

弱値増幅法を用いた増幅法の統計的推測の限界

慶應義塾大学 大学院理工学研究科 基礎理工学専攻 田中 咲

Saki Tanaka

School of Fundamental Science and Technology,
Keio University

1 はじめに

本発表は、文献 [1] の概要をまとめたものである。1987 年に提唱された弱測定とその測定結果である弱値は、近年新たな形で最注目を浴びている [2]。Aharonov らは、二状態形式の応用例として von Neuman 相互作用を用いて提案した [3–5]。この測定の最大の特徴は、事後選択にある。事後選択は、間接測定後に行なう操作である。間接測定を行った後に、被測定系に対して別の射影測定を行う。その結果として我々の望む固有状態に対応する結果を得た場合のみに、間接測定の結果読み取る。このような事後選択を行うことで、被測定系は初期状態（事前選択状態 $|i\rangle$ ）に加えて、事後選択後の状態（事後選択状態 $|f\rangle$ ）によって、被測定系の統計は条件付けられる。この事前事後選択状態と事後選択状態の 2 状態でその間に起きる事象を記述することは、2 状態形式とよばれる。このとき、測定装置系の初期波動関数を $\psi(x)$ とし、von Neuman 型のハミルトニアン $g\hat{A} \otimes \hat{p}$ とする。 g が十分弱いという仮定し一次近似を用いると、事後選択後の装置系の状態は

$$\psi(x - g\langle\hat{A}\rangle_w) \quad (1)$$

となる。このとき、弱値は

$$\langle\hat{A}\rangle_w := \frac{\langle f|\hat{A}|i\rangle}{\langle f|i\rangle} \quad (2)$$

と定義される。この値は、事前選択状態 $|i\rangle$ と事後選択状態 $|f\rangle$ を直行にすることで無限に大きな値を取りうる。この点が、一般の測定とは異なる点であり、弱測定の最大である。弱値は複素数であるため、計測が不可能な値である。実験では、弱値の実部は装置系の物理量 x を測定した時に計測できる [6]。一方、弱値の虚部は x の共役物理量 p ($[\hat{x}, \hat{p}] = i$) の期待値変化として得られる。

近年は、この弱測定に関する実験も行われている [7, 8]。とくに、弱測定を精密測定に応用する提案を行っている。弱値が無限に大きい値を取り得る性質を利用し、相互作用の強さ g を検出する。この増幅法は弱値増幅法と呼ばれ、実験的にも理論的にも広く研究がなされている [9–16]。

我々は、本当にこの弱値増幅法が信号を増幅しているのか疑問に感じた。弱値増幅の理論的な背景である弱測定は、測定強度 g が大きな領域では有効でない。一次近似の議論では、弱値増幅法が

機能するか判断するには不十分である。また、弱値増幅においてその増幅率はプローブの位置期待値から導出される。弱値増幅は装置の針を大きく動かすことが知られているが、信号の情報まで増えるかは明らかではない。そこで、我々は被推定パラメータである g の情報がどの程度増加したかを SLD-Fisher 情報量を用いて評価することを考えた。本研究と同様に Fisher 情報量で弱値増幅を評価した研究として文献 [17, 18] が知られている。文献 [17] は古典 Fisher 情報量と弱値の関係について議論あり、文献 [18] は具体的な系にとどめた議論をしている。本稿では、以下の構成で弱値増幅における Fisher 情報量の状態変化を議論する。まず、第 2 節で簡単に弱値増幅についてまとめる。その後、第 3 節で推定論を確認する。第 4 節では本稿の結果について議論する。最後に、第 5 章では第 4 章の結果をまとめる。

2 弱値増幅

Aharanov らの提案した弱測定のプロセスと状態変化をまとめよう。まず、被測定系の事前選択状態を $|i\rangle$ とし、装置系の初期状態を $|\psi\rangle$ とする。このとき、装置系の始状態は Gauss 状態は

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle, \quad \psi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \quad (3)$$

とする。被測定系と装置系の合成系の始状態は

$$|i\rangle \otimes |\psi\rangle$$

となる。この合成系に von Neuman 型の相互作用 $\hat{H} = \hat{A}\hat{p}$ を発生すると、状態は

$$|\Phi_{\text{int}}\rangle := e^{-g\hat{A}\hat{p}}|i\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (4)$$

