

電気回路網のエネルギー、パワーそして 混合ポテンシャルについて

早大 理工 電気工学科
松本 隆

§1 はじめに

本文の目的は次の事実を示す事、及び関連するいくつかの
問題を検討する事である。

" 実質狭義受動な電気回路網は compact attractor をも
つ "

これは、工学的考察：" 抵抗のパワーが遠くで正になる様な
電気回路網の電圧及び電流はある有界領域に入って来るであ
ろう " の形式化である。もちろん、上の事実は無条件には成
立しない。この問題と関連する Smale の予想 [1] は正しく
ない事も示す。上の事実はそれ自身面白いと思うし、力学系
の分野で得られた多くの結果が適用可能になり得る事が大切
だと思う。

定式化は [1] - [4] に従う。電気回路網の state space
 Σ は抵抗素子特性 $\mathcal{N}$ (closed submanifold) の Kirchhoff

space K (linear subspace) に対する切り口 $\Sigma = L \cap K$ にならなくて、ダイナミクスは

$$\pi^*G(X, \cdot) = \omega(\cdot)$$

で記述される。 π^*G, ω は回路が与えられれば決定される。

[2] の仮定 (A) は standing assumption とする。

§2 エネルギー、パワー として実質狭義受動性

簡単な例から話を始めたい。図1(a)の回路を考える。 R_2 以外は全て線形非結合とする。 R_2 はエサキダイオードで図1(b)の様な特性をもっている。 R_1 と E をまとめて R_1 とし、図1(c)の様な特性をもつものとする。

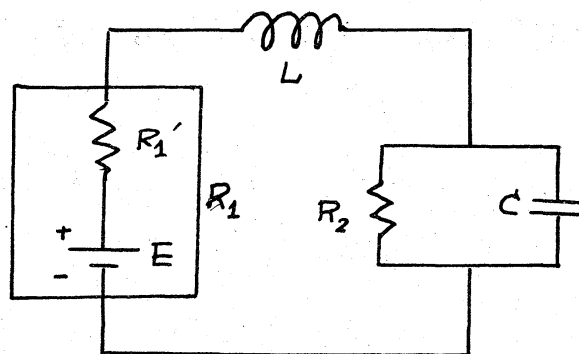


図1(a)

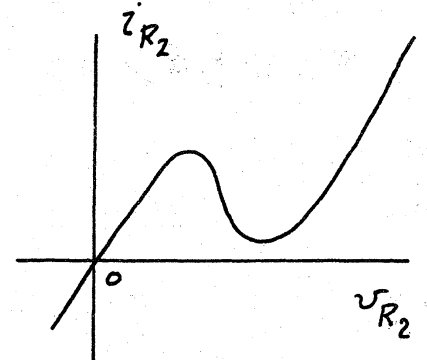


図1(b)

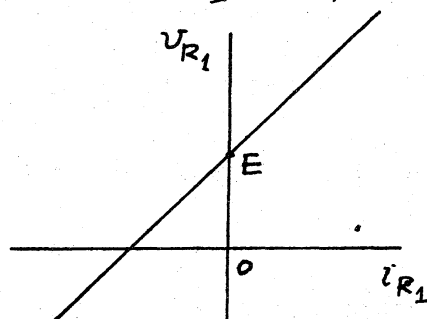


図1(c)

この回路は complete (π が大域的 diffeo.) である。 π^{-1}, ω, G は各々次の様になる。

$$\begin{aligned}\pi^1(v_C, i_L) &= (v_{R1}, v_{R2}, v_C, v_L, i_{R1}, i_{R2}, i_C, i_L) \\ &= (R_1' i_L + E, v_C, v_C, -v_C - R_1' i_L - E, i_L, \\ &\quad i_L - f(v_C), i_L).\end{aligned}$$

$$\omega = (i_L - f(v_C)) dv_C + (v_C + R_1' i_L + E) di_L$$

$$G = C dv_C \otimes dv_C - L di_L \otimes di_L.$$

従、2 ダイナミクスは次式となる。

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L - f(v_C), \quad L \frac{di_L}{dt} = -v_C - R_1' i_L - E.$$

