

Painlevé 方程式の古典解

名大教養 梅村 浩 (Hiroshi Umemura)

特殊関数に関する標準的な本である Whittaker-Watson の Modern analysis (1902, ...) には次の関数が扱われている。

(0) Gamma 関数, Riemann ζ 関数;

(1) 超幾何関数およびその合流 (Bessel 関数等);

(2) 楕円関数, Keta 関数.

我々は代数微分方程式に関心があるので, (0) の族はここでは考察の対象から外す. (1) の族は 2 階線形常微分方程式の解であり, (2) の族は楕円曲線と関係している. 両者の間には深い関係があることが Gauss 以来知られている。

即ち超幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

は超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{ \gamma - (\alpha+\beta+1)x \} \frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

の解である。一方 $\lambda \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする楕円曲線 $y^2 = z(z-1)(1-\lambda z)$

の周期 $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(1-\lambda z)}} = u(1)$ と考えよ, $u(x)$ は $\alpha=\beta=\frac{1}{2}, \gamma=1$

とした超幾何微分方程式をみたす。

次のような全く別の見方もできる。(1)の族も(2)の族も Painlevé 方程式を通じて同じ枠組の中に入る。つまり(1)の族の関数も(2)の族の関数も Painlevé 方程式の特別な場合の解と考えられる。(1)の族の微分 Galois 群は線形化数群であり, (2)の族においては, 楕円曲線であるが, 両者は Painlevé 方程式の Galois 群 (=無限次元) を媒介として結ばれておりと考えられる。

具体的には, Painlevé の第 1 方程式 $y'' = 6y^2 + x$ は,
 $y'' = 6y^2 + ax - g_2$ ($a, g_2 \in \mathbb{C}$) と同値であり, ここで $a = 0$ とすれば $y'' = 6y^2 - g_2$. これは Weierstrass の p 関数 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ によって解ける。このようにして, (2)の族は Painlevé 方程式に含まれる。超幾何級数の仲間と Painlevé 方程式についてはこちら, および最後の表参照。

Painlevé 方程式を通して(1)と(2)の族を結びつけることは, 自然であり本質的なことと思われる。

§1 古典関数 ([U1], [U2] 参照)

古典関数の定義は前世紀から存在したが、解りやすさのものではなかった。現代的には次のようにやる。

有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ から出発して、次の許される操作を有限回くり返して得られる関数を古典関数という。

許される操作

- (1) 加減乗除, および微分 d/dx ;
- (2) 線形常微分方程式を解く;
- (3) アーベル関数に代入する。

(2) より、代数方程式が許される操作で解けることが分り、特に代数関数は古典関数となる。これらの操作は代数群と関係しており、理論的な意味を持つてゐることは [U1], [U2] で示した。

§2 Painlevé の6方程式 P_{II} の古典解

Painlevé方程式は6個の微分方程式 $P_I, P_{II}, \dots, P_{VI}$ から成る。2あり、次のように P_{VI} を順次特殊化することにより得られる。

$$P_{VI} \longrightarrow P_V \begin{array}{l} \longrightarrow P_{IV} \\ \longrightarrow P_{III} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow P_{II} \\ \longrightarrow P_{II} \end{array} \longrightarrow P_I.$$

典型的な場合である P_{II} について古典解がどのように現れ

あるかを説明する。 $P_{II}(\alpha)$

Painlevé の 2 方程式 $d^2 f/dx^2 = 2f^3 + xf + \alpha$ (α は複素パラメータ $x - \gamma$) は, 次の連立方程式系と同値である ([01] 参照).

$$S_{II}(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} = p - f^2 - \frac{x}{2}, \\ \frac{dp}{dx} = 2pf + \alpha + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

