

Homogeneous type の空間上での H^p について

東北大 教養部数学科 内山明人

概要.

$\psi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\int \psi_0 dy \neq 0$ とする. $f \in \mathcal{S}'$,
 $x \in \mathbb{R}^n$, $M > 0$ に対し,

$$f^+(x) = \sup_{t>0} |f * \psi_{0,t}(x)|$$

$$f^{*M}(x) = \sup \{ |f * \psi_t(x)| : \psi \in \mathcal{S}$$

$$\text{supp } \psi \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\},$$

$$\|D^\alpha \psi\|_\infty \quad (|\alpha| \leq M) \}$$

と定義する. 但し, $\psi_t(y) = t^{-n} \psi(y/t)$.

Fefferman - Stein [11] は次を示した.

定理 A. $\forall p > 0$ に対し $M(p, n)$ が存在し, $\forall M \geq M(p, n)$
 に対し,

$$c \|f^+\|_{L^p} \leq \|f^{*M}\|_{L^p} \leq C \|f^+\|_{L^p}$$

が成立する. 但し, c, C は, ψ_0, p, n, M にのみよる.

以下, 定理 A を, homogeneous type の空間で考察する.

問題の説明 ($\mathbb{R}^n$ の場合)

以下の 2 ページにおいては, x は $(x_1, \dots, x_n)$ をいみし,
 $|x|$ は $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ をいみする。

まず, Coifman-Weiss [8] によって, $H^p(\mathbb{R}^n)$ を定義する。

関数 $a(x)$ が p -atom (但し $0 < p \leq 1$) であるとは, ある球
 $B(x_0, r) = \{x : |x - x_0| < r\}$ が存在して

$$\text{supp } a \subset B(x_0, r)$$

$$\|a\|_\infty \leq |B(x_0, r)|^{-1/p}$$

$$\int a(x) p(x) = 0 \quad (\forall p(x) : [n/p - n] \text{ 次以下の多項式})$$

なることである。但し, $|B|$ は B のルベグ測度をいみする。

$[t]$ は t の整数部分をいみする。

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $0 < p \leq 1$ とに対し

$$\|f\|_{H^p} = \inf \left\{ \left(\sum |\lambda_j|^p \right)^{1/p} : \right.$$

$$\left. \exists \{a_j(x)\}_{j=1}^\infty \text{ } p\text{-atoms s.t. } f = \sum \lambda_j a_j \right\}$$

と定義する。もしも, かかる $\{\lambda_j\}$ が存在しないときは,

$$\|f\|_{H^p} = \infty \text{ と定義する。}$$

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H^p} < \infty\}$$

と定義する。

Fefferman - Riviere - Sagher [10] の結果を使って,
 Coifman [5] は次を示した。

定理 B. $1 \leq p < \infty$, $M > [n/p - n]$ であれば,
 $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$c \|f^{*M}\|_p \leq \|f\|_{H^p} \leq C \|f^{*M}\|_p$$

が成立する。但し, C, c は M, p, n にのみよる。

Coifman は $n=1$ の case で示した。 $n \geq 2$ は,
 Latter [14] による。

定理 A, B もあわせることにより, 次が得られる。

$$(*) \quad c \|f^+\|_p \leq \|f\|_{H^p} \leq C \|f^+\|_p.$$

$p=1$ の場合には, Carleson [3] が (*) の別証明を与えてい
 る。 Carleson の証明を拡張して, Coifman - Weiss -
 Meyer は (*) が homogeneous type の空間上でも,
 $p=1$ の場合には成立することを示した。 [[8] p 642.]
 この証明は, H^1 -BMO の duality を使っている。 しかし,
 $p < 1$ のときは, $\|\cdot\|_{H^p}$ は ノルムにならないので, dual
 space を使った議論は, あまり有効ではない。

ある種の条件をみたす homogeneous type の空間上において
 は, 定理 A が成立するという結果を得たので以下報告する。
 一オ, Macías - Segovia [16] は, 定理 B が homogeneous
 type の空間上で成立することを示しているので, 我々の結
 果とあわせることにより, (*) が homogeneous type の空
 間上において成立することがわかる。

