

Open flow system における空間方向分岐現象の機械機構

山口 明 宏

北海道大学工学部 システム情報工学専攻 混沌系工学分野

〒 060 札幌市 北区 北 13 条西 8 丁目

(e-mail: aki@complex.hokudai.ac.jp)

概要

一方向性の Coupled Map Lattice である Open Flow System (OFS)[1] において空間方向での周期倍分岐現象 [1] が知られている。本論においてこの現象の機構を明らかにした。その結果 OFS を計算機上で実現 (記述) するとき計算の有限性から微視的スケールに計算固有の力学があり、OFS は、そのような微視的スケールある力学を巨視的スケールに顕在化させる性質を持つことを示した。

1 導入

非線形力学系のひとつの研究方法として、計算機によるシミュレーションがある。実数上の運動方程式として記述される力学系を計算機 = 有限要素有限時間の離散力学系 (有限システム) として記述するためには、何らかの近似 (計算の前提) が必要である。ここで、対象であった系と記述された系との間の対応関係は、重要な問題である。

この小論では、対象を有限システムとして記述したがゆえに顕在化する現象として、一方向性の Coupled Map lattice である、Open Flow System (OFS)[1] における空間方向での周期倍分岐現象 [1] をとりあげる。

OFS は、金子 [1] によって導入された一次元の離散力学系の結合系であり、その時間発展規則は、

$$\begin{aligned} x_{i+1}^1 &:= (1 - \epsilon)f(x_i^1) + \epsilon f(x^0), \\ x_{i+1}^k &:= (1 - \epsilon)f(x_i^k) + \epsilon f(x_i^{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (1)$$

と定義される。ここで $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ 、 ϵ は、上位サイトとの結合係数、 $x_i^i \in \mathcal{R}$ は、サイト i 、ステップ t での系の状態、 $x^0 \in \mathcal{R}$ は、定数である。OFS は、その軌道として時空間パターンを生成する。その中で各サイトで周期軌道を取り、その周期が空間方向に倍分岐していく現象が、金子によって発見された [1](図 1)。

これまで、この空間方向分岐現象は、OFS における定常解の空間方向の対流不安定性 [1] などの概念で説明 [1][2] されてきたが、その具体的な生成機構は解っていなかった。ここで問題となるのは、安定な定常解が解析的に示され空間方向に一旦は、その定常解に収束する (図 1 の第 20 サイト程度まで) にもかかわらずその定常解が空間方向に不安定化し周期倍分岐が起きる (計算機シミュレーションで) ことであった。

本論では、有限システムで記述された OFS においては、解析的に示される定常解が記述不可能であり、それが空間方向に生じる定常解の不安定化の原因であることを示す。そして、空間方向分岐現象が起きる条件を求める。

2 節で、解析的に得られる定常解を示し、3 節で有限システムのもとでの定常解の不安定化の機構を示す。それらの結果をもとに 4 節で空間方向分岐現象が起きる条件を示す。最後に、ここで得られた空間方向分岐現象の OFS における意味づけを考察する。