次にキャパシタとインダクタにたくわえられるエネルギーは

$$E(v_C, i_L) = \frac{1}{2} C v_C^2 + \frac{1}{2} L i_L^2$$

抵抗のパワーは

$$W(v_C, i_L) = v_C f(v_C) + R_1' i_L^2 + E i_L$$

である。この時次式が成立する [1], [3] :

$$\frac{dE(v_C(t), i_L(t))}{dt} = -W(v_C(t), i_L(t)).$$

今、特別な場合として $C = 1$ (Farad), $L = 1$ (Henry),

$$R_1' = 0.25 \text{ (Ohm)}, \quad E = 2.0 \text{ (Volt)}, \quad i_{R2} = f(v_{R2}) =$$

$$(v_{R2} - 1.7)^3 - 2(v_{R2} - 1.7) + 1.513 \text{ (Volt)} \text{ とする。}$$

図2 に等エネルギー曲線, パワー, 周期解及び平衡点を示してある。

$$W > 0 \quad \text{on} \quad IR^2 - \Omega$$

$$W = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

$$W < 0 \quad \text{on} \quad \text{Int } \Omega$$

である。まず、平衡点は Ω に含まれる。 Ω 以外ではエネルギーが減少、あるいは増加しているからである。又、周期解上ではエネルギーが増えた分だけ減らなければならぬので Ω への出入をくり返す。ところで Ω を含む最小の等エネルギー曲線 $E = 32$ の外側からのトラジェクトリーは必ず

$$E = \{ (v_L, i_L) \mid E(v_L, i_L) \leq 32 \}$$

にすい込まれる。又、 E が不変集合である事も明らかである。以上の事から抵抗のパワーの性質が compact attractor の存在と密接に関連している事がわかる。抵抗のパワーが常に非負である回路を受動回路と呼んでいるから、上の様な性質をもった回路を“実質受動”回路と呼ぶ事は自然な印象を受ける。尚、上の Ω は連結であるとは限らない。図3にその様な場合を示す。但し、 $R_1 = 1.6 (\text{Ohm})$, $E = 4.0 (\text{Volt})$ である。

である。

以上の事をふまえて形式化を行なう。 P 個の抵抗, r 個のキャパシタ, λ 個のインダクタを含む回路網を考える。 R, C, L は各々, 抵抗, キャパシタ, インダクタに関する変数である事を示す。 $b = p + r + \lambda$ とする。 また $\pi_R' : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ を射影

$$\pi_R'(\nu, i) = (\nu_R, i_R) \quad (2.1)$$

で定義し

$$\Lambda_R = \pi_R'(\Lambda) \quad (2.2)$$

とおく。 $W_R' : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$W_R'(\nu_R, i_R) = \sum_{n=1}^p \nu_{Rn} i_{Rn} \quad (2.3)$$

で定義し。 $W_R : \Lambda_R \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Lambda_R \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{W_R} \mathbb{R} \quad (2.4)$$

で定義する。工学的考察により, W_R は抵抗のパワーである。

・ W_R を Σ へ引き戻したものの:

$$W = W_R \circ \pi_R' \circ \mathcal{I} \quad (2.5)$$

が重要な役割を演じる。 $\mathcal{I} = \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ は inclusion

である。 $E_{C,L} : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} E_{C,L}(\nu_C, i_L) = & \int_{I_C}^{\nu_C} \sum_{m=1}^r C_{mn}(\nu_C') \nu_{Cm}' d\nu_{Cn}' \\ & + \int_{I_L}^{i_L} \sum_{m=1}^\lambda L_{mn}(i_L') i_{Lm}' di_{Ln}' \end{aligned} \quad (2.6)$$

