数理解析研究所講究録
456巻 1982年 111-122

数論的函数の特徴付けの問題

CNRS, 統数研　　J.-L. Mauclaire
都立大・理　　村田　玲音

自然数の上で定義された複素数値函数を、一般に数論的函数という。この中で特に、"$(m,n)=1$ ならば $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$" を満たすものを additive（加法的）, 任意の m, n に対して上の等式を満たすものを completely additive（完全加法的）と呼ぶ。同様に、"$(m,n)=1$ ならば $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$" を満たすものを multiplicative（乗法的）, 任意の m, n でこの等式を満たすものを completely multiplicative（完全乗法的）という。

§1　問題の概略

1946年に Erdös は [1] の中で、『$f(n)$ を additive な数論的函数とする時、これが更に単調非減少であれば $f(n)=c\log n$ ($c\in\mathbb{R}$) と限られてしまう』ことを示した。これが一つのきっかけとなり、「特殊な数論的函数を、いくつかの（解析的な）条件で規定できるかを調べる」方向の研究が始められた。

特殊な数論的函数といっても、現在までに結果が得られているのは、数論的函数の中で最も易しい $f(n) = c \log n$ と $f(n) = n^c$ の場合のみである。従って、ここで"数論的函数の特徴付けの問題"とは、次の二つの問題をさす。

[A] $f(n)$ を additive とする時、他にどんな条件を付ければ $f(n) = c \cdot \log n$ $(c \in \mathbb{C})$ と $f(n)$ を決定できるか？

[M] $f(n)$ を multiplicative とする時、他にどんな条件を付ければ $f(n) = n^c$ $(c \in \mathbb{C})$ と $f(n)$ を決定できるか？

色々な点から見て、問題[M]は[A]よりかなりむつかしいようである。最近我々は[M]に関して一つの結果を得たので[6]、その解説を中心に話を進めてゆきたい。

ここで問題[A],[M]について、今までに得られている主な結果を挙げておく。以下、(A-1)から(A-3)では、$f(n)$ が additive である事を仮定しておき、(M-1)から(M-3)では $f(n)$ が multiplicative である事を仮定しておく。

(A-1) $f(n+1) \geq f(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なら $f(n) = c \log n, (c \in \mathbb{R})$

(A-2) $\lim_{n\to\infty} |f(n+1) - f(n)| = 0$ なら $f(n) = c \log n$. $(c \in \mathbb{C})$.

(A-3) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0$ なら $f(n) = c \log n$. $(c \in \mathbb{R})$.

この中で、(A-1),(A-2) は Erdös [1] による。(A-3) は、Erdös が [1] で予想し、Kátai が [2] で解決したもの。

註1) Erdös は同じ [1] の中で、「S を自然密度 0 の $\mathbb{N}$ の部分列とする時 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\in S\\ n\le x}}|f(n+1)-f(n)|=0$ ならば $f(n)=c\cdot\log n$ $(c\in\mathbb{C})$」を予想している。これはまだ解決されていないが、この仮定の下に $f(n)$ が completely ~~multiplicative~~ additive であることは証明できている([4])。

(M-1) $f(n)>0$, $f(n+1)\geqq f(n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ なら $f(n)=n^a$ $(a\geqq 0)$.

(M-2) Birch の結果 [3]。(§4 で詳しく述べる)

(M-3) 今回の我々の結果。

[A] に関しては、上に挙げた3つ以外にもいくつかの結果が得られているが、[M] については、この3つ以外にはないようである。

§2, §3 では、(M-3) の結果の紹介と証明の概略を述べ、§4 では、主に (M-2) と (M-3) との関係を見ることにする。

§2 今回の結果

定理 1 $f(n)$ を multiplicative な数論的函数とする。下の条件 I) ~ III) を満たすような positive, non-decreasing な函数 $g(x)$ が存在するなら、$f(n)$ は completely multi. であり、更に或る定数 λ $(\geqq -1)$ が存在して $|f(n)|=n^\lambda$ と書ける。

I) $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$, $g(2x)=O(g(x))$,

II) $\lim_{x\to\infty} g(x)^{-1}\sum_{n\le x}|f(n+1)-f(n)|=0$,

III) $\limsup_{x\to\infty} g(x)^{-1}\left|\sum_{n\le x} f(n)\right|>0$ (+∞ も許す)。

定理 2　$f(n)$ を multiplicative な数論的函数とする。定理1の条件 II) と，下の条件 I'), III') を満たすような positive, non-decreasing な函数 $g(x)$ が存在するなら，或る定数 λ (≥ -1) が存在して $f(n) = n^{\lambda}$ と決まる。

