

# 楕円型作用素のスペクトラル関数に対する

## 漸近評価とその応用

大阪大学理学部 辻本 順一 (Jun-ichi Tsujimoto)

ここで得られた結果は、著者の論文 [1] のある種の拡張であって、それを §1 において述べる。又、§2 においてその応用を述べる。

### § 1

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の中の開集合とする。  $\{A^\varepsilon\}$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) を  $L^2(\Omega)$  上の正定値自己共役作用素の族とする。ここで  $\{A^\varepsilon\}$  に対して次のような仮定をおく。

(1)  $\mathcal{D}(A^\varepsilon) \supset C_0^\infty(\Omega)$  であって、  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  に対しては

$$A^\varepsilon u = A^\varepsilon(x, D) u$$

ここで、  $A^\varepsilon(x, D)$  は  $2m$  階の楕円型偏微分作用素である。

$$A^\varepsilon(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha^\varepsilon(x) D^\alpha$$

$$a_\alpha^\varepsilon \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$$

又、  $\varepsilon$  によらず一様に楕円型であるとする、つまり

1

$$A_{2m}^\varepsilon(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^\varepsilon(x) \xi^\alpha \geq C |\xi|^{2m}$$

( $C$  は  $\varepsilon$  に よ る )

(ii)  $A^\varepsilon$  の Green 関数  $G_\lambda^\varepsilon(x, y)$  について,  $\varepsilon$  に よ る 次 の 評価が成立する.

$$|G_\lambda^\varepsilon(x, y)| \leq \begin{cases} C_1 |\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} \exp(-C_2 |x-y| |\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m > n) \\ C_1 |x-y|^{2m-n} \exp(-C_2 |x-y| |\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m < n) \\ C_1 \{1 + \log^+(|\lambda|^{-\frac{1}{2m}} |x-y|^{-1})\} \\ \quad \times \exp(-C_2 |x-y| |\lambda|^{\frac{1}{2m}}) & (2m = n) \end{cases}$$

$\forall x, y \in \Omega,$

$\forall \lambda \in \Lambda = \{z : \theta \leq \arg z \leq 2\pi - \theta, |\lambda| \geq C_3, \\ \theta \in (0, \pi/2), C_3 > 0\}$

さらに,  $A^\varepsilon(x, D)$  の係数について, 次の仮定をおく。

$$(iii) \quad |D_x^\beta a_\alpha^\varepsilon(x)| \leq C_{\alpha\beta} \varepsilon^{-2m+|\alpha|-|\beta|}$$

以上の3つの仮定のもとに,  $A^\varepsilon$  のスペクトラル関数  $e^\varepsilon(x, y, t)$  について, 次の定理を得る.

### 定理 1

スペクトラル関数  $e^\varepsilon(x, x, t)$  について, 次の評価が成立

する。

$$|e^\varepsilon(x, x, t) - C^\varepsilon(x) t^{\frac{n}{2m}}| \leq C(\varepsilon \wedge \delta(x))^{-1} t^{\frac{n-1}{2m}}$$

ここに

$$C^\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{A_{2m}^\varepsilon(x, \xi) < 1} d\xi$$

$$\delta(x) = \min \{1, \text{dist}(x, \partial\Omega)\}$$

上の定理を証明するといふ基本的アイデアは [1] と同じである。つまり、双曲型方程式  $D_t + (A^\varepsilon)^{\frac{1}{2m}}$  の基本解をフーリエ積分で表現することである。つまり、基本解を  $\hat{E}^\varepsilon(t)$  とすると

$$\hat{E}^\varepsilon(t) u \sim \iint g^\varepsilon(t, x, y, \xi) e^{i\varphi^\varepsilon(x, y, \xi) - it a^\varepsilon(y, \xi)} u(y) dy d\xi.$$

ここに

$$a^\varepsilon(y, \xi) = (A_{2m}^\varepsilon(y, \xi))^{\frac{1}{2m}}, \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi.$$

又、Phase function  $\varphi^\varepsilon(x, y, \xi)$  は次の条件を満足するものである。

- (1)  $a^\varepsilon(x, \nabla_x \varphi^\varepsilon(x, y, \xi)) = a^\varepsilon(y, \xi)$
- (2)  $\varphi^\varepsilon(x, y, \xi) = 0$  when  $\langle x - y, \xi \rangle = 0$
- (3)  $\nabla_x \varphi^\varepsilon(x, y, \xi)|_{x=y} = \xi$
- (4)  $\varphi^\varepsilon(x, y, \xi) = |\xi| \varphi^\varepsilon(x, y, \xi/|\xi|)$ .

よって、定理1の証明には、次の補題が重要になる。

## 補題 1

$\forall x_0 \in \Omega$  に対して,

$$B^\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < d(\partial\Omega) \wedge \varepsilon\}$$

とする.  $d$  を適当にとると, (1) ~ (4) を満足する  $\varphi^\varepsilon$  が  $C^\infty(B^\varepsilon(x_0) \times B^\varepsilon(x_0) \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$  で存在して, 次の評価を満足する.

$$|D_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi^\varepsilon(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \varepsilon^{(1-|\alpha|)} |\xi|^{1-|\beta|}$$

$$\forall x, y \in B^\varepsilon(x_0), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

## § 2

ここで,  $\Omega$  は限定円錐条件をもつ有界領域とする.