実際, $S_{II}(\alpha)$ より p を消去して $P_{II}(\alpha)$ が得られる。複素パラメータ $x - \gamma$ の次の変換を考える:

$$\lambda(\alpha) = -\alpha, \quad t_+(\alpha) = \alpha + 1, \quad t_-(\alpha) = \alpha - 1.$$

t_+, t_- は $\mathbb{Z}$ と同型な群を生成し, $\langle t_+, t_- \rangle = \langle t_+, t_- \rangle \rtimes \langle \lambda \rangle \triangleq \mathbb{Z} \rtimes S_2$ となる。この群はアフィンルート系 $\tilde{A}_1$ の Weyl 群に他ならない。各パラメータ α に対して, $P_\alpha, Q_\alpha \in \mathbb{C}(\alpha)$ 上の不定元とする。体の $\mathbb{C}(\alpha)$ -準同型写像 $T_{\alpha, \alpha-1}^*: \mathbb{C}(\alpha)(P_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1}) \rightarrow \mathbb{C}(\alpha)(P_\alpha, Q_\alpha)$ を

$$T_{\alpha, \alpha-1}^*(Q_{\alpha-1}) = -Q_\alpha + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{P_\alpha - 2Q_\alpha^2 - x},$$

$$T_{\alpha, \alpha-1}^*(P_{\alpha-1}) = -P_\alpha + 2Q_\alpha^2 + x$$

により定義する。同様に体の $\mathbb{C}(\alpha)$ -準同型写像 $T_{\alpha, \alpha+1}^*: \mathbb{C}(\alpha)(P_{\alpha+1}, Q_{\alpha+1}) \rightarrow \mathbb{C}(\alpha)(P_\alpha, Q_\alpha)$ を

$$T_{\alpha, \alpha+1}^*(Q_{\alpha+1}) = -Q_\alpha - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{P_\alpha}$$

$$T_{\alpha, \alpha+1}^*(P_{\alpha+1}) = -P_{\alpha} + 2(Q_{\alpha} + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{P_{\alpha}})^2 + x$$

により定義する. さらに $\mathbb{C}(x)$ -準同型写像 $I_{\alpha, -\alpha}^*: \mathbb{C}(x)(P_{-\alpha}, Q_{-\alpha}) \rightarrow \mathbb{C}(x)(P_{\alpha}, Q_{\alpha})$

$$I_{\alpha, -\alpha}^*(Q_{-\alpha}) = Q_{\alpha} + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{P_{\alpha}}, \quad I_{\alpha, -\alpha}^*(P_{-\alpha}) = P_{\alpha}$$

を導入しておく. 定義より

$$T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^*(Q_{-\frac{1}{2}}) = -Q_{\frac{1}{2}}, \quad T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^*(P_{-\frac{1}{2}}) = -P_{\frac{1}{2}} + 2Q_{\frac{1}{2}}^2 + x,$$

$$I_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^*(Q_{\frac{1}{2}}) = Q_{-\frac{1}{2}}, \quad I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^*(P_{\frac{1}{2}}) = P_{-\frac{1}{2}},$$

であることに注意しておく.

$$T_{\alpha, \alpha-1}^* \circ T_{\alpha-1, \alpha}^* = \text{Id}, \quad T_{\alpha-1, \alpha}^* \circ T_{\alpha, \alpha-1}^* = \text{Id}, \quad I_{\alpha, -\alpha}^* \circ$$

$$I_{-\alpha, \alpha}^* = \text{Id}, \quad I_{\alpha, -\alpha}^* \circ T_{-\alpha, -\alpha+1}^* \circ I_{-\alpha+1, \alpha-1}^* = T_{\alpha, \alpha-1}^* \quad \text{であること} \\ \text{を示せる.}$$

体の $\mathbb{C}(x)$ -準同型写像 $T_{\alpha, \alpha-1}^*: \mathbb{C}(x)(P_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1}) \rightarrow \mathbb{C}(x)(P_{\alpha}, Q_{\alpha})$ はアフィン平面の有理写像

$$T_{\alpha, \alpha-1}: \text{Spec } \mathbb{C}(x)[P_{\alpha}, Q_{\alpha}] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}(x)[P_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1}]$$

を定義する. 同様に 12 , 有理写像 $T_{\alpha, \alpha+1}$, $T_{\alpha, -\alpha}$ が定義される. これらは一対有理写像である.