本論

以下, x, y, z は位相空間 X の元とする。 X にはボレル測度 μ と, 仮似距離 d が定義され, 次のみたす。

$$(0) \quad d(x, y) = d(y, x) \geq 0$$

$$(1) \quad d(x, y) > 0 \quad (x \neq y)$$

$$(2) \quad d(x, z) \leq A(d(x, y) + d(y, z))$$

$$(3) \quad A^{-1}r \leq \mu(B(x, r)) \leq r$$

但し, $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ ($r > 0$) が点 x の開近傍の基をなす。

$K(r, x, y)$ は $\mathbb{R}^+ \times X \times X$ 上で定義された非負連続関数で, 次のみたす。

$$(4) \quad K(r, x, y) = 0 \quad \text{if} \quad d(x, y) > r$$

$$(5) \quad K(r, x, x) > A^{-1} > 0$$

$$(6) \quad K(r, x, y) \leq 1$$

$$(7) \quad |K(r, x, y) - K(r, x, z)| \leq (d(y, z)/r)^{\alpha}$$

次のことに注意せよ。

$$\exists C_1 > 0, \exists C_2 > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$(8) \quad C_1 K(r, x, y) > 1 \quad \text{if} \quad d(x, y) < C_2 r$$

定義. $f \in L^1_{loc}(X)$ のとき,

$$F(r, x, f) = \int K(r, x, y) f \, d\mu(y) / r$$

$$f^+(x) = \sup_{r>0} |F(r, x, f)|$$

$$M_p(f)(x) = \sup_{r>0} (F(r, x, |f|^p))^{1/p}$$

$$L(f, 0) = \sup_{x \in X, r>0} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B(x, r)} |f(y) - c| d\mu(y) / r$$

$$L(f, \alpha) = \sup_{x \in X, y \in X, x \neq y} |f(x) - f(y)| / d(x, y)^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$\|f\|^{(\alpha)} = L(f, \alpha) \quad \text{if } \mu(X) = \infty$$

$$\|f\|^{(\alpha)} = L(f, \alpha) + \left| \int_X f(y) d\mu(y) \right| / \mu(X)^{\alpha+1} \quad \text{if } \mu(X) < \infty$$

$$L_\alpha(X) = \{f \in L^\infty(X) : \|f\|^{(\alpha)} < \infty\}$$

定義. $\int a(y) d\mu(y) = 0 \quad \forall \quad \exists B(x_0, r_0) \text{ s.t.}$

$\text{supp } a \subset B(x_0, r_0), \quad \|a\|_\infty \leq r_0^{-1/p}$ のとき,

$a(x)$ を p -atom と呼ぶ. (但し $0 < p \leq 1$)

注意. $\|a\|_{L_{p-1}^*} \leq 1$ は明らかである. (但し, L_{p-1}^* は, L_{p-1} の dual space.)

定義. $f \in L_{p-1}^*$ に対し

$$\|f\|_{HP} = \inf \left\{ \left(\sum |\lambda_i|^p \right)^{1/p} : \exists \{a_i(x)\}_{i=1}^\infty \text{ } p\text{-atoms s.t. } f = \sum \lambda_i a_i \right\}$$

定義. $f \in L'_{loc}(X)$ のとき,

$$f^*(x) = \sup \left\{ \left| \int f(y) \varphi(y) d\mu(y) \right| / r : r > 0, \text{supp } \varphi \subset B(x, r), L(\varphi, 0) \leq r^{-\alpha}, \| \varphi \|_\infty \leq 1 \right\}$$

我々の結果は次のものである。

定理 1. X のみで定まるある $p_1 < 1$ が存在して次をみたす。
 任意の $f \in L^1(X)$ と任意の $p > p_1$ とに対し、

$$\|f^*\|_{L^p} \leq c_1 \|f^+\|_{L^p}$$
 が成立する。但し、 c_1 は p と X とのみで定まる。

注意. $p > 1$ のときは、上の結果は、Hardy - Littlewood
 の maximal theorem から明らかである。 $p = 1$ の場合は、
 [8] によって示されている。

