

# 超幾何型差分作用素のスペクトルについて

筑波大・数学系

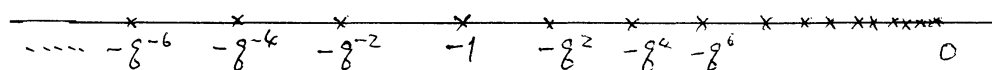
寛 知 之 (Tomoyuki KAKEHI)

## §0. Introduction and Notations

ここでは、ある種の差分作用素のスペクトルについて述べる。ここで扱う差分作用素は、 $ST_q(1,1)$  という non-compact 型量子群の Casimir 作用素 から得られるものであり、量子群の表現論と密接に関係している。

まず、 $q$ -analogue の理論でよく用いられる記号について説明しておく。以下において  $q$  は  $0 < q < 1$  なる実数とする。

- $q$ -interval  $(-\infty, 0]_{q^2} := \{-q^{2n} : n \in \mathbb{Z}\}$



- $q$ -difference  $D = D_{q^2}$

$(-\infty, 0]_{q^2}$  上の関数  $\varphi$  に対して、その  $q$ -difference  $D_{q^2}\varphi$  を

$$D_{q^2}\varphi(\zeta) := \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(q^2\zeta)}{(1-q^2)\zeta} \quad \zeta \in (-\infty, 0]_{q^2}$$

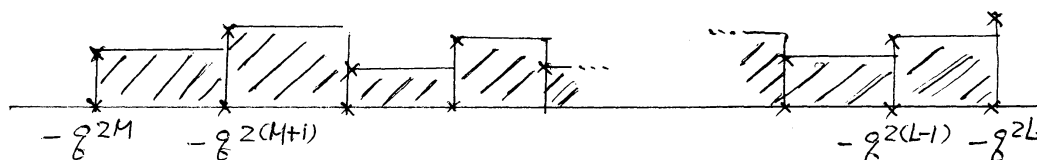
で定める.

・ Jackson積分 :  $\zeta_1 = -q^{2M}$ ,  $\zeta_2 = -q^{2L} \in (-\infty, 0]_{q^2}$

及び、 $(-\infty, 0]_{q^2}$  上の関数  $\varphi$  に対して、その Jackson積分を次で定める.

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varphi(\zeta) d_{q^2} \zeta := \sum_{n=M}^{L-1} \varphi(-q^{2n}) q^{2n} (1-q^2)$$

(注意1) これは、次の斜線部の面積を表わしている.



(注意2) Jackson積分と  $q$ -difference とは互いに逆演算の関係になっている、即ち、

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} D_{q^2} \varphi(\zeta) d_{q^2} \zeta = \varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)$$

更に次の記号を導入する

$$\cdot [a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} \quad a: \text{実数}$$

$$\cdot (a; q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} (1 - a q^j), \quad (a; q)_0 := 1$$

$$\cdot q\text{-shift operator } T = T_{q^2} : T_{q^2} \varphi(\zeta) := \varphi(q^2 \zeta)$$

(注意3)  $-\infty \sim 0$  の Jackson 積分は、次で定める.

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(\zeta) d_{q^2} \zeta := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(-q^{2n}) q^{2n} (1-q^2)$$

§ 1. 差分作用素  $C_{\alpha,\beta}$  と、そのスペクトルについて.

まず Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  を定める.

•  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi$  は  $(-\infty, 0]$  上の関数であって、

$$\int_{-\infty}^0 |\varphi(\zeta)|^2 \mu_{\alpha,\beta}(\zeta) d_{\zeta^2} \zeta < +\infty$$

ここで、 $\alpha, \beta$  は非負の整数であって、density function

$\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)$  は、 $\mu_{\alpha,\beta}(\zeta) := (-\zeta)^\alpha (\zeta^2 \zeta : \zeta^2)^\beta$  で定める.

