

代数方程式を解く同時反復解法による近似解の クラスター分析

都田 艶子 (Tsuyako Miyakoda)

大阪大学 工学部

1 はじめに

n 次代数方程式

$$P(z) = \prod_{i=1}^{\nu} (z - \alpha_i)^{m_i} = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n,$$

を数値的にとく場合、重度の高い根は精度よくもとまらないこと、収束の速度も遅いことがよく知られる。我々は同時反復法の中の *Aberth* 法により

$$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\alpha_{\nu}, \dots, \alpha_{\nu}}_{m_{\nu}}$$

を改めて

$$\zeta_1, \dots, \zeta_n$$

としたとき 各 ζ_i に収束する n 個の近似根 z_i と、それが属するグループの指標 m_i を求めることを目的とする。 p 次反復の n 個の近似値

$$\mathbf{z}^{(p)} = (z_1^{(p)}, z_2^{(p)}, \dots, z_n^{(p)}) \quad (2)$$

から、 $p+1$ 次反復の近似値は次のようにして求める。

$$\mathbf{z}^{(p+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(p)}), \quad \mathbf{z}^{(p+1)} = (z_1^{(p+1)}, z_2^{(p+1)}, \dots, z_n^{(p+1)}) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{f}$ は反復法を *Aberth* 法とすると

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z})) \quad (4)$$

$$f_i(\mathbf{z}) = z_i - \frac{P(z_i)}{P'(z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(z_i - z_j)}} \quad (5)$$

である。

多重根のまわりでの近似根の収束状況を考えるために、 n 個の近似根 $z_1, \dots, z_n$ にたいして α_l に収束する近似根を $z_j^{(l)}, j = 1, \dots, m_l$ と書くことにする。ある近似根 z_k が α_l に収束するとしてその update を考えるとき

$$\left| \frac{z_j^{(i)} - \alpha_i}{(z_k - \alpha_i)(z_k - z_j^{(i)})} \right| \ll \varepsilon, \quad \text{for } i \neq l \quad (6)$$

が成り立っていると仮定する。このとき m 重根の近傍では、その近似値は $z^m = 0$ に対する Aberth 反復となることがわかる。実際、簡単のために今 α_1 に収束する近似根のうちの 1 つに対して (今 $z_1^{(1)}$ とする)、近似値の更新の式を考える。更新した値 $z_1^{(1)*}$ とすると、

$$\begin{aligned} z_1^{(1)*} &= z_1^{(1)} - \frac{P(z_1^{(1)})}{P'(z_1^{(1)}) - P(z_1^{(1)}) \left(\sum_{j=2}^{m_1} \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(1)}} + \sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(l)}} \right)} \\ &= z_1^{(1)} - \frac{1}{\frac{m_1}{z_1^{(1)} - \alpha_1} - \sum_{j=2}^{m_1} \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(1)}} + \sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_l} \left(\frac{1}{z_1^{(1)} - \alpha_l} - \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(l)}} \right)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_l} \left(\frac{1}{z_1^{(1)} - \alpha_l} - \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(l)}} \right) = \sum_{l=2}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{\alpha_l - z_j^{(l)}}{(z_1^{(1)} - \alpha_l)(z_1^{(1)} - z_j^{(l)})}$$

これが、仮定より、無視できるほどに小さいとすると

$$z_1^{(1)*} \approx z_1^{(1)} - \frac{1}{\frac{m_1}{z_1^{(1)} - \alpha_1} - \sum_{j=2}^{m_1} \frac{1}{z_1^{(1)} - z_j^{(1)}}}.$$

そして、さらに $u_1^* = z_1^{(1)*} - \alpha_1$, $u_j = z_j^{(1)} - \alpha_1$ とおくと、上の式は次のようになる。

$$u_1^* = u_1 - \frac{1}{\frac{m_1}{u_1} + \sum_{j=2}^{m_1} \frac{1}{u_1 - u_j}}.$$

これは $\tilde{P}(u) = u^{m_1} = 0$ に対する Aberth 法の式である。ここで次のような新しい変数、写像を導入する。

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_k = \frac{z_k}{z_1}, \quad \gamma \in \mathbb{C}^n \quad (7)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{y}), \dots, F_n(\mathbf{y})) \quad (8)$$

$$F_k(\mathbf{y}) = \frac{f_k(\mathbf{y})}{f_1(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \quad (9)$$