I')　$\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$，$\forall d \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{x\to\infty} g(dx)/g(x) = h(d)$ が存在する。

III')　$\lim_{x\to\infty} g(x)^{-1} \sum_{n\leq x} f(n) = \mu\ (<\infty)$ が存在し，かつ $\mu \neq 0$。

さて，問題[M]の目標は，適当な条件から $f(n) = n^{a+bi}$, $(a, b \in \mathbb{R})$ を導き出すことであった。我々の定理1は，I) ~ III) があれば a の部分は決まる事を示している。定理2では，I), III) より強い条件 I'), III') を採用した為，$f(n)$ を決めることができた。しかし条件が強すぎて，実数値函数 n^a の特徴付けになってしまっている。実は，上に挙げた (M-1), (M-2) 共，n^a $(a \in \mathbb{R})$ の特徴付けなのであって，真の複素数値函数，n^{a+bi} $(b \neq 0)$ の特徴付けを与える条件はまだ得られていないのである。我々は，I) ~ III) から b の部分まで決定出来ないかどうかを，色々と試みたが，今までのところうまくゆかなかった。函数 n^{bi} を b によってどのように特徴付けるかという点に難しさがあるようである。

§3. 証明の概略

この節では、定理1, 2の証明の概略を述べる。

定理1の証明で最も工夫を要したのは、$f(n)$ の completeness を証明する補題4である。ここは少し詳しく書き、残りの部分は結果のみ記すに止める。(詳細は [7] 参照)

以下、$f(n)$: multiplicative と、$g(x)$: positive, non-decreasing, $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ は常に仮定する。又、函数 $F(x)$ が $\limsup_{x\to\infty} \frac{|F(x)|}{g(x)} > 0$ を満たす時、$F(x) = \Omega(g(x))$ と書くことにする。

定理1の略証.

補題1 $f(n)$, $g(x)$ が II) を満たすなら、$\forall d \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv 0(d)}} f(n) - \frac{1}{d}\sum_{n\le x} f(n) = o(g(x)). \qquad (*)$$

補題2 $f(n)$, $g(x)$ が II), III) を満たすなら、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$f(n) \neq 0$.

補題3. $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{Z}$ とする.

a) $f(n)$, $g(x)$ が I), II) をみたすならば,

$$\sum_{\substack{n\le x \\ \alpha n+\beta \in \mathbb{N}}} |f(\alpha n+\beta+1) - f(\alpha n+\beta)| = o(g(x)).$$

b) $f(n)$, $g(x)$ が I), II), III) をみたすならば,

$$\sum_{n\le x} f(\alpha n+1) = \Omega(g(x)).$$

補題4. 定理1の仮定の下に、$f(n)$ は completely multi. である。

証明。 任意の偶数 g に対して $f(g^k) = f(g)^k$ $(k \geq 2)$ が示せれば充分である。更にこれを示す為には、

$$f(Q)\{f(g^k) - f(g)^k\} \cdot F(x) = o(g(x)), \quad Q \in \mathbb{N}, \quad F(x) = \Omega(g(x))$$

の形の式が得られればよい。実際、この式の両辺を $g(x)$ で割って $x \to \infty$ とすれば、右辺は 0 にゆく。左辺の $f(Q) \neq 0$ が補題2によって分っているし、$\limsup_{x\to\infty} F(x)/g(x) > 0$ だから、左辺が 0 へゆく為には $f(g^k) = f(g)^k$ でなければならないのである。

さて、上の形の式を得る為に我々は次の形の数を利用する。

$$S_k(g) = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{k-1}, \quad g: \text{偶数}, \quad k \in \mathbb{N}。$$

1° 補題3-d)を用いると、次が示せる：$k \geq 2$ として、

$$\sum_{m \leq x} \left| f(g^k m + S_k(g)) - f(g) f(g^{k-1} m + S_{k-1}(g)) \right| = o(g(x))$$

2° 1°をくり返し使うと、やはり $k \geq 2$ で、

$$\sum_{m \leq x} \left| f(g^k m + S_k(g)) - f(g)^{k-1} \cdot f(gm) \right| = o(g(x))。$$

3° ここで 2° の m を、$m = S_k(g)\{S_k(g) \cdot g \cdot n + 1\}$ $n \in \mathbb{N}$ の形のものに制限する。すると 2° の $\sum$ の中に現われた項は、

$$\begin{aligned} &f(g^k m + S_k(g)) - f(g)^{k-1} f(gm) \\ &\quad = f(S_k(g))\left\{ f(g^k(S_k(g) g n + 1) + 1) - f\left(g^k(S_k(g) g n + 1)\right)\right\} \\ &\qquad + f(S_k(g)) \cdot f(S_k(g) g n + 1)\left\{ f(g^k) - f(g)^k \right\} \end{aligned}$$