次に、我々が扱う差分作用素について述べる.  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  上の差分作用素  $C_{\alpha,\beta}$  を次で定める.

$$C_{\alpha,\beta} \varphi(\zeta) := \frac{-\zeta^{\alpha-\beta+1}}{\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)} D_{\zeta^2}^* \mu_{\alpha+1,\beta+1}(\zeta) D_{\zeta^2} \varphi(\zeta) + \left[ \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right]_{\zeta}^2 \varphi(\zeta)$$

ここで、 $D_{\zeta^2}^*$  は Jackson 積分に関する  $D_{\zeta^2}$  の adjoint であり、

$$D_{\zeta^2}^* = -\zeta^{-2} T_{\zeta^2}^{-1} D_{\zeta^2}$$

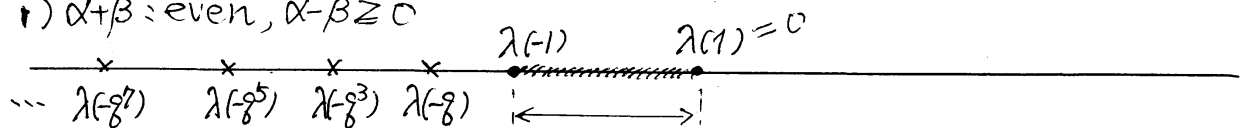
そして、 $C_{\alpha,\beta}$  の定義域  $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$  を次で定める.

$\mathcal{D}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi, C_{\alpha,\beta} \varphi \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  かつ  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} |\zeta|^{\frac{\alpha+1}{2}} D_{\zeta^2} \varphi(\zeta) = 0$

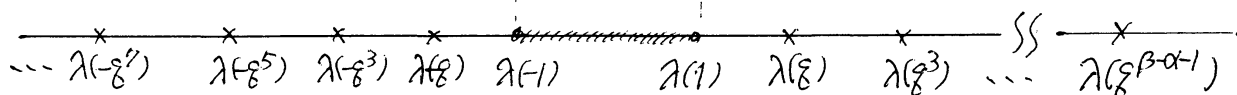
すると、 $(C_{\alpha,\beta}, \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$  は、 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  上の自己共役作用素となる.

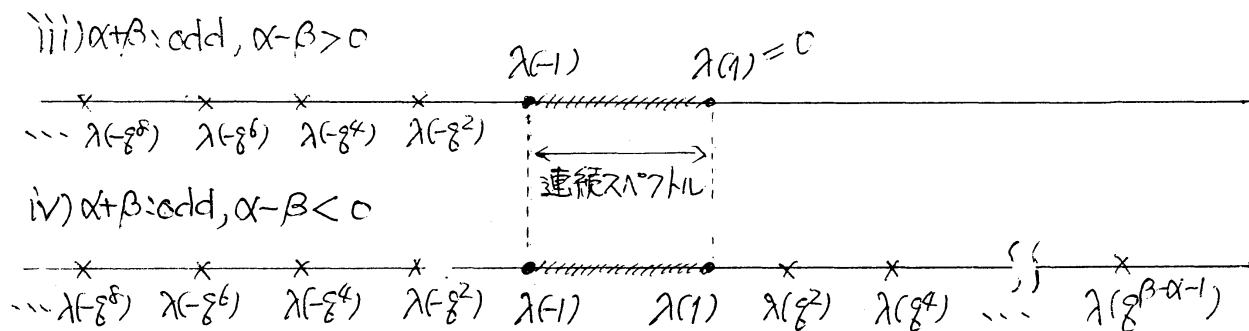
定理 1  $(C_{\alpha,\beta}, \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$  のスペクトルは次のようになる.

i)  $\alpha+\beta$ : even,  $\alpha-\beta \geq 0$



ii)  $\alpha+\beta$ : even,  $\alpha-\beta < 0$





そこで  $\lambda(\tau) = g^2(1-g^2)^{-2}(\tau+\tau^{-1}-2)$  とおいた。

(注意1)  $\lambda < 0$  の部分に現れる点スペクトルは、 $\alpha+\beta: \text{even}$  の時、 $\lambda(-g^{2n-1})$ ,  $n=1,2,3,\dots$ ,  $\alpha+\beta: \text{odd}$  の時、 $\lambda(-g^{2n})$ ,  $n=1,2,3,\dots$  となり、共に無限個現れる。

(注意2) 低エネルギー領域でのみ、 $C_{\alpha,\beta}$  の連続スペクトルが現れ、 $\alpha, \beta$  依らず、それは、

$$\{\lambda(e^{i\theta}); 0 \leq \theta \leq \pi\} = \left[-\frac{4g^2}{(1-g^2)^2}, 0\right]$$

なる閉区間となる。

(注意3)  $\lambda > 0$  の部分には点スペクトルが現れる場合、その数は、ちょうど  $\left[\frac{\beta-\alpha}{2}\right]$  個である。

## §2. $C_{\alpha,\beta}$ の固有関数系

$C_{\alpha,\beta}$  の固有関数系を具体的に与えるため、basic hypergeometric functionを用いる。それは、次のようなものである。