有理写像

さて (p_α, q_α) が $S_{II}(\alpha)$ の解であるとするとき, $T_{\alpha, \alpha+1}$ は点 (p_α, q_α) で定義され, $T_{\alpha, \alpha+1}(p_\alpha, q_\alpha)$ は $S_{II}(\alpha-1)$ の解であることが示せる. $T_{\alpha, \alpha-1}, T_{\alpha, -\alpha}$ についても同様に点 (p_α, q_α) で定義され, $T_{\alpha, \alpha-1}(p_\alpha, q_\alpha), T_{\alpha, -\alpha}(p_\alpha, q_\alpha)$ はそれぞれ $S_{II}(\alpha-1), S_{II}(-\alpha)$ の解となる.

以上のことにより, 方程式系 $S_{II}(\alpha)$ の研究は, $\underbrace{\text{アインシュタイン系 } \hat{A}_I}_{\text{アインシュタイン系 } \hat{A}_I \text{ の}}$ の作用の基本領域 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 0\}$ 内に α が含まれる場合に帰着できる.

次の定理が証明できる.

定理 (1) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき, 方程式 $P_{II}(\alpha)$ には唯一つの代数解がある. (2) $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ のとき, Painlevé 方程式 $P_{II}(\alpha)$ には Riccati 方程式 $y' = -y^2 - \frac{\alpha}{2}$ の解で書ける (1-パラメータ) 解が存在する. (3) それ以外の解は古典的であり.

他の Painlevé 方程式についても, 上の定理の類似を証明することが究極の目的であるが, これに関する最近の進展について述べる. このノートの終りに, 各 Painlevé 方程式についてパラメータ空間, Weyl 群, Wall 上に出現する古典特殊関数, 代数解として現れる特殊多項式を表にしておいた. この問題は次の古典的な結果を含んでいることに注意しておく.

Painlevé の予想 - 西岡の定理 Painlevé の第 1 方程式

$y'' = 6y^2 + x$ の解は全て非古典的である ([N]).

Schwarz の結果 超幾何微分方程式の全ての解が代数的

となるようなパラメータ α, β, γ の決定 ([S]).

§3 解析のプロセス

第 2 方程式で説明する。方程式系 $S_{II}(\alpha)$ を考える。 p, q を不定元とする。微分

$$X(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x} + (p - q^2 - \frac{x}{2}) \frac{\partial}{\partial q} + (2pq + \alpha + \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial p} : \mathbb{C}(x, p, q) \rightarrow \mathbb{C}(x, p, q)$$

を考える。 K を微分体 $(\mathbb{C}(x), d/dx)$ の微分拡大, $\delta \in K$ の微分とする。微分

$$X(\alpha) : \mathbb{C}(x, p, q) \rightarrow \mathbb{C}(x, p, q)$$

は微分

$$\delta + (p - q^2 - \frac{x}{2}) \frac{\partial}{\partial q} + (2pq + \alpha + \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial p} : K(p, q) \rightarrow K(p, q)$$

に延長される。この微分も同じ記号 $X(\alpha)$ で表すことにする。

多項式環 $K[p, q]$ のイテール I が次の条件をみたすとき, I は $X(\alpha)$ -不変であるという: 任意の $f \in I$ に対し, $X(\alpha)f \in I$ となる。単項イテール (F) が $X(\alpha)$ -不変のとき, 多項式 $F \in K[p, q]$ は $X(\alpha)$ -不変であるという。これは, $X(\alpha)F = GF$

となる多項式 $G \in K[p, \delta]$ が存在することと同値である。定数でない (つまり, $F(0,0) \neq F(p, \delta)$ である) 不変多項式 $F(p, \delta)$ の 0 点 $V(F) \subset \text{Spec } K[p, \delta]$ は $\text{Spec } K[p, \delta]$ の $X(\alpha)$ -不変曲線とよぶ。

幾何学的には, $X(\alpha)$ はアフィン平面 $\text{Spec } K[p, \delta]$ 上のベクトル場を定義し, ベクトル場 $X(\alpha)$ は不変曲線 $F=0$ に沿って流れていることを意味している。