Macias - Segovia [16] は、次を示した。

定理 C. $f \in L^1(X)$ かつ $1 \leq p < 1/(1+\delta)$ とすると、

$$c_2 \|f^*\|_{L^p} \leq \|f\|_{H^p} \leq c_3 \|f^*\|_{L^p}$$
 但し、 c_2 と c_3 は p と X とのみによる。

注意. 定理 C は、[15] と同じ方法でも示せる。

定理 1 と C との系として、次を得る。

系 1. $p_2 < 1$ が X のみによって与えられるとき、
 $\forall f \in L^1(X)$ と $1 \leq p < p_2$ とに対し、

$$\|f^+\|_{L^p} \leq c_4 \|f\|_{H^p} \leq c_5 \|f^*\|_{L^p} \leq c_6 \|f^+\|_{L^p}$$
 但し、 c_4, c_5, c_6 は p と X のみによる。

定理 1 の証明のために、補題を用いる。

以下、 $N = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ とする。

補題 1. dv を $X \times \mathbb{R}^+$ 上の非負測度で

$$(10) \quad \nu(B(x, r) \times (0, r)) \leq r^{1+\delta}$$

をみたすとする。但し, $\delta \geq 0$ は r と x に独立。

このとき, $\forall p > 1$ と $\forall f \in L^p(X)$ に対し次が成立。

$$\left\{ \iint_{X \times \mathbb{R}^+} |F(r, y, f)|^{p(1+\delta)} dv(y, r) \right\}^{1/(p(1+\delta))} \leq c_{p, \delta} \|f\|_{L^p_{dv}(X)}.$$

注意. $\delta = 0$ のときは, よく知られた Carleson の結果である。 $\delta > 0$ のときは, Duren [9] の結果である。

証明. $f \in L^p(X)$, $\lambda > 0$ とする。

$$V_\lambda = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R}^+ : |F(r, x, f)| > \lambda\}$$

$$(11) \quad q = 2A.$$

とする。

$$W_{n, \lambda} = \{x \in X : \sup_{q^{n-1} < r \leq q^n} |F(r, x, f)| > \lambda\}$$

$$\text{とする} \quad \exists M_{f, \lambda} : W_n = \emptyset \quad \text{if } n > M.$$

各 $n \leq M$ に対し $\{B(y_{nj}, q^n)\}_j$ がとれて次をみたす。

$$(12) \quad y_{nj} \in W_{n, \lambda}$$

$$B(y_{nj}, q^n) \cap \left(\bigcup_{m=n+1}^M \bigcup_i B(y_{mi}, q^m) \right) = \emptyset$$

$$\forall x \in W_{n, \lambda} \quad \text{に対し}$$

$$B(x, q^n) \cap \left(\bigcup_{m=n}^M \bigcup_i B(y_{mi}, q^m) \right) \neq \emptyset.$$

(2) と (11) より,

$$V_\lambda \subset \bigcup_n \bigcup_j (B(y_{nj}, q_b^{n+1}) \times (0, q_b^n)).$$

よって,

$$\begin{aligned} & \lambda^{p(1+\delta)} \nu(V_\lambda) \\ & \leq \sum_n \sum_j \nu(B(y_{nj}, q_b^{n+1}) \times (0, q_b^n)) \lambda^{p(1+\delta)} \\ & \leq \sum_n \sum_j q_b^{(n+1)(1+\delta)} \left(\int_{B(y_{nj}, q_b^n)} |f(y)| d\mu(y) / q_b^{n-1} \right)^{p(1+\delta)} \\ & \leq \sum_n \sum_j q_b^{(n+1)(1+\delta)} q_b^{p(1+\delta)} \\ & \quad \left(\int_{B(y_{nj}, q_b^n)} |f(y)|^p d\mu(y) / q_b^{n-1} \right)^{1+\delta} \\ & \leq c_{p,\delta} \left(\sum_n \sum_j \int_{B(y_{nj}, q_b^n)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{1+\delta} \\ & \leq c_{p,\delta} \left(\int_X |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{1+\delta} \end{aligned}$$