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; g; z\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; g)_n (b; g)_n}{(c; g)_n (g; g)_n} z^n$$

この  ${}_2\varphi_1$  に対して、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$  を次で定める。

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau) := {}_2\varphi_1 \left( \begin{matrix} \tau q^{\alpha+\beta+1} & \tau^{-1} q^{\alpha+\beta+1} \\ q^{2\alpha+2} \end{matrix} ; q^2 ; q^2 \zeta \right)$$

すると、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$  は、 $\{-1 \leq \zeta < 0\} \cap \{-\infty, 0]_{q^2}$  において、

$$\{C_{\alpha,\beta} - \lambda(\tau)\} \varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau) = 0$$

を満たす。そこで、上記の差分方程式の解として、 $(-\infty, 0]_{q^2}$  全体に延長したのも、同じ  $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$  で表わす事にする。

### 定理2

- i)  $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; e^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  は、連続スペクトル  $\lambda(e^{i\theta})$  に対応する、 $C_{\alpha,\beta}$  の一般化された固有関数である。
- ii)  $\lambda(\tau)$  が点スペクトルであるような  $\tau$  に対して、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$  は、 $C_{\alpha,\beta}$  の固有関数となっている。

### §3 Gauss の超幾何関数との関係

$C_{\alpha,\beta}$  は、ある意味で“超幾何型”の差分作用素である。つまり、 $q \rightarrow 1$  とする事で Gauss の超幾何微分作用素とうまく対応しているのである。以下において、その対応関係を説明する。

形式的に  $q \rightarrow 1$  とすると、すぐ判るように、

$$D_{q^2} \rightarrow \frac{d}{d\zeta}, \quad D_{q^2}^* \rightarrow -\frac{d}{d\zeta}, \quad \mu_{\alpha,\beta}(\zeta) \rightarrow (-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta$$

$$\left[ \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right]_q \rightarrow \frac{\alpha+\beta+1}{2} \quad \text{従って、この時、}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,\beta} &\xrightarrow{(\varphi \rightarrow 1)} \frac{1}{(-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta} \frac{d}{d\zeta} (-\zeta)^{\alpha+1} (1-\zeta)^{\beta+1} \frac{d}{d\zeta} + \left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \\
&= (-\zeta)(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \{(\alpha+\beta+2)\zeta - (\alpha+1)\} \frac{d}{d\zeta} + \left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow P_{\alpha,\beta} \text{ とおくと, } P_{\alpha,\beta} \text{ は Gauss の超幾何微分}
\end{aligned}$$

作用素となっている。そして、 $P_{\alpha,\beta} f = \sigma^2 f$  の解  $z^n$ 、  
原点で正則なものは、

$${}_2F_1 \left( \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \sigma, \frac{\alpha+\beta+1}{2} - \sigma; \zeta \right)_{\alpha+1}$$

で与えられる。一方、 $C_{\alpha,\beta} \varphi = \lambda(\varphi^{2\sigma}) \varphi$  の解は、

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta, \varphi^{2\sigma}) \text{ で与えられ、} \varphi \rightarrow 1 \text{ とすると、} \lambda(\varphi^{2\sigma}) \rightarrow \sigma^2 \\
&\text{かつ、} \varphi_{\alpha,\beta}(\zeta, \varphi^{2\sigma}) \longrightarrow {}_2F_1 \left( \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \sigma, \frac{\alpha+\beta+1}{2} - \sigma; \zeta \right)_{\alpha+1}
\end{aligned}$$

となり、うまく対応している事が判る。

#### §4. 問題の背景

何故、このような差分作用素のスペクトルを考えるのかと  
いうと、それは量子群の表現論と関係があるからであるが、  
説明を簡単にするために、ここでは通常の Lie 群  $SU(1,1)$  に  
話を置き換えて説明する。以下  $G = SU(1,1)$  とおき、対応す  
る Lie 環を  $\mathfrak{g}$  と表わすと、

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}; xy - uv = 1, \bar{x} = y, \bar{u} = v \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b \\ \bar{b} & -ia \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathfrak{g}$  の base  $H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  をとり、

これを用いて、 $G$  上の 2 次の微分作用素  $P$  を、

$$P = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{4}$$

と定める。

一方、 $G$  上の関数  $f$  に対して、 $R_g f(x) = f(xg)$  として、右移動  $R_g$  を定めると、 $R_g R_h = R_{gh} \quad \forall g, h \in G$ , かつ