そして、 $E = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j, i \neq j\}$ としたとき、近似根が収束するまでは、必ず $f(z) \in \mathbb{C}^n \setminus E$ が成り立つような出発値から反復は開始するものとする。このとき次のことがいえる。

Theorem 1 $p(z) = z^m = 0$ に対して、Aberth 法により近似根の列 $\{z^{(p)}\}$ を生成するとき、写像 F の不動点は $\gamma = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}), \omega = \exp(\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1})$ である

Theorem 2 Th.1 と同様にして近似列 $\{z^{(p)}\}$ を生成するとき、真の解に十分に近い近傍から反復を始めれば、写像 F は縮小写像である

2 多重度の評価

Th.1 と Th.2 により、我々は、もとの f の写像のほうで考えた時、近似根の収束先が明確になってきた段階では、重根に対する近似根は重根を中心とした円の上で、互いに等間隔の位置を保ちながら収束していくことが分かる。この性質を利用して我々は、各近似根がもつ多重度を評価することにする。ある段階の近似根からの update を $z_k^* = z_k + \Psi_k$ と書くことにすると、評価に利用する情報としては $z_k, \Psi_k, |\Psi_k|$ そして次の結果を用いる。

Lemma 1 重根を中心とする円の周上等間隔に位置する近似根は、円の中心に向かって次の縮尺をもって進む

$$|\zeta_k - z_k^{(p+1)}| \approx (1 - \frac{2}{m+1}) |\zeta_k - z_k^{(p)}|$$

近似根 z_l と z_k が同じ多重度 m を持つ近似根であることを判定するのには、最初すべての近似根を残差の大きい順に並べ換えた上で、次の2点をチェックする。

1.

$$1 - \alpha < \left| \frac{\Psi_l}{\Psi_k} \right| < 1 + \alpha$$

2.

$$d_1 = \cos \vartheta_{k,l}, \quad d_2 = \cos \vartheta_{l,k}$$

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0 \quad \text{and} \quad |d_1 - d_2| < \beta$$

この2つの条件を満たす z_l を数え上げて m を決めそれを m_l とする。 $\vartheta_{k,l}$, $\vartheta_{l,k}$ は z_k , Ψ_k , z_l , Ψ_l がなす角度である。このときこの m_l を採用するか否かをさらに次の条件をチェックすることによって決める。

3.

$$\frac{\left| z_k + \frac{1+m}{2} \Psi_k - z_l - \frac{1+m}{2} \Psi_l \right|}{|z_k - z_l|} < \gamma$$

3

これらの評価基準の中で、我々は、 α, β, γ の3つの誤差の許容範囲を示す定数を指定する。これらの選び方で、多重度判定の評価が有効に働くか否かが、やはり左右される。中でも γ の値が信頼性にひびく。

3 計算例

多重度の評価をアルゴリズムの中で行うときの定数を我々は $\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.1$ と設定する。この時の結果について述べる。

[例 1]

$$P(z) = (z - \alpha_1)^4(z - \alpha_2)^3$$

$$\alpha_1 = (1.0, 1.0), \alpha_2 = (3.2, 2.3)$$

図1は収束するまでの近接根の軌跡、表1はアルゴリズムによる多重度の判定である。出発は重心中心とした半径5の円周上に等間隔にとったn点とした。反復9回から反復10回で、3重根、4重根の判定がなされる。

[例 2]

$$P(z) = (z - \alpha_1)^4(z - \alpha_2)^3(z - \alpha_3)$$

$$\alpha_1 = (1.0, 1.0), \alpha_2 = (3.2, 2.3), \alpha_3 = 2.1, 1.5)$$

これに対して次のような出発値に対する収束までの軌跡と、アルゴリズムによる多重度の判定結果をあげる。

- 1) 0 中心の半径5の円周上等間隔点 図2, 表2
- 2) 重心中心半径5の円周上等間隔点 図3, 表3
- 3) 2) の点を $\frac{\pi}{2n}$ 回転させた点 図4, 表4