となる。このとき、間接測定の強さは実数因子 g によって決定される。次に、被測定系に対して事後選択のための測定を行う。すなわち、測定によって事後選択 $|f\rangle$ に対応する結果が得られた場合のみ、装置系の測定結果をよみとり、装置系の測定結果から被測定系の状態を予測する。事後選択後の状態は

$$|f\rangle\langle f|\hat{U}(|i\rangle \otimes |\psi\rangle) = |f\rangle \otimes (\langle f|e^{-ig\hat{A}\hat{p}}|i\rangle|\psi\rangle)$$

となる。この状態は規格化されていないので注意する。事後選択は射影測定演算子 $|f\rangle\langle f|$ を用いて行うため、失敗することもある。事後選択は測定を利用するため、事後選択の前後でデータ数が減る。第 4 節ではデータ数と情報量の変化について詳しく議論する。以降、被測定系の状態は $|f\rangle$ で変化しないため、測定装置の状態

$$|\phi_{\text{PPS}}\rangle := \frac{\langle f|e^{-ig\hat{A}\hat{p}}|i\rangle|\psi\rangle}{|\langle f|e^{-ig\hat{A}\hat{p}}|i\rangle|\psi\rangle|} \quad (5)$$

のみに注目する。

測定の相互作用が十分小さい (g が十分小さい) として Unitary 演算子に対して Taylor 展開を行い $O(g^2)$ を無視すると測定装置の状態は

$$\begin{aligned}\langle f|e^{-ig\hat{A}\hat{p}}|i\rangle|\psi\rangle &\simeq \langle f|i\rangle(1 - ig\langle A\rangle_w\hat{p})\otimes|\psi\rangle \\ &\simeq \langle f|i\rangle e^{-ig\langle A\rangle_w\hat{p}}|\psi\rangle = \langle f|i\rangle \int dx \psi(x - g\langle A\rangle_w)|x\rangle\end{aligned}$$

を得る。よって、波動関数が $g\langle A\rangle_w$ だけ並進している。このとき

$$\langle A\rangle_w := \frac{\langle f|\hat{A}|i\rangle}{\langle f|i\rangle} \quad (6)$$

とした。この値が**弱値 (Weak Value)**と呼ばれる。本稿では、弱極限以外の場合も考えたい。そこで、Taylor 展開をしていない状態 (5) について議論する。

3 推定論のまとめ

弱値増幅のように、状態の関数型や時間変化は予測でき、あるパラメータを推測する問題は他にも多々ある。このようなモデルはパラメトリックモデルと呼ばれている。パラメトリックモデルに関する統計的推測方法として推定論と検定論が一般によく知られている [19]。本節では推定論について簡単にまとめる。

状態の未知パラメータを θ とし、 n 個の測定結果の集合を $\mathbf{X} := \{X_i\}_{i=1}^n$ とする。この時、割られがパラメータ θ に予想した値を推定値 $\theta_{\text{est}}(\mathbf{X})$ とよぶ。推定値 θ_{est} と真値 θ は必ずしも一致しない。そこで、平均 2 誤差 $\langle(\theta - \theta_{\text{est}})^2\rangle$ を考える。この平均 2 誤差が小さくなるように θ_{est} を設計するのが一般的な戦略である。特に、 $\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \text{argmax}_{\theta} \sum_i \ln f(X_i|\theta)$ で与えられる最尤推定量は良い推定量として広く用いられている。この推定量はデータ数 n が無限に大きくなるとき、真値に漸近することが知られている [19–24]

古典推定では測定する物理量が決まっているので、推定量は単純に測定結果 $\mathbf{X}$ から構成すればよかった。だが、データを取る過程である測定を我々は調整することができる。すなわち、量子状態 $\hat{S}_\theta$ を構成するパラメータ θ を推定するときは、測定の最適化を考慮する必要がある。そのため、推定量は拡張される。推定量は、

$$(\text{量子推定量}) = \sum (\text{推定値}) \cdot (\text{測定の確率測度})$$

と拡張するのが自然な方法である。このとき、量子推定量は自己共役な演算子となる [21]。量子推定量は推定量に測定測度を合わせたものである。ここで、平均 2 乗誤差は $\text{Tr}[\hat{S}_\theta(\theta\hat{I} - \hat{T})^2]$ として与えられる。この平均 2 乗誤差の下限は、量子 Cramér-Rao 不等式

$$\text{Tr}[\hat{S}_\theta(\theta\hat{I} - \hat{T})^2] \geq 1/\text{Tr}[\hat{S}_\theta\hat{L}_\theta^2] \quad (7)$$