定理 1 の証明は次のように進行する。

I 不変曲線の存在するための, α についての必要条件を求める。

もっと正確に言えば, $(K[X], d/dX)$ の微分拡大体 K が存在して, $X(\alpha)$ -不変曲線が $\text{Spec } K[p, \delta]$ 上に存在するための, α についての必要条件を求める。

答 $-\frac{1}{2} < \alpha \leq 0$ なら $X(\alpha)$ -不変曲線は存在しない。

この結果を方程式 $P_{11}(\alpha)$ の解の性質と結びつけるのに, 次の定理を使う ([U1] 参照)。

定理 $X(\alpha)$ -不変曲線が存在しなければ, α の α についての方程式系 $S_{11}(\alpha)$ の任意の解は, 代数的であるか非古典的であ

3. $(p(x), f(x))$ が λ に対して $\mathbb{C}(x)$ 上代数的である解を代数解としよう,
 $(p(x), f(x))$ が λ に対して古典的である解を古典解としよう. 従って
 非古典解とは, $(p(x), f(x))$ のいずれかが非古典的となる解のことである.)

この定理により, $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 0$ かつ $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ ならば微分方程式
 系 $S_1(\alpha)$ の解は非古典的である. 但し代数解を除く.

$\{\alpha \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 0\}$ がアフィン Weyl 群の基本領域であるこ
 とから, 次の結論を得る.

結論 $\alpha \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ であれば, $S_1(\alpha)$ の任意の解は非古典的.
 但し, 代数解を除く.

II 不変曲線を決定する.

I より不変曲線が存在する可能性のあるのは, $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$
 の場合に限る. $\alpha = -\frac{1}{2}$ のとき, $p=0$ が不変曲線であり, この
 場合不変曲線は $p'=0$ に限ることが示される. これより $\alpha =$
 $-\frac{1}{2}$ ならば $S_2(\alpha)$ の古典解は $q' = -q^2 - \frac{x}{2}$, $p=0$ に限ることが
 証明できる. Weyl 群の作用を使って次の結論を得る.

結論 $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ のときの古典解が決定される, 但し代数
 解を除く.

III 代数解を決定する.

I, II は同じ枠組の中で扱えるが, III はやや性格が異なる。

§4 これまで知られていた結果と新しい結果

第1方程式 P_I については, I, II のみで解析が終り §2 で述べた Painlevé-西岡の定理が証明できる(西岡 [M], 梅村 [U]).

第2方程式 P_{II} については, I, II は野海 [N] による。III はそれ以前に村田 [M] に F, G 行われた。

第4方程式 P_{IV} については, I および II の一部が岡本 [O] により, G 行われた。村田は [M] にありて代数解を決定した。

第3方程式 P_{III} となると難しさが一段増すが, I, II, IV は村田により, G 行われた^(M2)。その方法は, P_{II} , P_{IV} の場合も含めて, 直接に計算をするものであり, そのまま P_V , P_{VI} に適用するのは困難であった。

1992年の春から, 渡辺文彦とともに P_V , P_{VI} を分析するため, P_{II} , P_{IV} についての既知の結果の証明をできるだけ単純な原理に還元するように努力した。その結果, P_{II} , P_{IV} , P_{III} についての上記の結果の証明が簡略化され, P_V , P_{VI} について I の過程 (現在整理中であるが, 多分 II の過程も) を完遂することに成功した ([UW1, 2], [W]).