よって, Marcinkiewicz の補間定理から, 補題 1 が示される。

補題 2. $g(x)$ を, X 上で定義された非負関数とする。すると, 各 $t > 0$ に対し, $\{x(g, t, j)\}_{j=1,2,\dots}$ が存在して次をみたす。

$$(20) \quad 1 \leq C_1 \sum_j K(t, x(g, t, j), y) \leq C_3 \quad (\forall y \in X)$$

$$(21) \quad g(x(g, t, j)) \leq C_4 F(t, x(g, t, j), g^{1/2})^2 \quad (\forall j)$$

証明. まず, 次をみたす $\{y(t, j)\}_j$ をえらぶ

$$(22) \quad d(y(t, i), y(t, j)) \geq (2A)^{-1} C_2 t \quad (i \neq j)$$

$$(23) \quad \sum_j \chi_{B(y(t,j), (2A)^{-1}C_2 t)}(x) \geq 1 \quad (\forall x \in X)$$

各 $y(t, j)$ に対し, $x(t, j)$ をつぎのようにとる.

$$(24) \quad d(x(t, j), y(t, j)) \leq (2A)^{-1} C_2 t$$

$$(25) \quad g(x(t, j)) \leq$$

$$\left(\int_{B(y(t,j), (2A)^{-1}C_2 t)} g(y)^{1/2} d\mu(y) / ((2A)^{-2} C_2 t) \right)^2$$

すると, (8), (22), (23), (24), (25) から (20), (21) が出る。

補題 3. X のみで定まる $p_1 < 1$ と C_5 が存在して次をみたす。 $\forall f \in L^1_{loc}(X)$ と

$$\text{supp } \varphi \subset B(x_0, r_0), \quad L(\varphi, \vartheta) \leq r_0^{-\vartheta}, \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1$$

をみたす $\forall \varphi \quad \forall x_0 \quad \forall r_0$ とに対し,

$$\left| \int f(y) \varphi(y) d\mu(y) \right| / r_0 \leq C_5 \left(\int_{B(x_0, r_0)} f^+(y)^{p_1} d\mu(y) / r_0 \right)^{1/p_1}$$

注意. 以下の証明は, Carleson - Garnett [4] の idea を少し借用した。

証明. $r_0 = 1$ とし, 一般性を失わない。

$$(30) \quad \varepsilon = 1/(4C_5)$$

とする。 η は X のみによる十分小さな正数とする。以下,

$\varphi(x) \geq 0$ として示す。まず, 次をみたす $\{x_{sj}\}_{s=1,2,\dots; j=1,2,\dots,j(s)}$

$\subset X$ を帰納的に構成する。

$$(31) \quad \left\| \sum_{j=1}^{j(s)} \chi_{B_{sj}} \right\|_{\infty} \leq C_3 \quad (\forall s \in \mathbb{N})$$

$$\text{但し, } B_{sj} = B(x_{sj}, C_2 \eta^s)$$

$$(32) \quad f^+(x_{sj}) \leq C_4 F(\eta^s, x_{sj}, f^{+1/2})^2$$

$$(33) \quad 0 \leq \varphi_s(x) \leq (1-\varepsilon)^s$$

但し,

$$(34) \quad \varphi_s(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^s \varepsilon (1-\varepsilon)^{i-1} \sum_{j=1}^{j(i)} C_1 K(\eta^i, x_{ij}, x)$$

また, $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ とおく。 $\{x_{ij}\}_{i=1, \dots, s-1; j=1, \dots, j(i)}$ が構成されたとする。 φ_{s-1} を (34) で定義する。 すると,