が定義する。 $\Gamma_C(\Gamma_L)$ は $\mathbb{R}^d(\mathbb{R}^n)$ の実 $V_C(\psi_L)$ と原点とを結ぶ滑らかな曲線である。 $C_{mn}(V_C), (L_{mn}(\psi_L))$ は増分キャパシタンス行列(増分インダクタンス行列)であって対称正值である。もちろん(2.6)は Γ_C, Γ_L のとり方によらない。工学的考察から、(2.6)はキャパシタとインダクタにたくわえられるエネルギーである。

$$E = E_{C,L} \circ \pi \quad (2.7)$$

と置く。今、 $\alpha(t)$ を回路網が生成する Σ 上の flow とすると

$$\frac{dE(\alpha(t))}{dt} = -W(\alpha(t)) \quad (2.8)$$

が成立する。[1], [3].

[定義] コンパクト集合 $\Omega \subset \Sigma$ があって

$$W > 0 \quad \text{on} \quad \Sigma - \Omega \quad (2.9)$$

が成立する時、この回路網を Ω に関して実質狭義受動という。

[結果1] 次の仮定をやる。

(1) E は proper

(2) 回路網は、ある Ω に関して実質狭義受動。

この時

$$\alpha = \max_{\alpha \in \Omega} E(\alpha) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{E} = \{\alpha \in \Sigma \mid E(\alpha) \leq \alpha\} \quad (2.11)$$

が定義される $\mathcal{E}(\text{compact})$ は次の意味で attractor である:

$\alpha(0) \in \Sigma - E$ に対し

(i) $t_1 > 0$ があつて $\alpha(t) \in E$, $t \geq t_1$,

あるいは

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \in E$.

(注) $C_{mn}(V_C)$, $L_{mn}(L_C)$ は 対称正値なので $E \geq 0$ である。上の条件 (1) は工学的には極めて自然な条件である。それは、エネルギーが有限であれば回路網内の変数も有限であることを示しているからである。

[定義] コンパクト集合 $\Omega \subset \Sigma$ があつて

$$\inf_{\alpha \in \Sigma - \Omega} W(\alpha) > 0 \quad (2.12)$$

が成立する回路網を Ω に関して実質強受動という。

[結果 2] 次の仮定を置く。

(1) E は proper.

(2) 回路網は Ω に関して実質強受動。

この時、結果 1 の (i) のみが起こる。

(注) 平衡集 $C \subset \{\alpha \in \Sigma \mid W(\alpha) = 0\}$

さて実質狭義受動性や実質強受動性は抵抗のパワーに関する性質を Σ 上に引き戻して考えたものである。そこで自然に起る疑問は“抵抗素子特性のみを調べる事によって上の性質

を保証する事は可能か?"である。これと関連して Smale
[1] は次の問題を提起している:

[問題] π は global diffeo. とする。もしある $k > 0$ に対し $\|(\dot{v}_R, \dot{i}_R)\|$ が十分大なるとき

$$W_R \geq k \sum_{n=1}^p (\dot{v}_{R_n}^2 + \dot{i}_{R_n}^2) \quad (2.13)$$

が成立すれば compact attractor は存在するか?

条件 (2.13) の工学的意味は明らかではないが、要するに (2.13) から (2.12) が出るかということであろう。しかし、次の例が示す様に、これは正しくない。

[例1] 図4の回路を考える。素子は全て線形非結合で、値は全て1とする。 L_R は1次元線形部分空間であって、原

点以外の任意の点で

$$\begin{aligned} W_R &= \dot{v}_R \dot{i}_R = \dot{v}_R^2 = \dot{i}_R^2 \\ &\geq k (\dot{i}_R^2 + \dot{v}_R^2) \\ 0 &< k < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成立する。この例では π が global diffeo. となり、ダイナミクスは次式で与えられる:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{d\dot{v}_{C_1}}{dt} &= \dot{i}_{L_1}, & C_2 \frac{d\dot{v}_{C_2}}{dt} &= \dot{i}_{L_2} \\ L_1 \frac{d\dot{i}_{L_1}}{dt} &= -\dot{v}_{C_1} - R(-\dot{i}_{L_1} + \dot{i}_{L_2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