表2から4に見るように出発値により多重度評価の判定のかたは一様ではないが、全ての根が収束した段階では同じ結果である。

この結果を用いて我々は次に、近似根の精度の向上を試みる。1), 2), 3) でもっとも判定結果の出方がそろっていた2) の場合について3重根と4重根への近似値の重心の値を計算することにする。まず3重根の近似値の重心の値の変化を反復10から20までみてみる。そして3重根の近似値の収束値を見てみると次のようになる。

$it = 10$	(3.1999573090, 2.2999959071)	
$it = 11$	(3.1999873461, 2.3000007480)	
$it = 12$	(3.1999965731, 2.3000004055)	
$it = 13$	(3.1999991098, 2.3000001281)	
$it = 14$	(3.1999997728, 2.3000000364)	
$it = 15$	(3.1999999479, 2.3000000072)	
$it = 16$	(3.1999999610, 2.3000000095)	
$it = 17$	(3.2000000088, 2.2999999098)	*
$it = 18$	(3.2000000088, 2.2999999098)	
$it = 19$	(3.2000000088, 2.2999999098)	
$it = 20$	(3.2000000088, 2.2999999098)	

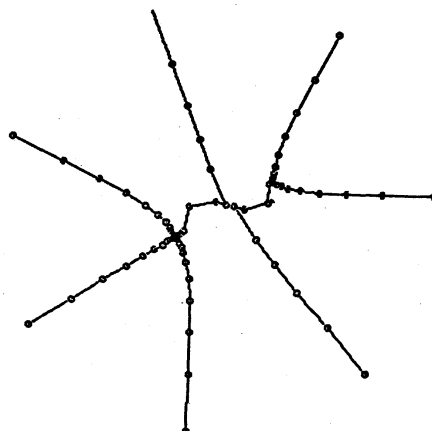
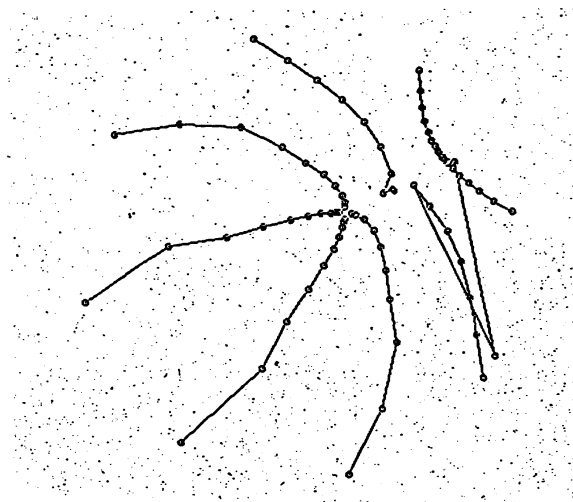


図 1. 近似根の収束までの軌跡

表 1: $n = 7$ に対する多重度判定

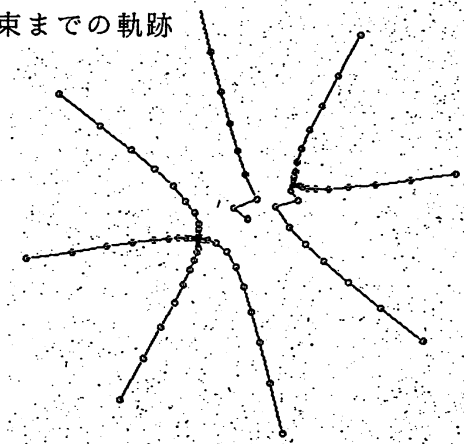
<i>iteration</i>	<i>multiplicity of approximation</i>						
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	3	3	3
10	4	4	4	4	3	3	3
11	4	4	4	4	3	3	3
12	4	4	4	4	3	3	3
13	4	4	4	4	3	3	3
14	4	4	4	4	3	3	3
15	4	4	4	4	3	3	3
16	4	4	4	4	3	3	3
17	4	4	4	4	3	3	3
18	4	4	4	4	3	3	3
19	4	4	4	4	3	3	3