(31) と (7) とから,

$$\begin{aligned} (35) \quad |\varphi_{s-1}(x) - \varphi_{s-1}(y)| &\leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + \\ &\quad \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon (1-\varepsilon)^{i-1} \sum_j C_1 |K(\eta^i, x_{ij}, x) - K(\eta^i, x_{ij}, y)| \\ &\leq d(x, y)^{\delta} + \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon (1-\varepsilon)^{i-1} C_1 2 C_3 (d(x, y)/\eta^i)^{\delta} \\ &\leq d(x, y)^{\delta} \left\{ 1 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon (1-\varepsilon)^{-1} 2 C_1 C_3 ((1-\varepsilon)/\eta^{\delta})^{s-1} (1 - \eta^{\delta}/(1-\varepsilon))^{-1} \right\} \\ &\leq C ((1-\varepsilon)/\eta^{\delta})^{s-1} d(x, y)^{\delta} \end{aligned}$$

$\Omega_{s, \lambda} = \{x \in X : \varphi_{s-1}(x) > \lambda (1-\varepsilon)^{s-1}\}$ とおく。 $g = f^+$ と $t = \eta^s$ に対して補題 2 を適用すると, (20)-(21)をみたす

$\{x(f^+, \eta^s, j)\}_{j=1, 2, \dots}$ が得られる。 $\Omega_{s, 2/3}$ に含まれる $\{x(f^+, \eta^s, j)\}_{j=1}^{j(s)}$ を $\{x_{sj}\}_{j=1}^{j(s)}$ と定義する。 すると, (31)

と (32) はみたされる。(20) より

$$(36) \quad \varepsilon (1-\varepsilon)^{s-1} C_1 \sum_{j=1}^{j(s)} K(\eta^s, x_{sj}, y) \leq C_3 \varepsilon (1-\varepsilon)^{s-1}$$

もしも,

$$\text{supp } K(\eta^s, x, \cdot) \cap \Omega_{s, 1-\varepsilon} \neq \emptyset$$

とあると, (33) より $x \in \Omega_{s, 2/3}$. よって, (20) より,

$$(37) \quad \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} \leq \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} C_1 \sum_{j=1}^{j(s)} K(\eta^s, x_{sj}, y) \quad (\forall y \in \Omega_{s, 1-\varepsilon}).$$

同様に, $\text{supp } K(\eta^s, x, \cdot) \cap \Omega_{s, 1/2}^c \neq \emptyset$ とあると, (35)

より, $x \notin \Omega_{s, 2/3}$. よって,

$$(38) \quad \sum_j K(\eta^s, x_{sj}, y) = 0 \quad (\forall y \in \Omega_{s, 1/2}^c)$$

となり, (30), (36), (37), (38) から (33) が出る。

以上より,

$$\varphi(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{j(s)} \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} C_1 K(\eta^s, x_{sj}, x)$$

となり,

$$\begin{aligned} \int f(y) \varphi(y) d\mu(y) &= \\ \sum_{s \in \mathbb{N}} \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} \sum_j C_1 \int f(y) K(\eta^s, x_{sj}, y) d\mu(y) &= \\ = C_1 \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1} \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f). \end{aligned}$$

(32) より

$$\begin{aligned} & \left| \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f) \right| \\ & \leq \sum_s \sum_j C_4 (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f^{+1/2})^2 \\ & = C_4 \iint_{x \in R^+} (F(r, x, f^{+1/2}))^2 d\nu(x, r) \end{aligned}$$

但し, $\nu = \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s \delta_{(x_{sj}, \eta^s)}$

$\delta_{(x, r)}$ は点 (x, r) の Dirac 測度

$$\begin{aligned} \nu(B(x, r) \times (0, r)) &\leq C r (1-\varepsilon)^{\log r / \log \eta} \\ &= C r^{1 + \log(1-\varepsilon) / \log \eta} \end{aligned}$$

かつ

$$F(r, x, f^{+1/2}) = F(r, x, f^{+1/2} \chi_{B(x_0, 1)})$$

(on $\text{supp } \nu$)