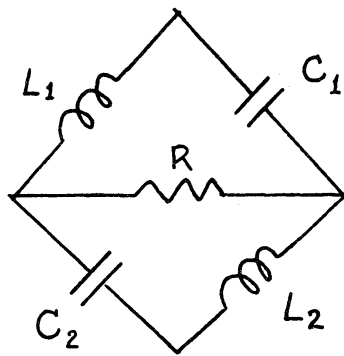


図 4

$$L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = -v_{C_1} + R(-i_{L_1} + i_{L_2}) \quad \int$$

ところで任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$v_{C_1}(t) = a \sin t, \quad v_{C_2}(t) = a \sin t \quad (2.15)$$

$$i_{L_1}(t) = a \cos t, \quad i_{L_2}(t) = a \cos t$$

は (2.14) の解である。これは周期解であり、compact attractor は存在しない。実際、

$$W = R(i_{L_2} - i_{L_1})^2$$

であり、実質狭義受動性を満足するコンパクトな Ω は存在しない。図5に様子を示してある。

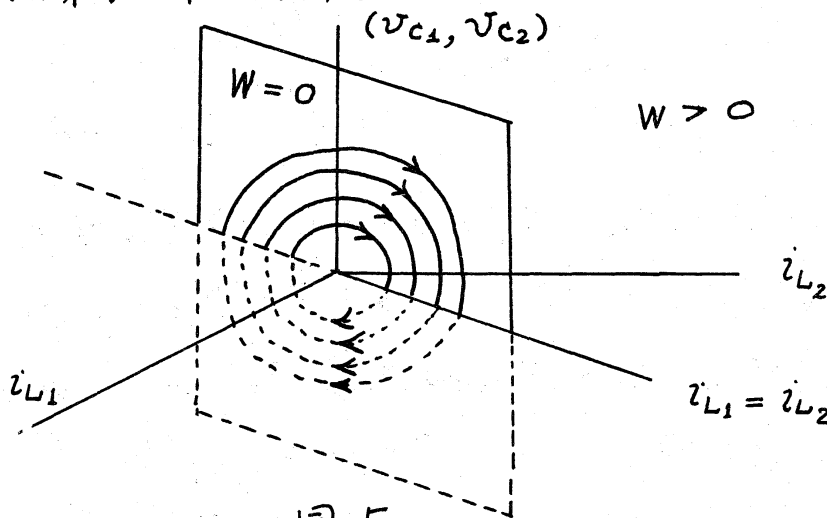


図 5

以下、 W_R の性質が W によって保たれる条件について考える。

[定義] コンパクト集合 $\Omega_R \subset \Lambda_R$ があり、

$$W > 0 \quad \text{on} \quad \Lambda_R - \Omega_R$$

が成立する抵抗回路を Ω_R に関して実質狭義受動という。又

$$\inf_{(V_R, I_R) \in \mathcal{L}_R - \Omega_R} W_R(V_R, I_R) > 0$$

が成立する時, Ω_R に関して実質強受動という。

さて, (2.1) で定義した π_R' を用いて

$$\chi = \pi_R' \circ \tau \quad (2.16)$$

を定義する。求める条件は $\chi^{-1}(\Omega_R)$ がコンパクトになる為の条件である。Kirchhoff space K に対して χ_K 及び inclusion τ_K を図6の様に定義する。 χ_K は proper

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tau_K} & K \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \\ & & \searrow \chi_K \quad \downarrow \pi_R' \\ & & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \supset \mathcal{L}_R \end{array}$$

図 6

であれば $\chi = \chi_K \circ \tau_K$ であるから, χ も proper となり, $\chi^{-1}(\Omega_R)$ がコンパクトになる。次に χ_K が proper になる為の十分条件を与える。回路の定義する linear graph が全ての mode を含み, loop を含まない subgraph を tree と呼ぶ。
[結果3] 抵抗回路は Ω_R に関して実質狭義(強)受動であるとする。もし, 次の条件:

- (条件B) (i) 抵抗のみからなる tree T_R^* が存在する。
(ii) キャパシタ及びインダクタを全て含む tree $T_{C,L}$ が存在する。

が満たされていると、回路網は実質狭義(強)受動である。

(証明) $K = \ker B \times \ker Q$ である[2],[3], 但し B 及び Q は基本ループ行列及び基本カットセット行列である。

treeの電圧は $\ker B$ の (global) coordinate になる。条件(B)

(i)より, 回路網内の全ての電圧 $v \in \ker B$ は v_R の1次結合となる:

$$v = A_R v_R \quad (2.17)$$

又, cotree (tree の補集合) の電流は $\ker Q$ の coordinate となる。条件(B)(ii)より, $T_{C,L}$ の cotree には抵抗しか含まれない。従って $i \in \ker Q$ は i_R の1次結合で表現される:

$$i = A_i i_R. \quad (2.18)$$

さて X_K が proper である事を言うには

$$\|(v, i)\| \rightarrow \infty, (v, i) \in K \Rightarrow \|(v_R, i_R)\| \rightarrow \infty$$

を示せばよい。しかしこれは(2.17), (2.18)より明らかである。最後に K は tree の選び方によらないの結果が従う。

(証明終)

上の条件(B)は次のChua-Green [5]の条件と等価である。

"キャパシタ及びインダクタのみからなるカットセット及びループが存在しない"

実際に条件を調べる時は上の(B)の方が容易である事が多

い。結果 3 は要するに抵抗の数が沢山ある回路網では実質狭義(強)受動性が保たれる事を述べている。例えば図 1 (a) の回路では (B) が満足され、図 4 の回路では (B)(i), (ii) 共に満足されない。一方抵抗の全くない回路は Hamiltonian system になる。次に具体的にどのような回路網が compact attractor をもつか検討する。

[結果 4] キャパシタ, インダクタ, Ebers-Moll モデル [6] によるトランジスタ, エサキダイオード, 接合ダイオード, ツェナダイオード, 線形非結合抵抗及び独立電圧源を含む回路網を考える。適当な電源変換により, 独立電圧源は他の抵抗の中に含まれているものとある。次の条件を仮定する。

(1) E は proper

(2) 条件 (B)

この時回路網は実質強受動である。従って compact attractor をもつ。

この結果は比較的使い易い。例えば次の図の回路が compact attractor をもつ事は殆んど自明である。但しトランジスタ以外は全て線形非結合とある。証明には [7, 8] の結果を用いる。

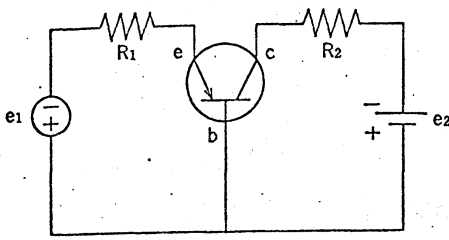


図 7(a)

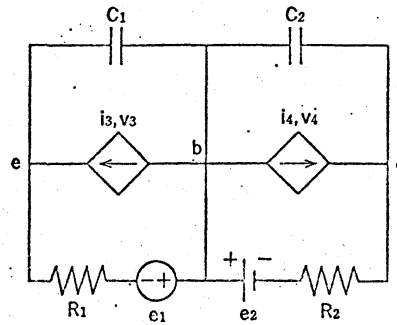


図 7(b)

次に S_{male} の予想が成立する為の十分条件を与える。

[結果 5] 抵抗のパワーは (2.13) を満足しているとし, π は *global diffeo.* とする。次の条件を仮定する。

(1) キャパシタ及びインダクタは一様正值:

$$\langle v_C, (C_{mn}(v_C)) v_C \rangle \geq \xi \|v_C\|^2,$$

$$\langle i_L, (L_{mn}(i_L)) i_L \rangle \geq \xi \|i_L\|^2, \quad \xi > 0.$$

(2) 条件 (B)

この時回路網は実質強受動, 従って *compact attractor* が存在する。

[問題] *complete* な回路を考える。線形抵抗をいくつか加える事により, 条件 (B) が満足され, かつ *complete* になる様にできるか?