与えられる。ただし $\hat{L}_\theta$ は $\partial_\theta\hat{S}_\theta = (\hat{S}_\theta\hat{L}_\theta + \hat{L}_\theta\hat{S}_\theta)/2$ を満たす自己共役な演算子とする。この不等式の等号を達成するような $\hat{T}$ が最適な量子推定量である。適応測定を無限に繰り返すことでこの下限が達成されることが知られている。

よって、推定の精度はデータ数が多いほど良くなる。第2節で、述べた通り事後選択はデータ数を減らす。そのため、弱値増幅法と推定の相性は良くない。弱値増幅法と推定については次の第4章で詳しく議論する。なお、補足であるが検定論はデータ数が少ない場合であっても機能する議論となっているため弱値増幅との相性が良いことが知られている [25].

4 事後選択による情報量の減少

第1でも言及したとおり、一般に弱値増幅の性能は位置期待値だけで測られることが多い。さらに、弱測定では、相互作用が弱く波動関数の広がり大きい。弱値増幅法では、信号と共にノイズが大きくなっている可能性がある。この信号とノイズのトレードオフを考えるために、推定理論を用いて評価することを考えよう。すなわち、弱値増幅における SLD-Fisher 情報量を評価する。弱値増幅の最も大きな特徴は事後選択であった。そこで、事後選択の前後の状態の Fisher 情報量の比較を行う。

また、本節では事後選択によるデータのロスも議論しよう。事後選択は測定によって行われるためその成功は運任せである。そもそも、相互作用が起こることが少ない状況であれば、事後選択による影響も少ない。Fisher 情報量に事後選択の成功確率を掛けることで統計量の漸近的なスピードまで考慮した Fisher 情報量が作れ、事後選択によるデータ損失の影響を見ることができる。

状態 $|\Phi_{\text{int}}\rangle$ が n 個与えられている場合に、事後選択することによって $n \cdot \Pr(f)$ 個の状態 $|\phi_{\text{PPS}}\rangle$ が得られる。そこで、事後選択による損失を考慮した情報量 $I(\Phi_{\text{int}})$ と $\Pr(f) \cdot I(\phi_{\text{PPS}})$ を比較する。ここで $\langle \hat{H} \rangle = \langle \Phi_{\text{int}} | \hat{H} | \Phi_{\text{int}} \rangle$ とし、 $\tilde{B} := \langle f | e^{-ig(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)} | i \rangle$ とする。状態 $|\Phi_{\text{int}}\rangle$ の SLD-Fisher 情報量は

$$4\langle \Phi_{\text{int}} | (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)^2 | \Phi_{\text{int}} \rangle \quad (8)$$

が得られる。一方、状態 $|\phi_{\text{PPS}}\rangle$ については

$$\Pr(f) \cdot I(\rho_{\text{PPS}}^{\mathcal{K}}) = 4 \left(\langle \psi | \partial_g \tilde{B}^\dagger \partial_g \tilde{B} | \psi \rangle - \frac{|\langle \psi | \partial_g \tilde{B}^\dagger \tilde{B} | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \tilde{B}^\dagger \tilde{B} | \psi \rangle} \right) \quad (9)$$

が成り立つ。 $|f\rangle\langle f| \leq \hat{I}^{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}$ より

$$\begin{aligned} \Pr(f) \cdot I(\phi_{\text{PPS}})/4 &= \langle \psi | \langle i | (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle) e^{-ig(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)} | f \rangle \langle f | (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle) e^{ig(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)} | i \rangle | \psi \rangle \\ &\leq \langle \Phi_{\text{int}} | (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)^2 | \Phi_{\text{int}} \rangle = I(\Phi_{\text{int}})/4 \end{aligned} \quad (10)$$

が成りたち、

$$\Pr(f) \cdot I(\phi_{\text{PPS}}) \leq I(\Phi_{\text{int}}) \quad (11)$$

を得る。いま g に依存しない関数 $F(x)$ を用いれば、

$$\hat{H} \rightarrow F(\hat{H})$$

と置き換えても,

$$(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle) e^{-ig(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)} |f\rangle \langle f| e^{ig(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)} (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle) \leq (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)^2 \quad (12)$$

が成り立つため, 不等式 (11) は保たれる. すなわち任意の Hamiltonian で不等式 (11) 成り立つことが示される.