と変形できる。

4° 3°の式で、右辺第1項を移項し、$\sum_{n\leq x}$ をとる。

$$|f(S_k(g))|\cdot\left|f(g^k)-f(g)^k\right|\cdot\sum_{n\leq x}|f(S_k(g)gn+1)|$$
$$\leq\sum_{m\leq S_k(g)\{S_k(g)\cdot g+1\}x}|f(g^k m+S_k(g))-f(g)^{k-1}f(gm)|$$
$$+|f(S_k(g))|\cdot\sum_{n\leq x}\left|f\left(g^k(S_k(g)gn+1)+1\right)-f\left(g^k(S_k(g)gn+1)\right)\right|.$$

右辺第1項は 2° と $g(x)$ に関する条件 I) より $o(g(x))$ が分り、右辺第2項も補題3-a) によって $o(g(x))$ が分る。又、左辺に現われた $\sum_{n\leq x}$ の項は、補題3-b) によって $\Omega(g(x))$ であり、これで証明の冒頭に書いた形の式が得られた。 補題4 Q.E.D.

ここから定理1を証明するのは容易である。$f(n)$, $g(x)$ が定理の仮定を満たすなら、$|f(n)|$, $g(x)$ もこれらを満たす事は容易に分るから、我々は $|f(n)|$ が completely multiplicative で、$|f(n)|>0$, 補題1の (*) も $|f(n)|$ について成立しているとしてよい。$S(x)=\sum_{n\leq x}|f(n)|$ とおけば、(*) の式は、

$$\left|\frac{S(\frac{x}{d})}{S(x)}-\frac{1}{d|f(d)|}\right|=o\left(\frac{g(x)}{S(x)}\right)$$

となる。条件 III) より $o\left(\frac{g(x_i)}{S(x_i)}\right)=o(1)$ であるような部分列、$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_i\to\infty)$ がとれて、$\lim_{i\to\infty}\frac{S(\frac{x_i}{d})}{S(x_i)}=\frac{1}{d|f(d)|}$ となる。$d_1<d_2$ なる2つの数をとれば、$S(\frac{x_i}{d_1})\geq S(\frac{x_i}{d_2})$ であるから $\frac{1}{d_1|f(d_1)|}\geq\frac{1}{d_2|f(d_2)|}$, 即ち $n|f(n)|$ は positive, non-decreasing な multiplicative function である。すると §1 に挙げた結

果（M-1）により定理の結論が得られる。　定理1 略証 終.

定理2の略証。　仮定I')に現われた $h(d)$ に関して、次の補題が成立する。

補題5　　$h(d) = d^{\kappa}$, $\kappa \geqslant 0$　と書ける。

この証明も、やはり $h(d)$ が positive, non-decreasing, multiplicative である事を示して（M-1）を利用するのである。

さて、定理2の条件 I'), III') はそれぞれ I), III) より強いから、$f(n)$ について補題1, 4は成立している。(*) の式より容易に

$$f(d)\cdot g(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\sum_{n\leqslant x} f(n)\right\} - \frac{1}{d}\, g(dx)\left\{\frac{1}{g(dx)}\sum_{n\leqslant dx} f(n)\right\} = o\big(g(dx)\big)$$

が得られ、ここで $x\to\infty$ として条件 III') を使えば

$$\mu \times \left\{ f(d) - \frac{h(d)}{d}\right\} = 0 \quad , \quad \text{即ち} \quad f(d) = \frac{h(d)}{d} = d^{\kappa-1}$$

を得る。　定理2. 略証 終.

以上の証明を見て分るように、定理1, 2とも、最後の $f(n)$, $|f(n)|$ の形を決める時には結果（M-1）に帰着させた。ところで、この（M-1）は Erdös の（A-1）を Multiplicative の言葉に言い直したものである。こうした点から見ても、我々の今回の結果は Erdös の仕事の延長上にあるといえるだろう。一方、次節に挙げる Birch の仕事（M-2）は、全く違った方

向の研究から出てきたものである。この結果は、或る意味で、我々の結果に含まれてしまうので、次節でその事を述べる。

§4 Birch の結果との関係

Birch の結果[3]を説明する為、次の定義を置く。

定義 $f(n)$ を数論的函数とする。「f が non-decreasing normal order $F(x)$ を持つ」とは、$F(x)$ が次の2条件を満たす事とする。

(i) $F(x)$ は non-decreasing function,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\#\{n \leq x ; |f(n) - F(n)| > \varepsilon |F(n)|\} = o(x)$.