$\|R_g f\|_{L^2(G)} = \|f\|_{L^2(G)}$  ( $L^2$  ノルムを不変にする) を満たす。従って、 $(R_g, L^2(G))$  はユニタリー表現となっている。

実は、この  $R_g$  と上記  $P$  の間には " $PR_g = R_g P$ " という関係がある。(この性質を持つ上記  $P$  を Casimir 作用素という)

そこで、 $V_\lambda (\subset L^2(G))$  を、固有値  $\lambda$  に対する  $P$  の固有空間とすると、上記の性質より、 $f \in V_\lambda \Rightarrow R_g f \in V_\lambda$  という事が導ける。即ち、固有空間  $V_\lambda$  は、 $(R_g, L^2(G))$  の部分表現になっている事が判る。従って、ユニタリー表現  $(R_g, L^2(G))$  が既約表現の直和と、どのように分解するか、を調べるには、微分作用素  $P$  のスペクトル分解を調べれば良いのである。

実際、このやり方で、補系列と呼ばれる表現の系列を除く、 $G = \mathrm{SU}(1,1)$  の既約ユニタリー表現を全て取り出す事ができる。

そして、Casimir作用素 $P$ のスペクトルを調べる過程で、 $\mathfrak{g}$ で述べた超幾何型微分作用素 $P_{\alpha,\beta}$ が現れるのである。  
以下において、その事を大雑把に説明する。

まず、Cartan分解と呼ばれる $G$ の元の分解を考える。

$$(*) \quad G \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\zeta} & \sqrt{\zeta} \\ \sqrt{\zeta} & \sqrt{1-\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta'} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta'} \end{pmatrix}$$

$\zeta = -|u|^2$ とおいた。ここで  $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$ ,  $-\infty < \zeta < 0$

上記のCartan分解(\*)より、次を得る。

$$(**) \quad \begin{cases} x = e^{i(\theta+\theta')} \sqrt{1-\zeta} & u = e^{i(\theta-\theta')} \sqrt{\zeta} \\ v = e^{-i(\theta-\theta')} \sqrt{\zeta} & y = e^{-i(\theta+\theta')} \sqrt{1-\zeta} \end{cases}$$

(注意) 上記の分解(\*)は、一意ではなく、 $(\theta, \theta') \rightarrow (\theta+\pi, \theta'+\pi)$ と、とり替えるだけの任意性がある。また、 $\zeta = 0$ では、(\*)は well-defined ではない。

さて、 $G$ 上の関数を、 $(\theta, \zeta, \theta') \in [0, 2\pi) \times (-\infty, 0) \times [0, 2\pi)$ の3変数の関数と考え、 $(\theta, \theta')$ に関して、Fourier級数展開しておく。更に、 $e^{i(k\theta+l\theta')}$ の形の項を、(\*\*)を用いて、 $x, u, v, y$ 、及び $\zeta$ を表わし、次の展開式を得る。

$f \in L^2(G)$ に対して、

$$\begin{aligned}
 f(g) &= \sum_{m \geq 0, n \geq 0} f_{mn}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m < 0, n \geq 0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} u^n \\
 (H) \quad &+ \sum_{m \geq 0, n < 0} f_{mn}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m < 0, n < 0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} v^{-n}
 \end{aligned}$$

展開式(井)において、各  $(m, n)$  に対応する  $L^2(G)$  の部分空間を  $H_{m, n}$  とおくと、 $L^2(G) = \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} H_{m, n}$  (直交分解) となり、しかも、“ $PR_g = R_g P \quad \forall g \in G$ ” を用いると、

$$f \in H_{m, n}, Pf \in L^2(G) \Rightarrow Pf \in H_{m, n}$$

が言える。そこで、 $m, n$  が  $\geq 0$  か、 $< 0$  か、に応じて、

$e_{m, n}$  は  $x^m u^n, x^m v^{-n}, y^m u^n, y^m v^{-n}$  のどれかを表わす とすると、 $f(\zeta) e_{m, n} \in H_{m, n}$  に対して、

$$P(f(\zeta) e_{m, n}) = \{P_{\alpha, \beta} f(\zeta)\} e_{m, n}$$

となっているのである。そこで  $\alpha = |n|, \beta = |m|$  とおいた。

また、分解(\*)において、 $dg = d\theta d\zeta d\theta'$  が  $G$  の不変測度、(Haar 測度) となる事が判る。そこで(\*\*) を用いると、例えば、 $f(\zeta) x^m u^n$  に対しては、

$$\begin{aligned} \|f(\zeta) x^m u^n\|_{L^2(G)}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 |x^{2m}| |u^{2n}| d\theta d\theta' d\zeta \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 (-\zeta)^{|n|} (1-\zeta)^{|m|} d\zeta \end{aligned}$$