以上, 日本人の名前のみ挙げたが, その前に旧ソ連の教

学者 Yablonskii, Vorob'ev, Lukashovich, Gromak フランスの Airault の貢献があったことを忘れてはならない。

§5 我々の方法による分析

我々の方法を使うと, §3 の分析が如何に進行するか, P_{11} を使って説明する. 都により過程 I に限定する. 我々の方法の特徴は, 次の2点にある: (1) ベクトル空間の自然でない基底は使用しない; (2) できる限り計算を避けるようにする. ベクトル空間に自然な基底が存在しなければ, *coordinate free* に議論を進めることと(1)は意味する. P_V, P_H では計算が大変になるのは予想されるので, (2)が必要となる。

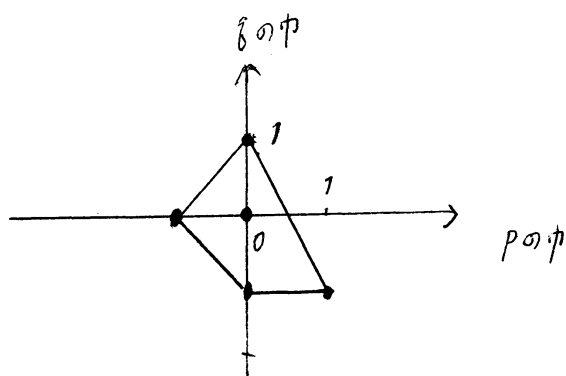
§3 の記号を用いて, 定数でない多項式 $F \in K[p, \{f\}]$ (K は $\mathbb{C}(x)$ の微分拡大体) が $X(x)$ -不変であるとする. つまり

$$(5.1) \quad X(x)F = G F$$

となる多項式 $G \in K[p, \{f\}]$ が存在するとする. $\partial/\partial f \in f^{-1}$, $\partial/\partial p \in p^{-1}$ に置きかえて微分

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial x} + (p - f^2 - \frac{x}{2}) \frac{\partial}{\partial f} + (2pf + x + \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial p}$$

の Newton 多角形を書くと, 次のようになる。



等式 (5.1) は p の中, f の中に関する 2 次元 (=2 方向) の情報を含んでいる。2 次元では扱いた

くないので 1 次元化して, (5.1) より F に関する有用な情報を引き出す。つまり p, f に重みをつける。上の Newton 多角形に傾き $-\frac{1}{2}$ の線分が現れることより, p の重さを 2, f の重さを 1 とする。これにより $K[p, f]$ が次数付環となる:

$$K[p, f] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d,$$

($R_d = 0$ および重さ d の多項式のなす K -ベクトル空間)。この分解に対して, 微分 $X(\alpha): K[p, f] \rightarrow K[p, f]$ も斉次作用素に分解される:

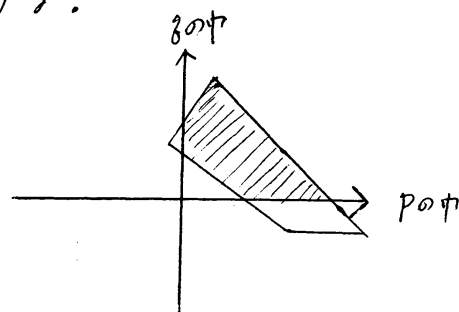
$$X(\alpha) = X_1 + X_0 + X_{-1} + X_{-2},$$

ここで $X_1 = (p - f^2) \partial/\partial p$, $X_0 = \partial/\partial x$, $X_{-1} = -x/2 \cdot \partial/\partial f$, $X_{-2} = (x + \frac{1}{2}) \partial/\partial p$ である。 X_i ($-2 \leq i \leq 1$) は重さ i の作用素である。つまり $X_i(R_d) \subset R_{d+i}$ が任意の $d \in \mathbb{N}$ により成り立つ。

注意 $X(\alpha)$ の Newton 多角形より, F の Newton 多角形を決めることができる。 F の Newton 多角形は $X(\alpha)$ に出現する辺と

平行な辺で囲まれた4辺形と第1象限の共角部分となることが示せる。但し退化した場合もありうる。

左図参照。



F を逐次分解する:

$$F = F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0, \quad F \in R_d \quad (0 \leq d \leq m), \quad F_m \neq 0.$$

等式 (5.1) は

$$(5.2) \quad (X_1 + X_0 + X_{-1} + X_{-2})(F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0) \\ = G(F_m + F_{m-1} + \cdots + F_0)$$

