

グラフ理論におけるNL-完全な問題

早稲田大学理工学部 深沢良彰

相模工業大学工学部 岩田茂樹

1. 準備

チューリング機械とは、有限個の状態をもつ制御部と2方向の読み取り専用の入力テープと2方向に読み書き可能な作業テープからなる機械のことである。この機械は受理状態に入った時には必ず停止する。 $L, M \subseteq \Sigma^*$ をアルファベット Σ 上の言語とし、NLを対数領域において非決定性チューリング機械によって認識できる言語のクラスとする。このとき

(1) 次のような関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ がある時、 L は M に還元できる ($L \leq M$ と書く)。

(a) f は決定性チューリング機械で対数領域で計算可能である。

(b) $x \in \Sigma^*$ なるすべての x に対して、 $x \in L$ と $f(x) \in M$ は同値である。

(2) L がNL-困難であるとは、すべての $M \in NL$ に対して、

$M \leq L$ となることである。

(3) L が NL-完全であるとは, $L \in NL$ であり, L が NL-困難であることをいう。

グラフ理論に関する用語は Berge [1] または Harary [5] に従う。

定理 1.1 [11] 以下のように定義される GAP (Graph Accessibility Problem) は NL-完全である。

入力: 有向グラフ $G=(X,A)$, $x_1, x_n \in X$

性質: G には x_1 から x_n への有向道がある。

系 1.1 次の問題 $GAP(k)$ も NL-完全である。

入力: 有向グラフ $G=(X,A)$, $x_1, x_n \in X$, 正整数 k

性質: G には x_1 から x_n への長さ k 以下の有向道がある。

定理 2.2 [7] 次の問題は NL-完全である。

(1) CYCLE

入力: 有向グラフ $G=(X,A)$

性質: G は少なくとも 1 つのサイクルをもつ。

(2) STRONG

入力: 有向グラフ $G=(X,A)$

性質: G は強連結である。

系 1.2 次の問題 $CYCLE(k)$ も NL-完全である。

入力: 有向グラフ $G=(X,A)$, 正整数 k

性質： G は長さ k 以下のサイクルをもつ。

以下にこの論文で考察されている問題を記述する。これらは次節で NL-完全であることを示す。

(1) DIAM(k)

入力：有向グラフ $G=(X,A)$, 正整数 k

性質： G の直径は k 以下である。

(2) RAD(k)

入力：有向グラフ $G=(X,A)$, G の中心 $x_1 \in X$, 正整数 k

性質： G の半径は k 以下である。

GAP(k), CYCLE(k), DIAM(k) および RAD(k) については, 無向グラフにおいても考えることができる。これらを $\text{UGAP}(k)$, $\text{UCYCLE}(k)$, $\text{UDIAM}(k)$ および $\text{URAD}(k)$ と各々呼ぶ。

(3) NOT-MM

入力：無向グラフ $G=(X,E)$, G のマッチング $F \subseteq E$

性質： F は G の最大マッチングでない。

(4) NOT-FNS ℓ

入力：有向グラフ $G=(X,A)$

性質： G はサイズ ℓ のフィードバック点集合をもたない。

(5) NOT-FAS ℓ

入力：有向グラフ $G=(X,A)$

性質： G はサイズ ℓ のフィードバック辺集合をもたない。

(6) CONL

入力：有向グラフ $G=(X, A)$

性質： G は ℓ -連結である。

(7) ACONL

入力：有向グラフ $G=(X, A)$

性質： G は ℓ -辺連結である。

2. 問題の NL-完全性

定理 2.1 $\text{DIAM}(\ell)$ は NL-完全である。

定理 2.2 $\text{RAD}(\ell)$ は NL-完全である。

以上証明略

定理 2.3 [1] あるマッチング F が最大であるための必要十分条件は、飽和していない 2 点を結ぶ交互通路が存在しないことである。

定理 2.3 より、ただちに次の系を得る。

系 2.1 あるマッチング F が最大であるための必要十分条件は、飽和していない 2 点を結ぶ交互道が存在しないことである。

定理 2.4 NOT-MM は NL-完全である。

(証明) $G=(X, E)$ を与えられた無向グラフ, F を G のマッチングとする。NOT-MM が NL に入ることを証明するために、次のように動作する非決定性チューリング機械を作る。