これより、何故、 $(-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta$  なる density function が現れるのか、が判る。

以上により、 $P$  のスペクトルを調べる問題が、 $P_{\alpha, \beta}$  のスペクトルを調べる問題に帰着された。 $SU_{\mathbb{C}}(1, 1)$  という量子群に対して、上記と同様の考察を行なうと、出て来たのが、 $C_{\alpha, \beta}$  という差分作用素である。

### §5. 量子群 $SU_q(1,1)$ について.

ここでは、量子群  $SU_q(1,1)$  について、簡単な説明を与え、 $SU_q(1,1)$  の Casimir 作用素のスペクトルがどうなっているかを述べる。

古典 Lie 群  $SU(1,1)$  との比較により、説明する。

$$SU(1,1) \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \text{ に対して } \begin{array}{ll} g \mapsto x & g \mapsto u \\ g \mapsto v & g \mapsto y \end{array}$$

を、それぞれ、 $SU(1,1)$  上の関数と考えると、これらの関数は、 $xy - uv = 1$ ,  $\bar{x} = y$ ,  $\bar{u} = v$  なる関係式を満たしている。そして、 $SU(1,1)$  上の関数空間は、このような関係式を持つ生成元  $x, u, v, y$  で生成されているのである。

量子群  $SU_q(1,1)$  とは、(正確には、 $SU_q(1,1)$  の座標環  $A(SU_q(1,1))$  とは)、次の関係式を持つ 4 つの生成元  $x, u, v, y$  で生成された algebra の事である。

$$(1) \quad qxu = ux, \quad qxv = vx, \quad qvy = yv, \quad quy = yu \\ uv = vu, \quad xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1$$

$$(2) \quad x^* = y, \quad u^* = q^{-1}v, \quad v^* = qu, \quad y^* = x$$

(注意) (1) で  $q \rightarrow 1$  とすると、関係式  $xy - uv = 1$  だけが生き残る。また、(2) で  $*$  と書いたのは、作用素の adjoint の意味である。実際、このような algebra は、ある種の数列空間上の operator algebra として実現されるのである。

(注意2)  $SU(1,1)$  上の関数の全体は、(掛け算作用素と見て) 可換な operator algebra を成す。そして、 $SU_q(1,1)$  の座標環は形式的に  $q \rightarrow 1$  とした時、この可換な operator algebra に“収束”する。この時、(2) は、 $x=y$ ,  $u=v$  なる関係式に“収束”する。

(注意3)  $A(SU_q(1,1))$  と呼ばれるこの algebra は、更に Hopf algebra の構造を持つが、それについては説明を省く。

量子群  $SU_q(1,1)$  の場合にも、 $L^2$  空間  $L^2(SU_q(1,1))$  が構成できるが、その元は、 $\S 4$ , (井) と同様に、次の形に展開できる。 $f \in L^2(SU_q(1,1))$  に対して、

$$f = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m < 0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} u^n \\ (\#\#) + \sum_{m \geq 0, n < 0} f_{m,n}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m < 0, n < 0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} v^{-n}$$

ここで、 $\zeta = -q^{-1}uv$ 、とおいた。前述のように、 $x, u, v, y, \zeta$  は、ある数列空間上の作用素であり、 $f_{m,n}(\zeta)$  もそうであるが、ある種の考察により、 $\zeta, f_{m,n}(\zeta)$  は、(掛け算作用素として)  $(-\infty, 0]_q^2$  上の関数と同一視できる。

(井井)において、各  $(m,n)$  に対応する  $L^2(SU_q(1,1))$  の部分空間を  $H_{m,n}$  とし、又、 $\S 4$  と同様に  $e_{m,n}$  を定めるとする。