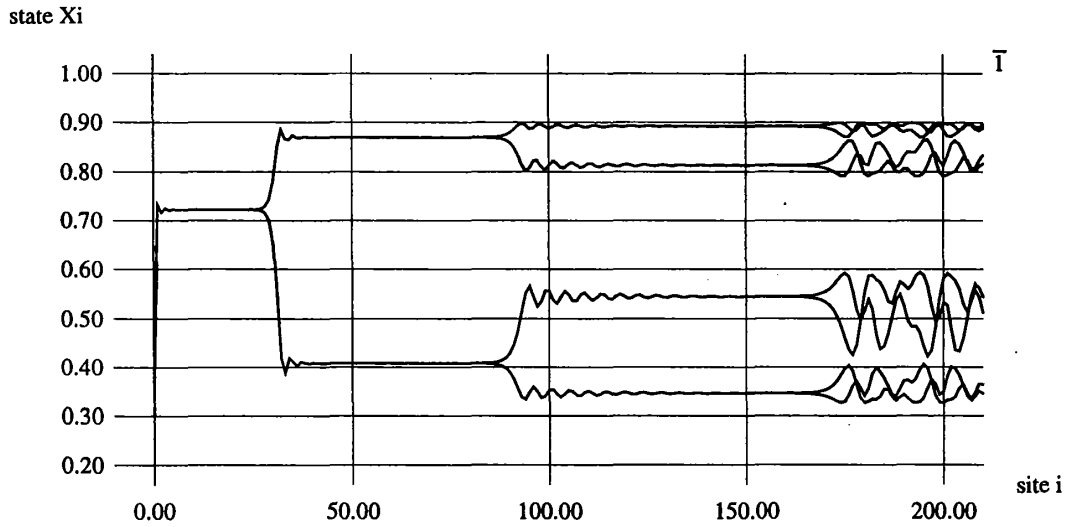


図 1 f として *logistic* 写像 $f(x) = Ax(1-x)$ をもちいた OFS の空間方向分岐現象。 $A = 3.6$ 、 $\epsilon = 0.55$ 、 $x^0 = 0.3$ 。横軸が空間 (サイト) 方向、縦軸が各サイト i での状態 x_i^t 。図では、ステップ $t = 20003, \dots, 20019$ での系の状態を重ねて描画している。サイト 20 まで系固有の一周期解への収束がみられ、収束後、二周期へ分岐している。そして、その後さらに系固有の二周期解への収束、四周期への分岐が生じる。ここで系固有の周期解への収束は、四周期までである。八周期以降は、系固有の周期解への収束はなく、空間方向に準周期的に周期解が位置する。

2 無限精度での解析

まず、OFS の定常解を解析的に求める。OFS のあるサイトが周期運動をしていると仮定すると、次のサイトで一意に決まる力学から、そのなかにある周期軌道を求めることができる。定常解は、最上位サイトでの力学を仮定し逐次的に各サイトでの周期軌道を求めていくことによって得られる (この方法は、空間方向写像として 金子等によって導入された [2])。

ここではまず、時間方向に 1 周期 (固定) の解をもとめる。OFS は、各サイト i で、1 周期の軌道 (x^i) をとっているとする。このとき、OFS の時間発展式 (1) より、 $x^{*1}, x^{*2}, \dots$ は、

$$\begin{aligned} x^{*1} &= (1 - \epsilon)f(x^{*1}) + \epsilon f(x^0) \\ x^{*2} &= (1 - \epsilon)f(x^{*2}) + \epsilon f(x^{*1}) \\ &\vdots \\ x^{*i+1} &= (1 - \epsilon)f(x^{*i+1}) + \epsilon f(x^{*i}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

を満たす。 x^* を一次元写像 f 固有の固定点 ($x^* = f(x^*)$) とし、各サイトでの固定点の x^* からのずれを、 $\eta^i = x^{*i} - x^*$ とおく。 $|\eta^i| < 1$ とし 方程式 (2) を x^* のまわりで展開し、各サイト

での固定点の位置 (x^* からのずれ) に関する空間方向の写像

$$\begin{aligned}\eta^{i+1} &= \frac{\epsilon\alpha}{1 - (1 - \epsilon)\alpha} \eta^i, \\ \alpha &:= f'(x^*)\end{aligned}\quad (3)$$

を得る。(3) 式より

$$\left| \frac{\epsilon\alpha}{1 - (1 - \epsilon)\alpha} \right| < 1 \quad (4)$$

の時、固定点の位置は、空間方向に x^* に収束する。そして、サイト i での固定点 x^{*i} の安定性は、

$$|(1 - \epsilon)(f'(x^*) + f''(x^*)\eta^i)| < 1. \quad (5)$$

条件 (4)、(5) が満たされるとき、 f 固有の固定点 x^* に収束する固定点の系列 x^{*i} が OFS の定常解となる。

ところが OFS の計算機シミュレーションにおいて、これらの条件が満たされているにもかかわらず、いったん収束した固定点が分岐する場合がある (図 1)。

分岐の結果発生した時間方向に 2 周期の定常解は、空間方向に系固有の 2 周期解に収束していく。そしてさらに分岐が生じ系固有の 4 周期解への収束がおこる。この系固有の周期解への収束、分岐を繰り返す現象が、OFS の周期倍分岐現象である。

この分岐現象は、解析的に求めた定常解と矛盾する。このことは、計算機シミュレーションとして構成された有限システムとしての OFS には、分岐を生成するなんらかの機構が存在していることを示唆する。そこで、次節で有限システムでの固定点の記述不可能性に着目した定常解の解析を行う。

3 有限精度での解析

前節で OFS の定常解として写像 f 固有の固定点へ空間方向に収束する固定点の系列が得られた。このような解は有限システムの中で表現可能なのだろうか？有限システムでは、数は有限の精度で表現され意図的に設計しないかぎり f の固定点に正確に対応する数は、有限システムには存在しない。この近似された数が有限システムの計算のなかで固定点となっていない場合、固定点への収束という現象は、固定点近傍での周期解 (cell mapping) となる。実際有限システムとして記述された OFS の軌道を精度の限界まで観察すると、固定点となるべき軌道が、固定点近傍での周期軌道となっている場合がある (詳細は、[3])。