5 まとめ

我々は事後選択によって測定装置系の状態がどのように変化するか見てきた. 成功確率が低い事後選択を行い, 事後選択によって条件づけを行うことで測定相互作用の強さ θ に関する SLD-Fisher 情報は増えることが分かった. 事後選択が失敗による損失を加味し, 推定精度の漸近的傾向を考察すると, 事後選択によって推定精度は向上しないことが分かった. 事後選択を用いて信号増幅をする AAV 弱測定増幅法は, 被測定系と測定装置系の相互作用操作が繰り返し行える状況であれば意義があるものかもしれない. しかし, 事前・事後の 2 状態に挟まれた測定そのものが困難な場合に有効な手段とは考えられない.

参考文献

- [1] S. Tanaka and N. Yamamoto, Phys.Rev. A, **88**, 042116 (2013)
- [2] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. **60**, 1107 (1987)
- [3] Y. Aharonov and L. Vaidman, arXiv: 0105101v2
- [4] Y. Aharonov and A. Botero, Phys. Rev. A. **72**, 052111 (2005).
- [5] Y. Aharonov and D. Rohrlich, *Quantum Paradoxes* (Wiley-VCH, Weinheim, 2005).
- [6] R. Jozsa, Phys. Rev. A **76**, 044103 (2007).
- [7] O. Hosten and P. Kwiat, Science **319**, 787 (2008).
- [8] P. B. Dixsn, D. J. Starling, A. N. Jordan, and J. C. Howell, Phys. Rev. Lett. **102**, 173601 (2009).
- [9] S. Wu and Y. Li, Phys. Rev. A **83**, 052106 (2011).
- [10] T. Koike and S. Tanaka, Phys. Rev. A **84**, 062106 (2012).
- [11] K. Nakamura, A. Nishizawa, and M. Fujimoto, Phys. Rev. A **85**, 012113 (2012).
- [12] A. Nishizawa, K. Nakamura, and M. Fujimoto, Phys. Rev. A **85**, 062108 (2012).
- [13] Y. Susa, Y. Shikano, and A. Hosoya, Phys. Rev. A **85**, 052110 (2012).
- [14] J. Lee and I. Tsutsui, Quantum Studies: Mathematics and Foundations, 2196-5609, (2014).
- [15] A. N. Jordan, J. M. Rincon, and J. C. Howell, Phys. Rev. X **4**, 011031 (2014).
- [16] X. Zhu, Y. Zhang, S. Pang, C. Qiao, Q. Liu, and S. Wu, Phys. Rev. A **84**, 052111 (2011)

- [17] H. F. Hofmann, AIP Conf. Proc. **1363**, 125 (2011),
H. F. Hofmann, Phys. Rev. A **83**, 022106 (2011).
- [18] G. C. Knee, G. A. D. Briggs, S. C. Benjamin, and E. M. Gauger, Phys. Rev. A **87**, 012115 (2013).
- [19] 竹内彰通, 現代数理統計学, 創文社現代経済学選書 8, (創文社, 東京, 1991).
- [20] R. Fisher, *Theory of statistical estimation*, Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society, **22**, 700 (1982).
- [21] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam, New York, North-Holland Pub., 1982).
- [22] H. Nagaoka, Proc. Int. Symp. on Inform. Theory p 198 (1988);
H. Nagaoka, Proc. 12th Symp. on Inform. Theory and its Appl. pp 577-582 (1989);
H. Nagaoka, *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference* ed M Hayashi (Singapore: World Scientific) pp 125-32 (2005).
- [23] A. Fujiwara and H. Nagaoka, Phys. Rev. A. **201**, 119 (1995)
- [24] A. Fujiwara, J. Phys. A: Math. Gen, **39**, 12489 (2002).
- [25] Y. Susa and S. Tanaka, arXiv:1502.06334 (2015).