なることに注意すると, 補題 1 より

$$\begin{aligned} &\iint_{X \times \mathbb{R}^+} F(r, x, f^{+1/2} \chi_{B(x_0, 1)})^2 d\nu \\ &\leq C \left(\int_X (f^{+1/2} \chi(y))^{2/(1+\delta)} d\mu \right)^{1+\delta} \\ &= C \|f^+ \chi\|_{L^{1/(1+\delta)}}^{2(1+\delta)} \\ &= C \left(\int_{B(x_0, 1)} f^+(y)^{1/(1+\delta)} d\mu \right)^{1+\delta} \end{aligned}$$

以上で, 補題 3 の証明を終る。

補題 4. $f \in L^p(X)$, $1 < p \leq \infty$ とすると

$$\|M_1(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

但し, C_p は f によらない。

これは, よく知られた Hardy - Littlewood の maximal theorem である。証明は略す。

定理 1 の証明. 補題 3 より,

$$f^*(x) \leq C M_{p_1}(f^+)(x)$$

よ, て, 補題 4 より,

$$\begin{aligned} \|f^*\|_p &\leq C \|M_{p_1}(f^+)\|_p \leq C \|M_1(f^{+p_1})\|_{p/p_1}^{1/p_1} \\ &\leq C_{p, p_1} \|f^+\|_p \quad (\forall p > p_1) \quad \text{証終} \end{aligned}$$

定理 1 において, $K(r, x, y)$ に関する条件 (4) をゆるめることは可能である。 $K_1(r, x, y)$ は $\mathbb{R}^+ \times X \times X$ 上で定義された非負連続関数で次をみたすとする。

$$(40) \quad K_1(r, x, y) \leq (1 + d(x, y)/r)^{-1-\delta}$$

$$(41) \quad K_1(r, x, x) > A^{-1} > 0$$

$$(42) \quad |K_1(r, x, y) - K_1(r, x, z)| \leq (d(y, z)/r)^{\delta} (1 + d(x, y)/r)^{-1-2\delta}$$

$$(\text{if } d(y, z) < (r + d(x, y))/(4A))$$

このときも (8) は成立することに注意せよ。つまり

$$(43) \quad C_1 K(r, x, y) > 1 \quad (d(x, y) < C_2 r)$$

前と同様に, $f \in L^1(X)$ に対し

$$F_1(r, x, f) = \int_X K_1(r, x, y) f(y) dy(y) / r$$

$$f^{(+)}(x) = \sup_{r>0} |F_1(r, x, f)|$$

と定義する。

定理 1 を拡張して, 次を得る。

定理 1'. X のみできまるある $p_3 < 1$ が存在して次をみたす。
 任意の $f \in L^1(X)$ と任意の $p > p_3$ とに対し,

$$\|f^*\|_{L^p} \leq C_7 \|f^{(+)}\|_{L^p}$$
 が成立する。但し, C_7 は p と X とのみできまる。

定理 1' と C との系として, 次を得る。

系 1'. $p_4 < 1$ が X のみによ, てとることかでき,
 $\forall f \in L^1(X)$ と $1 \geq \forall p > p_4$ とに對し

$$\|f^{(+)}\|_{L^p} \leq C_8 \|f\|_{H^p} \leq C_9 \|f^*\|_{L^p} \leq C_{10} \|f^{(+)}\|_{L^p}$$
 但し, C_8, C_9, C_{10} は p と X のみによる。

定理 1' の証明のためには, 次の補題が必要である。

補題 3'. X のみで定まる $p_3 < 1$ と C'_5 が存在して次を
 みたす。 $\forall f \in L^1(X)$ と

$$\text{supp } \varphi \subset B(x_0, r_0), \quad L(\varphi, \delta) \leq r_0^{-\delta}, \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq 1$$
 をみたす $\forall \varphi, \forall x_0, \forall r_0$ とに對し,

$$|\int f(y) \varphi(y) d\mu(y)| / r_0 \leq C'_5 M_{p_3}(f^{(+)})(x_0)$$

補題 3' の証明は, 補題 3 の証明の精密化による。こゝて
 は省略する。

(40)-(42) の条件をみたす例を 2 つあげる。

例 1. $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x - y|^n$,

$K(r, x, y) = \psi_0((x - y)/r^{1/n})$ とおく。

但し, $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \psi_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$|\psi_0(x) - \psi_0(y)| \leq |x - y|$, $\psi_0(x) \geq 0$, $\psi_0(0) > 0$.