begin

X に含まれる点の対 x, y を非決定的に選ぶ。

if x から y への交互道が存在するなら

then halt, F は最大マッチングでない。

end

$GAP \leq NOT-MM$ を示すために、有向グラフ $G=(X, A)$ から無向グラフ $G'=(X', E')$ を次のように構成する。

$$X' = X \cup \{x' \mid x \in X\} \cup \{s, t\}$$

$$E' = \{(x, x') \mid x \in X\} \cup \{(x_i, x_j') \mid (x_i, x_j) \in A\} \\ \cup \{(s, x_1'), (x_n, t)\}$$

以下に G に x_1 から x_n への有向道が存在することと、 $E'' = \{(x, x') \mid x \in X\}$ が G' の最大マッチングでないことが同値であることを示す。明らかに E'' は G' のマッチングであり、 s と t は飽和されていない点である。もし G に x_1 から x_n への有向道 $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_k, x_n)$ (但し $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$) があれば、 E'' に関して s と t との間に交互道 $(s, x_1'), (x_1', x_1), (x_1, y_1'), (y_1', y_1), (y_1, y_2'), (y_2', y_2), \dots, (y_k', y_k), (y_k, x_n'), (x_n', x_n), (x_n, t)$ が存在する。よって系 2.1 より E'' は G の最大マッチングでない。

逆にもし G に x_1 から x_n への有向道がなければ、明らかに G' においては s と t との間に交互道が存在しない。なぜならば、

s と t のみが G' における唯一の飽和していない点だからである。よって E'' は G' の最大マッチングである。

故に, NOT-MM は NL-完全である。 Q.E.D.

定理 2.5 NOT-FNSL は NL-完全である。

定理 2.6 NOT-FASL は NL-完全である。

定理 2.7 CONL は NL-完全である。

以上証明略。

定理 2.8 ACONL は NL-完全である。

(証明) ACONL が NL に入ることは容易にわかる。

ACONL が NL-困難であることを証明するために STRONG が ACONL に還元できることを示す。有向グラフ $G=(X,A)$ から, 次のように新しい有向グラフ $G'=(X',A')$ を作る。

$$X' = \{[x, i] \mid x \in X, 1 \leq i \leq l\}$$

$$A' = \{([u, i], [v, j]) \mid (u, v) \in A, 1 \leq i, j \leq l\}$$

この G' の構成は明らかに対数領域で行なうことができる。

G が強連結であると仮定する。 $[u, i]$ と $[v, j]$ を G' に含まれる任意の相異なる 2 点であるとする。まず, $[u, i]$ から $[v, j]$ への辺が互いに素な本数の有向道があることを示す。

Case 1. $u \neq v, (u, v) \in A$

Subcase 1. $i \neq j$. G は強連結であるので, G には v から u への有向道 $y_1, y_2, \dots, y_m, u$ が存在する。Fig. 2.1(a)

参照。よって G' には
 $[u, i]$ から $[v, j]$ へ
 $l-2$ 本の有向道 $[u, i],$
 $[v, k], [y_1, k], \dots, [y_m, k],$
 $[u, k], [v, j]$ ($1 \leq k \leq l,$
 $k \neq i, j$) と 2 本の有向道
 $[u, i], [v, j]$ および
 $[u, i], [v, i], [y_1, j], \dots,$
 $[y_m, j], [u, j], [v, j]$ が
 存在する。しかもこれ
 ら l 本の有向道はすべ
 ての辺について互いに
 素である。

Subcase 2. $i = j$.