以下に有限精度での解析として、無限精度のもとでの固定点は、有限精度では、微視的スケール (固定点近傍) で 2 周期と仮定した解析をおこなう。

解析は、前節と同様に各サイトでの固定点の位置の変化の写像の構成により行う。各サイト i での固定点近傍での 2 周期解を x^{*i}_1, x^{*i}_2 とすると、時間発展式 (1) より、各サイトでの周期解は、

$$\begin{aligned}x^{*i+1}_2 &= (1 - \epsilon)f(x^{*i+1}_1) + \epsilon f(x^{*i}_1) \\ x^{*i+1}_1 &= (1 - \epsilon)f(x^{*i+1}_2) + \epsilon f(x^{*i}_2)\end{aligned}\quad (6)$$

を満たす。 $\eta^i_1 := x^{*i}_1 - x^*$, $\eta^i_2 := x^{*i}_2 - x^*$ とし、(6) 式を固定点のまわりで展開し、固定点からのずれの空間方向写像

$$\eta^{i+1} = A^{-1}\eta^i, \quad (7)$$

ここで、

$$A := \frac{1}{\epsilon\alpha} \begin{pmatrix} -(1-\epsilon)\alpha & 1 \\ 1 & -(1-\epsilon)\alpha \end{pmatrix},$$

$$\eta^i := \begin{pmatrix} \eta_1^i \\ \eta_2^i \end{pmatrix}$$

を得る。

A^{-1} の固有値は、

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon\alpha}{1 - (1-\epsilon)\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{-\epsilon\alpha}{1 + (1-\epsilon)\alpha}, \quad (8)$$

固有ベクトルは、

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。このとき ξ_1 は、固定点からのずれが一周期、つまり固定点が表現可能 (無限精度) な場合に対応し、 λ_1 は、前節での条件 (4) に対応する。

ここでの解析から、無限精度の解析で固定点へ収束 ($|\lambda_1| < 1$) する場合でも、 $|\lambda_2| > 1$ の場合、固定点からの分岐が生じる。ここで λ_2 に対応する固有ベクトル ξ_2 は、2 周期解が固定点 x^* をはさんで対称に位置する (固定点が表現不可能な) 場合に対応する。そして、固定点は、空間方向写像のサドルになっている (図 2)。

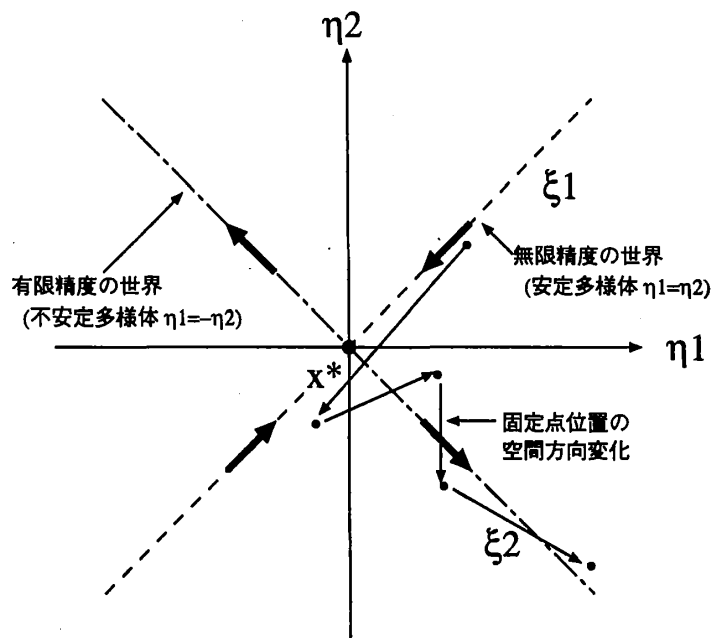


図 2 空間方向での固定点位置の写像の系固有の固定点近傍でのサドル構造。固定点が記述可能な場合、固定点は、 $\eta_1 = \eta_2$ の直線 (点線) 上にある。そしてこの方向は、固定点位置の写像の安定方向となっているために系固有の固定点 x^* に、固定点の位置は収束する。しかし、固定点の記述不可能性のため有限システムでは、安定多様体上に固定点をおくことができず、固定点の位置は、 $\eta_1 = -\eta_2$ (一点鎖線) の不安定方向に x^* から離れていく。

4 空間方向分岐条件

前節までに、OFS における空間方向に一周期解への収束、二周期への分岐が生じる条件をもとめた。この条件を一般化して、 n 周期への収束、 $2n$ 周期への分岐が生じる条件が得られる(詳細は、[3])。