$\Omega$  上で, 対称な 2 次形式

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta v} dx$$

$$(2m > n, \quad a_{\alpha\beta} \text{ は有界可測})$$

を考える.  $B$  に対して, 次の仮定をおく.

$$B[u, u] \geq \delta \|u\|_m^2 \quad (\delta > 0)$$

$$\forall u \in V$$

ここで,  $V$  は  $\dot{H}_m(\Omega) \subset V \subset H_m(\Omega)$  を満足する,  $H_m(\Omega)$  の閉部分空間である.

そして,  $B$  より生成される  $L^2(\Omega)$  上の正定値自己共役作用

素を  $A$  とする。研究の目的は、 $\beta$  の最高階の係数にのり、な  
めらこの仮定として、 $A$  の固有値の漸近分布の *remainder*  
*estimate* を出すことである。

$0 < \tau < \infty$  に対して、 $\beta^\tau(\Omega)$  なる関数空間を次のように定  
義する、

$$f \in \beta^\tau(\Omega) \iff \forall \alpha, |\alpha| \leq [\tau] \quad \partial_x^\alpha f \text{ は } \Omega \text{ で有界連続}$$

$$\dot{\tau} = \tau - [\tau] > 0 \text{ のときは } |\alpha| = [\tau] \text{ なる}$$

$$\alpha \text{ に対して}$$

$$|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_x^\alpha f(y)| \leq C |x - y|^{\dot{\tau}}$$

が成立する。

### $\beta$ の係数に対する仮定

$$\exists \Omega_1 \supset \bar{\Omega}$$

$$|\alpha| = |\beta| = m, \quad a_{\alpha\beta} \in \beta^\tau(\Omega_1)$$

$A$  の固有値全体を  $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$  とし、 $N(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1$  とする。

この時、次の定理をうる。

### 定理 2

$t \rightarrow \infty$  のとき、 $0 < \theta < \tau/(\tau+1)$  なる  $\theta$  に対して、次の漸近  
公式をうる。

$$N(t) = c_0 t^{\frac{n}{2m}} + O\left(t^{\frac{n-\theta}{2m}}\right)$$

注, こゝでの結果は [2] の評価より, よく, 7いる.

この定理の証明方法は, 定理1を応用することである.

$\rho_\varepsilon$  を軟化子として

$$a_{\alpha\beta}^\varepsilon = a_{\alpha\beta} * \rho_\varepsilon \quad \text{とする.}$$

このとき

$$B^\varepsilon[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^\varepsilon(x) D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx$$

なる対称な2次形式を考える.

$B^\varepsilon$ より生成される自己共役作用素を  $A^\varepsilon$  とする.  $A^\varepsilon$  の Green 関数と  $G_\lambda^\varepsilon(x, \lambda)$  とすると, [2] の補題5.1の証明と同様にすれば, 次の評価を得る.

$$(2.1) \quad |G_\lambda^\varepsilon(x, \lambda)| \leq C |\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} \exp(-C_2 |x-\lambda| |\lambda|^{\frac{1}{2m}})$$

$A^\varepsilon$  のスペクトル関数と  $e^\varepsilon(x, \lambda, t)$  とすると, 定理1を応用することによって, 次の評価を得る.

$$(2.2) \quad |e^\varepsilon(x, \lambda, t) - C^\varepsilon(x) t^{\frac{n}{2m}}| \leq C (\varepsilon \wedge \delta(x))^{-1} t^{\frac{n-1}{2m}}$$

$A$  の Green 関数と  $G_\lambda(x, \lambda)$  とすると, 次の補題が成立する.

## 補題2

$\forall p > 0$  に対して,  $C_p$  が存在して

$$|g_\lambda(x, \tau) - g_\lambda^\varepsilon(x, \tau)| \\ \leq C \left\{ \frac{|\lambda|^{\frac{n}{2m}}}{d(\lambda)} \left( \frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}}{\delta(x) d(\lambda)} \right)^p + \left( \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \right)^2 [\varepsilon^\tau |\lambda|^{\frac{n}{2m}-1} + |\lambda|^{-\frac{1}{2m}}] \right\}$$

$$= 2\tau \quad d(\lambda) = \text{dist}(\lambda, \mathbb{R}_+)$$

(2.2) と補題 2 を使,  $\tau$ , 定理 2 をえる方法は, [2] と同じである.

### 文献

- [1] J. Tsujimoto, On the asymptotic behavior of spectral functions of elliptic operators, Japan. J. Math. Vol. 8, (1982) 177-210.
- [2] J. Tsujimoto, On the remainder estimates of asymptotic formula for eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 557-569.