G において有向道 $v,$
 $y_1, y_2, \dots, y_m, u$ が存在

する。この時 G' では $[u, i]$ から $[v, i]$ へ $l-1$ 本の有向道 $[u, i],$
 $[v, k], [y_1, k], \dots, [y_m, k], [u, k], [v, i]$ ($1 \leq k \leq l,$
 $k \neq i$) および
 1 本の有向道 $[u, i], [v, i]$ が存在する。Fig. 2.1 (b) 参照。こ
 こでも l 本の有向道は辺に関して互いに素である。

Case 2. $u \neq v \wedge (u, v) \notin A$. G は強連結であるので, u

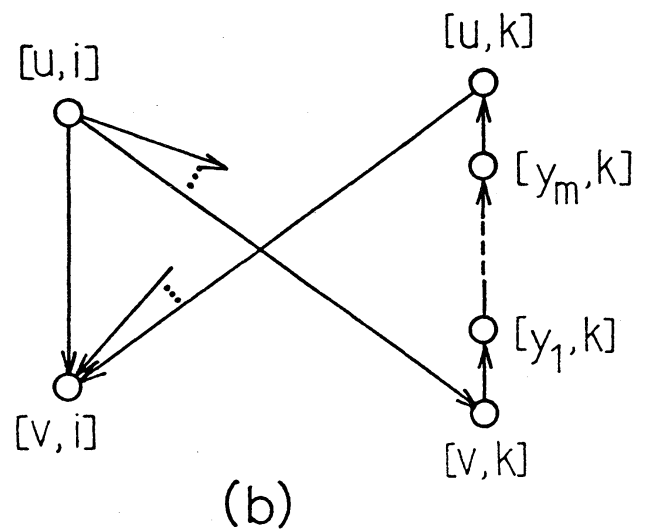
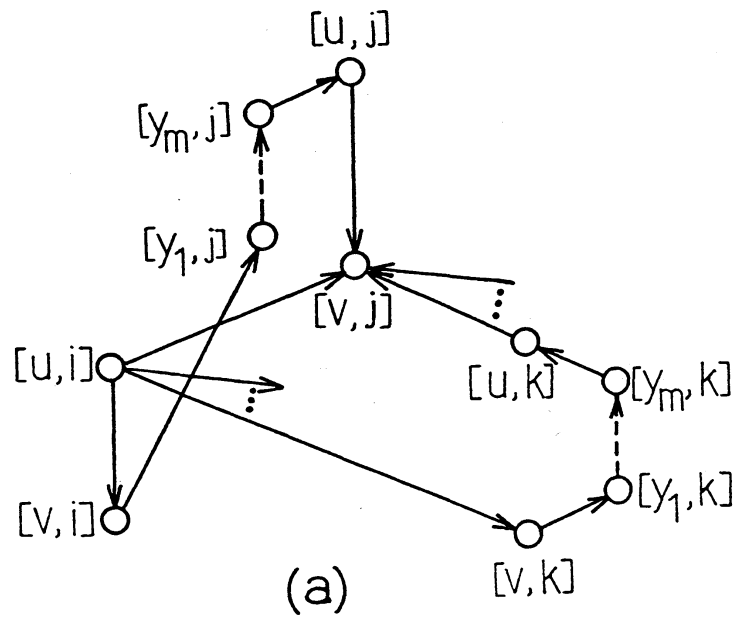


Fig. 2.1 定理 2.8 における G'

から v への有向道 $u, y_1, y_2, \dots, y_m, v$ が存在する。よって G' には l 本の辺の互いに素な有向道 $[u, i], [y_1, k], \dots, [y_m, k], [v, j]$ ($1 \leq k \leq l$) が存在する。

Case 3. $u = v$. $[u, i]$ と $[v, j]$ は相異なるので, $i \neq j$. G は強連結であるから, あるサイクル $u, y_1, y_2, \dots, y_m, u$ ($m \geq 1$) が存在する。よって G' には $[u, i]$ から $[v, j]$ へ l 本の辺の互いに素な有向道 $[u, i], [y_1, k], [y_2, k], \dots, [y_m, k], [v, j]$ ($1 \leq k \leq l$) が存在する。

いずれの場合にも G' において $[u, i]$ から $[v, j]$ へ l 本の辺が互いに素な有向道が存在することを示した。よって G' から $l-1$ 本の辺を削除しても $[u, i]$ から $[v, j]$ へ少なくとも 1 本の有向道がある。 $[u, i]$ および $[v, j]$ は任意であるので, G' は l -辺連結である。

逆に G が強連結でないとする, G' の構成法より G' は強連結でない。よって G' は l -辺連結でない。 Q.E.D.