図 2 . 近似根の収束までの軌跡

表 2: $n = 8$ に対する多重度判定 1) の場合

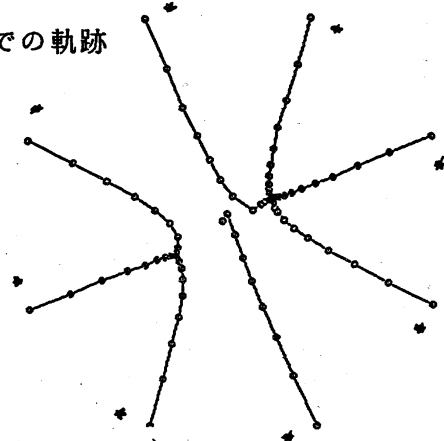
<i>iteration</i>	<i>multiplicity of approximation</i>							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	4	4	4	4	1	1	1	1
12	4	4	4	4	1	1	1	1
13	4	4	4	4	1	1	1	1
14	4	4	4	4	1	1	1	1
15	4	4	4	4	1	1	1	1
16	4	4	4	4	1	1	1	1
17	4	4	4	4	3	3	3	1
18	4	4	4	4	3	3	3	1
19	4	4	4	4	3	3	3	1
20	4	4	4	4	3	3	3	1

図 3. 近似根の収束までの軌跡

表 3: $n = 8$ に対する多重度判定 2) の場合

<i>iteration</i>	<i>multiplicity of approximation</i>							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	4	4	4	4	1	1	1	1
12	4	4	4	4	3	3	3	1
13	4	4	4	4	3	3	3	1
14	4	4	4	4	3	3	3	1
15	4	4	4	4	3	3	3	1
16	4	4	4	4	3	3	3	1
17	4	4	4	4	3	3	3	1
18	4	4	4	4	3	3	3	1
19	4	4	4	4	3	3	3	1
20	4	4	4	4	3	3	3	1

図 4. 近似根の収束までの軌跡

表 4: $n = 8$ に対する多重度判定 3) の場合

<i>iteration</i>	<i>multiplicity of approximation</i>							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	3	3	3	1
11	1	1	1	1	3	3	3	1
12	1	1	1	1	3	3	3	1
13	4	4	4	4	3	3	3	1
14	4	4	4	4	3	3	3	1
15	4	4	4	4	3	3	3	1
16	4	4	4	4	3	3	3	1
17	4	4	4	4	3	3	3	1
18	4	4	4	4	3	3	3	1
19	4	4	4	4	3	3	3	1
20	4	4	4	4	3	3	3	1

近似値 (3.1997972, 2.3002470), (3.2003154, 2.3000520), (3.1998873, 2.2997006)

*印は近似値が収束判定に掛かって、実際の更新はストップしたところを意味する。4重根の場合は、反復 13 から 20 までを示そう。

$it = 13$ (1.0000386102, 1.0002000962)
 $it = 14$ (1.0000137781, 1.0000715926)
 $it = 15$ (1.0000049376, 1.0000257019)
 $it = 16$ (1.0000017727, 1.0000092400)
 $it = 17$ (1.0000006377, 1.0000033279)
 $it = 18$ (1.0000002598, 1.0000011964)
 $it = 19$ (1.0000001556, 1.0000003654)
 $it = 20$ (0.9999998843, 0.9999996463) *

近似値 (0.99927827, 0.99971353)
 (0.99971423, 1.00072005)
 (1.00072194, 1.00028780)
 (1.00028509, 0.99927719)

これらを見ると、近似根の収束した時の値は、3重根で4桁であるのが重心収束では9桁に、4重根では4桁が7桁に改善されているのが分かる。

我々はいま計算は倍精度演算で行った。結果は演算と収束の判定基準、そして α, β, γ 等の値が関連しあって信頼性の高い評価を得ていることがわかる。

参考文献

- [1] O. Aberth, *Iteration Methods for Finding All Zeros of a Polynomials Simultaneously*, Mathematics of Computation 27 (1973) 339-344.
- [2] T. Miakoda, *Iterative Methods for Multiple Zeros of a Polynomial by Clustering*, J. Comput. Appl. Math. 28 (1989) 315-326.
- [3] T. Miakoda, *Balanced Convergence of Iterative Methods to a Multiple Zero of a Complex Polynomial*, (preprint).