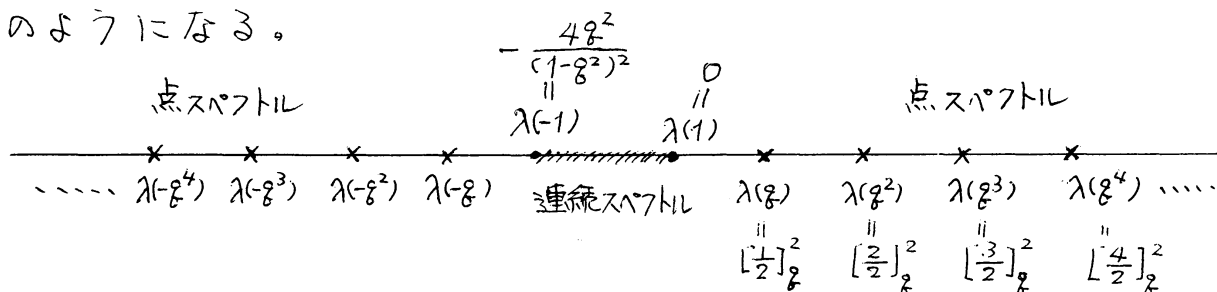
さて、 $SU(1,1)$  と同様、 $SU_q(1,1)$  上にも Casimir 作用素が定義される。それを  $C$  と表わすと、 $\S 4$  と同じ事が成り立つ。

即ち、 $f(\zeta)e_{m,n} \in H_{m,n}$  に対して  $C(f(\zeta)e_{m,n}) = \{C_{\alpha,\beta} f(\zeta)\} e_{m,n}$

ここで、 $|n| = \alpha$ ,  $|m| = \beta$  とおいた。

従って、量子群  $SU_{\hbar}(1,1)$  の Casimir 作用素  $C$  のスペクトル解析は、一変数の超幾何型差分作用素  $C_{\alpha,\beta}$  のスペクトル解析へと帰着される。この時、与 1、定理 1 からの帰結として、次の定理が成り立つ。

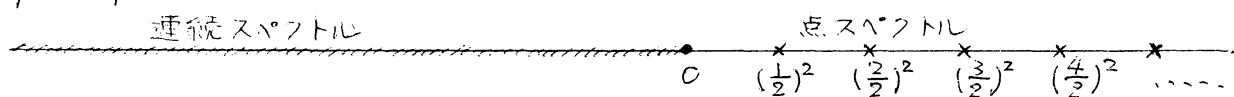
定理 3  $SU_{\hbar}(1,1)$  の Casimir 作用素  $C$  のスペクトルは、次のようになる。



(注意 1) 各点スペクトルの重複度は、 $\infty$  である。

(注意 2)  $\lambda > 0$  の部分の点スペクトル、連続スペクトル、そして、 $\lambda < 0$  の部分の点スペクトル、それぞれの固有空間の系列は、discrete series, principal continuous series, strange series, と呼ばれている。そして、この strange series という系列は、 $SU(1,1)$  の場合には存在しない系列であり、量子群と古典群の差異を表わしている。

(注意 3) 形式的に  $\hbar \rightarrow 1$  とすると、strange series は消滅し principal continuous series が無限に伸びて、次のようになる。



これは、 $SU(1,1)$  の Casimir 作用素のスペクトルと一致する。

## REFERENCES

- [1] Bargman Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. Math., 48 (1947) 568-640
- [2] Exton  $q$ -Hypergeometric Functions and Applications, John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Chichester Toronto 1983
- [3] Jimbo. M., A  $q$ -difference analogue of  $U_q(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., 10 (1985), 63-69
- [4] Kakehi T, Masuda T, and Ueno K, Spectral analysis of a  $q$ -difference operator which arises from the quantum  $SU(1,1)$  group, preprint
- [5] Kakehi T, Masuda T, and Ueno K, Spectrum of an operator appears in the quantum  $SU(1,1)$  group Quantum and Non-Commutative Analysis (H. Araki et al. eds. ) 253-261 (1993) Kluwer Academic Publishers
- [6] Masuda T, Mimachi K, Nakagami Y, Noumi M, Saburi Y, and Ueno K, Unitary representations of the quantum group  $SU_q(1,1)$  I, II Lett. Math. Phys 19 (1990) 187-194, 195-204

- [7] Ueno, K., Spectral analysis of the Casimir operator on the quantum group  $SU_q(1,1)$ , Proc. Japan Acad., 66 (1990), 42-44
- [8] Vaksman L. L. and Korodskii L. I., Spherical functions on the quantum group  $SU_q(1,1)$  and  $q$ -analogue of Fok - Mehler's formula, Funkts. Anal. Prilozhen (in Russian )
- [9] Woronowicz S. L., Twisted  $SU(2)$  group. An example of non-commutative differential calculus, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 23 (1987) 117-181
- [10] Woronowicz S. L. Differential calculus on compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 125-170