定理 (Birch, 1967) $f(n)$ を、positive, unbounded な multiplicative arith. func. とし、これが non-decreasing normal order を持つならば、$f(n) = n^{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ に限る。

註2) non-decreasing normal order の概念を導入したのは Hardy-Ramanujan である。彼等は $\omega(n) \approx \log\log n$ を証明している (1914)。ここで $\omega(n)$ は n を割る異なる素数の個数で、$\omega(n)$ は additive である。($\approx$ は左辺の函数が右辺の函数を non-decreasing normal order として持つことの略記号。) 以後、additive な数論的函数については $\log\varphi(n) \approx \log n$ (Landau) 等の結果があるが、multiplicative なものについては、$\varphi(n)$, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ が共に non-decreasing normal order を持たない ことが Segal によって示されていた (1964, 1965)。上の Birch の結果は、non-decrea-

sing normal order を持つ multiplicative な数論的函数は本質的には n^λ $(\lambda>0)$ しかないことを示したもので，multiplicative な数論的函数の non-decreasing normal order を求める問題に，終止符を打ったものである。

Birch の結果は註2にあるような経緯をへて得られたもので，Erdös 流の理論上にはないものであるが，この結果を我々の結果に組み入れることができる。

定理 3　$f(n)$ を positive, unbounded な multiplicative arith. function とし，これが non-decreasing normal order $F(x)$ を持つとする。$g(x)=\sum_{n\leq x} F(n)$ とおけば，この $g(x)$ は定理2の条件 I'), II), III') をみたす。

この定理の証明には，次の2つの補題が要る。

補題 5　$f(n)$, $F(x)$, $g(x)$ を定理3にあるようにとると，或る正定数 U が存在して，$\dfrac{g(x)}{x\cdot F(x)} > U > 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$。

補題 6　補題5と同じ仮定の下に，或る正定数 V が存在して，$\dfrac{f(n)}{F(n)} < V$ $(\forall n\in\mathbb{N})$。

補題5から直ちに次の系が得られる。

系 i)　S を自然密度が0であるような $\mathbb{N}$ の部分列とすれば，

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in S}} F(n) = o(g(x)).$$

ii)　$F(x) = o(g(x))$。

さて，$g(x)$ が定理2の条件 I'), II), III') をみたすことは，この系と補題6とを使えば，比較的容易にたしかめるこ

とができる。ただし I') の $h(d)$ の存在を証明する部分が少々むつかしく，まず $g(2x) = O(g(x))$ を示して $f(n)$ が completely multiplicative である事を言い（定理1），これを使って $h(d)$ の存在を言わねばならないようである。補題5と6の証明は，かなりやっかいであるが，ここでは省略する。

Birch の採用した条件と，我々が定理2で置いた条件とはかなりかけ離れたものに見えるが，「$f(n) = n^{\lambda}$ と決定できる」という一点で結びついていた。定理3は，$f(n)$ を決めてしまう前の段階で，両者の条件の間に道をつけたもので，それなりの意味はあるだろう。

以上，multiplicative な数論的函数の特徴づけを中心に述べてきたが，§1にも書いたように，数論的函数の特徴づけ問題には，[A] と [M] とがあった。この2つの問題に属する多くの問題が，まだ未解決のままで残されている。[A] に関する open problems の主なものは，[5] に挙げたので参照して頂きたい。問題 [M] に関しては，§2の終わりにも書いたことだが，複素数値函数 n^{it} の特徴付けが当面の課題であろう。

参考文献

[1] P. Erdös : On the distribution function of additive functions, Annals of Math., Vol. 47 (1946), 1 – 20

[2] I. Kátai : On a problem of P. Erdös, J. of Number Theory Vol. 2 (1970), 1 – 6

[3] B. J. Birch : Multiplicative functions with non-decreasing normal order, J. of London Math. Soc., Vol. 42 (1967), 149 – 151

[4] J.-L. Mauclaire, L. Murata : On the regularity of arithmetic multiplicative functions I., Proc. Japan Acad., Vol. 56 (1980) 438 – 440

[5] ———, ——— : ——— II., ibid. Vol. 57 (1981), 130 – 133

[6] ———, ——— : ——— III., ibid. Vol. 57 (1981), 335 – 336

[7] ———, ——— : On a characterization of some arithmetic multipricative functions (pre-print)

以上の他に，次の2ヶ所にも今回の話に関連のある文献が多数、挙げてある。

- J.-L. Mauclaire : Contribution à la theorie des fonctions additives, Thèse, Orsay Université (1977) の末尾の文献表.
- LeVeque 編, Revies in Number Theory の N 60, N 64 に入っている論文.

(以上)