を複素ケーリー代数 $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}$ の部分空間として, $Spin(9)$ を例外型コンパクト単純リー群 F_4 の部分群として実現して, S と σ を記述している.

- [7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform, Groups* **12** (2007), 671–694.
- [8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, math.RT/0607004.
- [9] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.
- [10] D. Montgomery and H. Samelson, Transformation groups of spheres, *Ann. of Math.* **44** (1943), 454–470.
- [11] 笹木集夢, 既約な multiplicity-free 空間における可視的作用, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B7** : *Representation theory and analysis on homogeneous spaces* (editor: H. Sekiguchi) (2008), 83–99.
- [12] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009), 3445–3466.
- [13] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2010), doi: 10.1093/imrn/rnq100.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING, WASEDA UNIVERSITY, OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO, 169-8555 JAPAN.

E-mail address: atsumu@aoni.waseda.jp