すると, (0) - (7) はみたされる。 $p > n/(n+1)$

のとき, この H^p は, 2.3 ページで定義したものと一致する。

$$K_1(r, x, y) = (1 + |x - y|^2 / r^{2/n})^{-(n+1)/2}$$

は, (40) - (42) をみたす。 $K_1(r, x, y) / r$ は,

Poisson 核である。

$$\text{例 2. } X = \sum_{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : z \cdot \bar{z} = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j = 1\}$$

$d(z, w) = |1 - z \cdot \bar{w}|^n$ とおく。 X は Lebesgue 測度により

homogeneous type の空間になる。 $\varphi_0(t) \in C^\infty(0, \infty)$ は

$$\varphi_0(t) = 1 \quad \text{on } (0, 1/2), \quad \varphi_0(t) = 0 \quad \text{on } (1, \infty)$$

かつ $\varphi_0(t) \geq 0$ とする。すると、

$$K(r, z, w) = \varphi_0(d(z, w)/r)$$

は (0) - (7) をみたす。

$$K_1(r, z, w) = |1 - tz \cdot \bar{w}|^{-2n} (1 - t^2)^n r$$

$$\text{但し, } t = 1 - r^{1/n} \quad (0 < r \leq 1)$$

は (40) - (42) をみたす。 $K_1(r, z, w)/r$ は

Poisson-Szegő 核である。

References.

- [1] A.P. Calderon, An atomic decomposition of distributions in parabolic H^p spaces, *Advances in Math.* 25(1977), 216-225.
- [2] A.P. Calderon and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, *Advances in Math.* 16(1975), 1-64.
- [3] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, *Advances in Math.* 22(1976) 269-275.
- [4] L. Carleson and J. Garnett, Interpolating sequences and separation properties, *J. Analyse Math.* 28(1975), 273-299.
- [5] R. Coifman, A real variable characterization of H^p , *Studia Math.* 51(1974), 269-274.
- [6] R. Coifman and R. Rochberg, Another characterization of BMO, preprint.
- [7] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.* 103(1976), 611-635.
- [8] R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 83(1977), 569-645.
- [9] P. Duren, Extension of a theorem of Carleson, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75(1969), 143-146.
- [10] C. Fefferman, N.M. Riviere and Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces, the real method, *Trans. Amer. Math. Soc.* 191(1974), 75-82.
- [11] C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* 129(1972), 137-193.
- [12] J.B. Garnett and R.H. Latter, The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables, *Duke Math. J.* 45(1978), 815-846.
- [13] P.W. Jones, Constructions with functions of bounded mean oscillation, Ph.D. thesis, University of California, 1978.

- [14] R.H. Latter, A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, *Studia Math.* 62(1977), 92-101.
- [15] R.H. Latter and A. Uchiyama, The atomic decomposition for parabolic H^p spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 253(1979), 391-398.
- [16] R. Macias and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, *Advances in Math.* 33(1979), 271-309.
- [17] _____, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, *Advances in Math.* 33(1979), 257-270.
- [18] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [19] E.M. Stein, *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972.
- [20] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [21] A. Uchiyama, A remark on Carleson's characterization of BMO, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [22] _____, A maximal function characterization of H^p on the space of homogeneous type, preprint.
- [23] _____, The factorization of H^p on the space of homogeneous type, to appear in *Pacific J. Math.*
- [24] N. Th. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$ -equation, *Pacific J. Math.* 71(1977), 221-273.