と書ける。これより $G \in R_1 + R_0$ が結論できる。 $G = g_1 g + g_0$, $g_1, g_0 \in K$ と書ける。これを (5.2) に代入して、両辺の同じ次数の項を比較すると

$$(5.3) \quad X_1 F_d = g_1 g F_d + g_0 F_{d+1} - X_0 F_{d+1} - X_{-1} F_{d+2} - X_{-2} F_{d+3}, \\ -3 \leq d \leq m$$

を得る。ここで, $F_{m+3} = F_{m+2} = F_{m+1} = 0$, $F_{-1} = F_{-2} = F_{-3} = 0$

とする。 (5.2) と (5.3) は同値である。

K -algebra 準同型 $\varphi: K[P, g] \rightarrow K[T]$ を $\varphi(g) = T$, $\varphi(P) = 2T^2$ により定義する。次の図式は可換に今る。

$$(5.4) \quad \begin{array}{ccc} K[P, \zeta] & \xrightarrow{\varphi} & K[T] \\ X_1 \downarrow & & \downarrow T^2 \frac{d}{dT} \\ K[P, \zeta] & \xrightarrow{\varphi} & K[T] \end{array}$$

従って, $\ker \varphi = (2\zeta^2 - p)$ は X_1 -不変である。実際 $X_1(2\zeta^2 - p) = -2\zeta(2\zeta^2 - p)$ となる。

次に K -代数準同型 $\psi: K[P, \zeta] \rightarrow K[T]$ を $\psi(\zeta) = T$, $\psi(p) = 0$ によって定義すると, 次の図式は可換となる:

$$(5.5) \quad \begin{array}{ccc} K[P, \zeta] & \xrightarrow{\psi} & K[T] \\ X_1 \downarrow & & \downarrow -T^2 \frac{d}{dT} \\ K[P, \zeta] & \xrightarrow{\psi} & K[T] \end{array}$$

従って, $\ker \psi = (p)$ は X_1 -不変となる。実際 $X_1(p) = 2\zeta p$ が成立する。

注意 (5.4), (5.5) は 次の図式を可換にする 斉次 K -代数準同型全体 Φ に他ならない:

$$\begin{array}{ccc} K[P, \zeta] & \xrightarrow{\Phi} & K[T] \\ X_1 \downarrow & & \downarrow T^2 \frac{d}{dT} \\ K[P, \zeta] & \xrightarrow{\Phi} & K[T] \end{array}$$

可換図式 (5.4), (5.5) が我々を計算から解放する。

可換図式 (5.4), (5.5) を使って, 数学的帰納法により, 次の 2 つの補題が証明できる.

補題 d, k, l を整数とし $d \geq 0, 1 \leq l \leq k$ をみえたとする. A を R_d に属する多項式とし, $\mu' \in K$ とする. $1 \leq l' \leq l$ なる任意の整数 l' に對して $\mu' - d + 4l' - 4 \neq 0$ でありかつ A が合同式 $X_1 A \equiv \mu' g A \pmod{(2f^2 - p)^k}$ をみたすならば, $A \equiv 0 \pmod{(2f^2 - p)^l}$ である.

補題 d, k, l, A, μ' を上と同様とする. $1 \leq l' \leq l$ なる任意の整数 l' に対して $\mu' + d - 4l' + 4 \neq 0$ が成立しかつ A が合同式 $X_1 A \equiv \mu' g A \pmod{p^k}$ をみたすならば, $A \equiv 0 \pmod{p^l}$ である.

これら 2 つの補題を用いて, 漸化式 (5.3) を研究する.