空間方向に周期軌道の位置が、写像 f の n 周期解 $x_{*1}, \dots, x_{*n}$ に収束し、 $2n$ 周期へ分岐する必要条件は、 n が 1 または偶数のとき、 $\alpha := \prod_{i=1}^n f'(x_{*i}) < 0$ かつ、

$$|\lambda_{INF}| < 1, \quad |\lambda_{FIN}| > 1. \quad (10)$$

ここで、 λ_{INF} は、無限精度の場合の n 周期解への収束指数であり、

$$\lambda_{INF} = \frac{\epsilon \sqrt[n]{|\alpha|}}{(\cos \theta + \sin \theta i) - (1 - \epsilon) \sqrt[n]{|\alpha|}}; \quad (\theta = \frac{1}{n}\pi). \quad (11)$$

λ_{FIN} は、有限精度の場合の $2n$ 周期への拡大指数であり、

$$\lambda_{FIN} = \frac{\epsilon \sqrt[n]{|\alpha|}}{1 - (1 - \epsilon) \sqrt[n]{|\alpha|}}. \quad (12)$$

条件 (10) は、固定点の位置に関する条件で、固定点の線形安定条件は、 $|(1 - \epsilon)^n(\alpha + O(|\eta|))| < 1$ 。

条件 (10) より、写像 f の $1, 2, 4, \dots, 2^n$ 周期解について、1 周期解への収束 $\rightarrow$ 2 周期への分岐、2 周期解への収束 $\rightarrow$ 4 周期への分岐、 $\dots$ 、 2^n 周期解への収束 $\rightarrow$ 2^{n+1} 周期への分岐の条件が満たされる時、OFS で、 2^n 周期までの空間方向分岐が可能である。

5 議論

これまでみてきたように、OFS での空間方向分岐は、有限システムで固定点が記述できないことに起因する。実際、周期倍分岐を生じている OFS について、各サイトでの正確な周期を計算すると、第 1 サイトからすでに、固定点が 2 周期軌道となっている [3]。ここで生じた固定点からのずれが、固定点の空間方向写像におけるサドル構造によって拡大され、巨視的には、固定点への収束、分岐という一見矛盾した現象を生成している。

このように、有限システムとして記述された OFS の、巨視的スケールでの振舞は、微視的スケールでの計算の構造によって決定される(周期倍分岐だけでなく、周期 3 倍分岐なども存在する [3])。このことは、Open Flow 的力学のチェーンは、微視的スケールにある計算の前提(計算の機械機構)を、巨視的スケールに顕在化させる性質を持つことを示す。

では、有限システムで得られた解は、OFS においてどのような位置付けがなされるのだろうか。有限システムでは、1 サイトでも固定点を表現できないサイトが存在すると、OFS の解析解を表現することはできない。それでは、何が有限システムの OFS 上に書かれたのだろうか？有限システムでの解に対応する解は、無限精度のシステムでは、OFS の上位サイトに微視的コントロール集合的力学(MCD)を結合した系の解と解釈もできる。ここで MCD とは、巨視的には、2 周期だが、それぞれの周期点は、微視的にみるとそれぞれ 4 周期点からなっており、更に各点を微視的に見るとそれぞれ、8 周期点からなるという構造が再帰的に繰り返すものをいう。

ここで、有限システムとして OFS を記述しようとしたときに生じたことは、

有限システムでは、OFS は書けない。その結果、ある OFS+MCD 有限システムに書かれた (書けた)。

である。ここで書こうとした対象と書かれた構造物との間で着目する性質について近似が成立する範囲においては記述するという操作は、前提となりうる。しかし、OFS のように、微視的機構が巨視的スケールに拡大する系では、記述する操作自体が、系の振舞に影響するため、記述するという操作は、系の振舞と独立ではなくなる。

この小論において、記述された系が記述自体に“言及”する例として、OFS の空間方向分岐現象を示した。このように記述のされかたにその振舞が依存する系は、運動の中に微視的スケールの制約がかかる場合には、自然に見出すことができると思われる。自然現象の中にそのような系を見出すことは、今後の課題である。

参考文献

- [1] Kunihiro Kaneko, Spatial period-doubling in open flow, Phys. Lett. 111A (1985) 321.
- [2] F.H. Willeboordse, K.Kaneko, Pattern dynamics of a coupled map lattice for open flow, Physica D, (to appear).
- [3] Akihiro Yamaguchi, A mechanism of spatial bifurcations in open flow system, (in preparation).