[問題] ダイナミクスが $dx/dt = f(x)$ と書けるとする。回路が実質狭義受動であれば $\deg(f) = 1$? 従ってもし平衡点全て非退化であれば平衡点の個数は奇数個。(これは我々の経験と良く一致する。

§3 混合ポテンシャル

回路網が相反であると、 Σ 上の関数 P があってダイナミクスは P の π^*G に関する gradient 系となる:

$$\pi^*G(X, \cdot) = dP(\cdot)$$

P は電気回路の混合ポテンシャルと呼ばれている:

$$P = \int \sum_{n=1}^p v_{R_n} di_{R_n} + \sum_{n=1}^r v_{C_n} i_{C_n}$$

第1項は物理学に現われない量ではない[9]が、明確な特徴付けは行われていない。第2項はキャパシタのパワーである。従って P は妙な量になっている。逆に言えば、 P は今迄の物理量では解釈できない新しい量であるといえる。一般に π^*G は positive definite ではないので、gradient 系であってもトラジェクトリーは複雑な様相を示す。図1の回路は相反であって P が存在する。図8に P の等高線と関連する諸量を示す。

残念ながら紙数がつぎにのこ他の事柄については別の機会にゆめりたい。御討議いただいた平野哲、沢田賢、の両氏に感謝する。

References

- [1] S. Smale, On the mathematical foundations of electrical circuit theory, *J. Differential Geometry*, 7, 193-210, (1972)
- [2] T. Matsumoto, On the dynamics of electrical networks, *J. Differential Equations*, May (1976)
- [3] 松本, 電気回路網のダイナミクスについて, 数理研講義録 254, (1975)
- [4] 同上, 非線形相反回路網のスカラー値関数について. 電子通信学会技術研究報告, CST 75-94 (1976)
- [5] L. Chua and D. Green, Graph theoretical properties of nonlinear networks, Preprint
- [6] J. Ebers. and J. Moll, Large signal behavior of junction transistors, *Proc. IRE*,
- [7] 松本, 佐藤, 非線形回路網における実質受動性について, 電子通信学会論文誌, to appear
- [8] 松本, 佐藤, 非線形抵抗回路網の実質受動性と動作点の存在について, 同上, to appear
- [9] K. Takeyama and K. Kitahara, A theory of domain- and filament-formation due to carrier-

density fluctuations in conductors with
negative differential resistance, J. Phys. Soc.
Japan, 39, 125-131 (1975)