3. おわりに

UGAP とは無向グラフ $G=(X, E)$, $x_1, x_n \in X$ において, x_1 から x_n への無向道が存在するかという問題である。以下 Jones による未解決問題, 即ち UGAP は NL-完全か, についての考察を行なう。UGAP が NL に入ることは明らかであるので, その NL-困難性についてのみ考える。

有向グラフ $G=(X, A)$, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ から以下のような無向グラフ $G'=(X', E')$ を構成し, $GAP \leq UGAP(k)$, $k=\sqrt{n}$ と証明できる。

$$X' = \{ [x, i] \mid x \in X, 0 \leq i \leq m \} \cup \{ y_i \mid 0 \leq i \leq m \}$$

$$E' = \{ ([u, i], [v, i+1]) \mid (u, v) \in A, 0 \leq i < m \} \\ \cup \{ ([x_m, i], y_m) \mid 0 \leq i \leq m \}$$

一方, Jones の未解決問題は $UGAP$ 即ち $UGAP(k)$, $k=n$ に関してである。そこで上記の $G'=(X', E')$ から次のような無向グラフ $G''=(X'', E'')$ を作る。

$$X'' = X' \cup \{ z_i \mid 1 \leq i \leq (m+1)^2 \}$$

$$E'' = E' \cup \{ (y_m, z_1) \} \cup \{ (z_i, z_{i+1}) \mid 1 \leq i < (m+1)^2 \}$$

明らかに, G において x_1 から x_m への有向道が存在することと, G'' において $[x_1, 0]$ から $z_{(m+1)^2}$ へ長さ $(m+1) + (m+1)^2$ 以下の無向道が存在することとが必要十分である。 G'' の点の数を n とすると, $n = 2(m+1)^2$ より, 任意の $\varepsilon (> 0)$ に対して,

$$(m+1) + (m+1)^2 = n/2 + (m+1) > n/2 > n^{1-\varepsilon}$$

となる。よってどのような $\varepsilon (> 0)$ に対しても, $UGAP(k)$, $k \leq n^{1-\varepsilon}$ が NL -完全であることが証明された。しかし $UGAP(UGAP(k), k=n)$ が NL -完全であるかどうかは依然未解決である。

References

- (1) Berge, C.: "Graphs and hypergraphs", North-Holland Publishing Company (1976).
- (2) Cook, S.A.: "The complexity of theorem proving procedures", Proc. Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 151-158 (1971).
- (3) Even, S. and Tarjan, R.E.: "A combinatorial problem which is complete in polynomial space", J. ACM, 23, 4 (1976).
- (4) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: "Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness", H. Freeman, San Francisco (1978).
- (5) Harary, F.: "Graph theory", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- (6) Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.: "Introduction to automata theory, languages and computation", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1979).
- (7) Jones, N.D.: "Space-bounded reducibility among combinatorial problems", J. Comput. & Syst. Sci., 11, pp. 68-85 (1975).
- (8) Jones, N.D. and Laaser, W.T.: "Complete problems for deterministic polynomial time", Theor. Comput. Sci., 3, pp. 105-117 (1977).
- (9) Jones, N.D., Lien, Y.E. and Laaser, W.T.: "New problems complete for nondeterministic log space", Math. Syst. Theory, 10, pp. 1-17 (1976).
- (10) Karp, R.M.: "Reducibility among combinatorial problems", Plenum Press, N.Y., pp. 85-104 (1972).
- (11) Savitch, W.J.: "Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities", J. Comput. & Syst. Sci., 4, pp. 177-192 (1970).