$d = m$ のとき, (5.3) は

$$X_1 F_m = g_1 g F_m$$

となる. 上の補題のみを用いて, $F_m = c p^a (2f^2 - p)^j$ ($c \in K$) $\wedge$ $g_1 = 2(\lambda - j)$ でありことが証明できる. F を $\frac{1}{c} F$ として置きかえることにし, 最初から $c = 1$ とする.

$$F_m = p^a (2f^2 - p)^j \quad (a, j \text{ の } \lambda - j \neq 0 \text{ である}).$$

と仮定してより. $d = m - 1$ のとき (5.3) は

$$X_1 F_{m-1} = g_1 g F_{m-1} + g_0 F_m - X_0 F_m$$

となるが, 上の補題のみを用いて $F_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^a (2f^2 - p)^j}$

が示せる。よ、 $2 \quad F_{m-1} = 0$. さらに $g_0 = 0$ もこれから等ける。

同様にして、 ρ の漸化式 ($d=m-2$) と補題より、多項式の計算は一切しなくて

$$F_{m-2} = j \times p^i (2f^2 - p)^{j-1}$$

が示せる。

さらに漸化式 ($d=m-3$) と補題より、ここでも計算は必要なくて、

$$p(2f^2 - p)F_{m-3} = c f p^a (2f^2 - p)^j \quad (c \in K)$$

が示せる。

これを漸化式に代入すると、 p, f にわたる3次式の計算により

$$c = 2\alpha(\alpha + \frac{1}{2}), \quad i(\alpha + \frac{1}{2}) = j(\alpha - \frac{1}{2})$$

が導かれる。とくに $\alpha = \frac{i+j}{2(i-j)}$ である。

以上より、不変曲線が存在すれば α は有理数であり $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$ であることが証明できた。即ち §3 の I の答が得られた。

上の2つの補題のみを用いて、§3 の II 不変曲線の決定を行うことができる。この場合も計算は、ほとんど必要ない。

我々の方法の特色をまとめておこう。

- (1) 微分作用素 $X(\lambda)$ の Newton 多角形 より, p, f の重さを決める.
- (2) p, f の多項式が $2f^2 - p$, p の中で割り切れることを主張する補題を使う. これらの補題は可換図式 (5.4), (5.5) から導かれる.

(2) により, 計算を避けることができる. このことは P_{III} , P_V , P_{VI} の研究で重要になる. 一方, P_{III} , P_V , P_{VI} の研究において, 2種類の重さを導入する必要がある. このとき (1) が力を発揮する. 詳しくことは [UW], [W] を参照されたい.

表

	パラメータ空間	Weyl 群	Wall 上の古典解	代数関数解
P_I	$\mathbb{C}^0$	Id		
P_{II}	$\mathbb{C}$	$\tilde{A}_1$	Airy 関数	Yablonskii - Vorob'ev 多項式
P_{III}	$\mathbb{C}^2$	$\tilde{B}_2$	Bessel 関数	
P_{IV}	$\mathbb{C}^2$	$\tilde{A}_2$	Hermite 関数	Hermite 多項式, 岡本多項式
P_V	$\mathbb{C}^3$	$\tilde{A}_3$	全流超幾何	Laguerre の多項式
P_{VI}	$\mathbb{C}^4$	$\tilde{D}_4$	超幾何関数	Jacobi の多項式

REFERENCES

- [M 1] Y. Murata, *Rational solutions of the second and the fourth Painlevé equations*, Fuccialaj Ekvacioj **28** (1985), 1–32.
- [M 2] ———, Preprint ?.
- [N] K. Nishioka, *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. Journal **109** (1988), 63–67.
- [No] M. Noumi, Private cominucations (1986, 1987).
- [O 1] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations III*, Math. Ann. **275** (1986), 221–255.
- [O 2] ———, Private note (1987).
- [S] H. A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes dargestellt*, J. Reine Angew. Math. **75** (1873), 292–335.
- [U 1] H. Umemura, *On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé*, Nagoya Math. J. **117** (1990), 125–171.
- [U 2] H. Umemura, *Birational automorphism groups and differential equations*, Nagoya Math. J. **119** (1990), 125–171.
- [UW 1] H. Umemura and H. Watanabe, *On the classification of the solutions of the second and the fourth Painlevé equations*, in preparation.
- [UW 2] ———, *On the classification of the solutions of the third Painlevé equation*, in preparation.
- [W] H. Watanabe, *On the solutions of the fifth and sixth Painlevé equations*, in preparation.