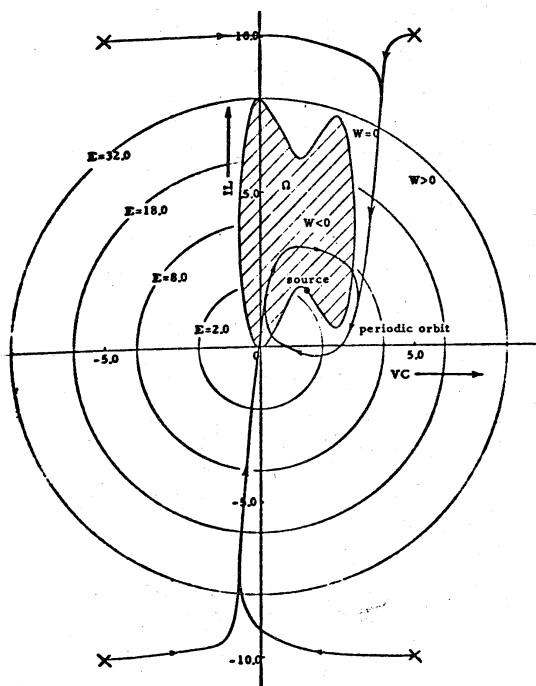


图 2

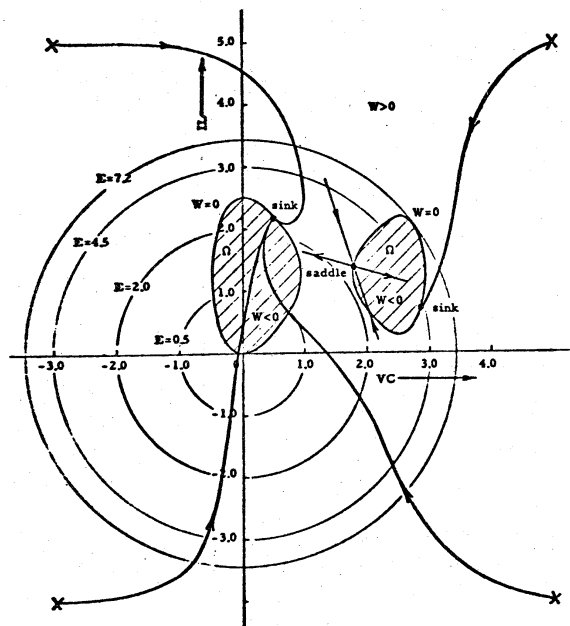


图 3

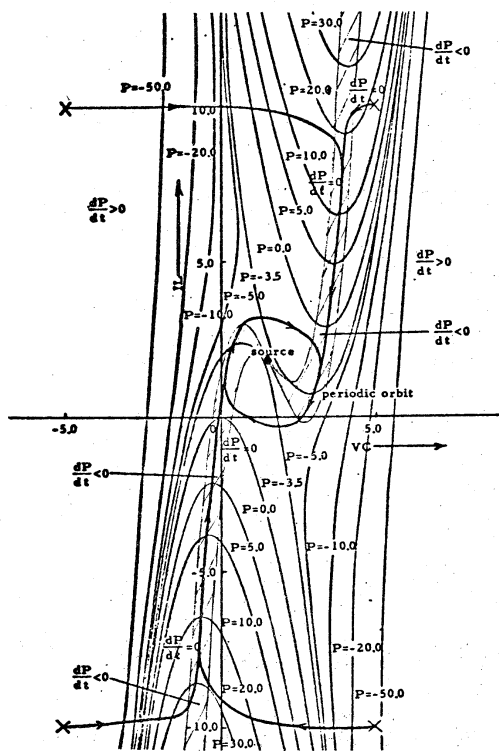


图 8 (a)

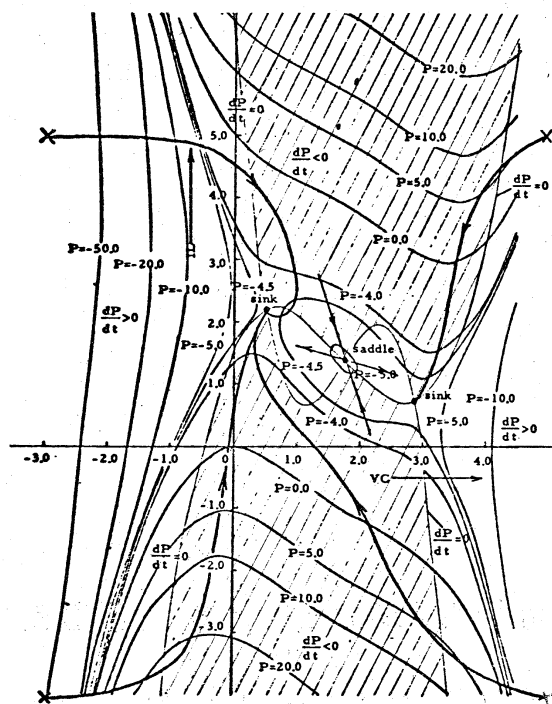


图 8 (b)