

$-\Delta u = \lambda e^u$ の解の分岐について

東京工芸大学 中根静男 (Shizuo Nakane)

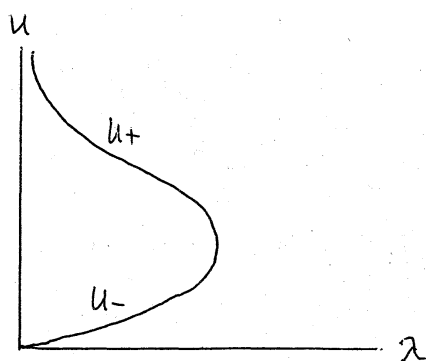
§1. 序

次の非線形境界値問題を考える:

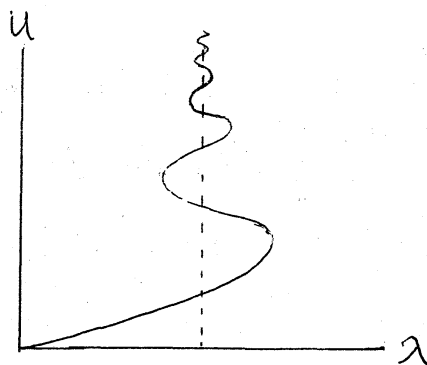
$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

(1) を満たすような (λ, u) をすべてみつけることが目標である。(1) は、微分幾何学や、self-ignition の定常問題等に現われる。この問題については、鈴木 [1] が氏の最近の仕事を含めたよい Survey となっており、興味ある人は参照されたい。以下の議論も、[1] のもとになつた講演に刺激をうけてでき上つたものである。ここで氏に感謝したい。

さて、 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$ のときには、(1) の解は $|x|$ のみに depend すること知られており、(1) は $|x| = r$ に関する常微分方程式となり、具体的に解を構成できる。このときの (λ, u) を図示すると次のようになる (例えば、亀高 [7] 参照)。



(N=1, 2)



(N=3)

Ω が一般の有界単連結領域のときには、簡単ではないが、最近、Weston [2], Moseley [3] は $N=2$ のときには、非常に小さい λ に対し、(1) の "large sol." を構成する方法を与えた。"large sol." というのは、上図の u_+ に当たる解のことである。この解 u の中で最小なもの（これは一般の領域で存在する）である "minimal sol." に対置されるものである。上図では u_- が "minimal sol." に対応する。

Ω が円の場合は、上図のように、minimal sol. と large sol. が共存しているのだが、そうでないときに、Weston や Moseley のつくった large sol. と minimal sol. とはどのように関係しているのだろうか。Suzuki-Nagasaki [4] は、 Ω が円に十分近いときには、large sol. と minimal sol. が上図のように共存することを示した。

問題 (1) について、現在までに知られている結果は、大体以上である。ここでは、 Ω が円から遠い場合を考える。この

large sol. が複数個存在する。そこで, Golubitsky-Schaefter [6] の分岐理論を応用することにより、領域を変形していったとき (1) の解の分岐の様子を調べるこれがこの小文の目的である。

§2. Weston-Moseley の理論から

以下, $N=2$ とし, Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界単連結領域とする。 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視する。 f を Riemann の写像定理で保証される写像

$$f: D = \{|\delta| < 1\} \xrightarrow{\sim} \Omega$$

とする。 Weston-Moseley は, この f に対する方程式

$$(2) \quad \bar{\delta} = \frac{1}{2}(1-|\delta|^2) \frac{f''(\delta)}{f'(\delta)}$$

の各根 $\delta \in D$ から (1) の解を構成する方法を与えた。彼らは (2) が D に 1 根しか持たない場合を扱っているが, [2] には, 複数個の根を持つ場合も重要だと言っている。彼らの方法は複数根を持つ場合でも使えるので, ここでは, 領域 Ω と (2) の根の関係について調べる。

(2) の根自体は Ω と密接な関係をもつ重要な量で, 問題 (1) だけでなく, 流体力学における free point vortex の不動点を表わしたり (Gustafsson [5]) するので, (2) の根を調べることに

には意味があると思われる。

§3. 分岐理論

R を実パラメータとし、 $\sqrt{R^2}$ 有界単連結領域の1-パラメータ族 $\{\Omega_R\}$ を考える。ここでは、このパラメータに沿って領域を変形していったときの(2)の根の分岐を調べる。これにより、問題(1)の解の分岐の様子も記述されるだろう。

$$f = f(\delta, R) : D \longrightarrow \mathbb{C}_R$$

を Riemann 写像とし、 R に關しては $\mathbb{C}^n$ とする。方程式

$$(3) \quad \bar{\delta} = \frac{1}{2}(1 - |\delta|^2) \frac{f''(\delta, R)}{f'(\delta, R)}$$

の根 δ の分岐について調べる。すると、Golubitsky-Schaeffer の分岐理論が応用できる。これは自明に $\delta = x + iy$ とおくと、実2次元空間内の分岐問題だが、実1次元に従う。

Lem. 1. (3) の分岐は実1次元元的である。つまり、1次元に Liapunov-Schmidt 分解できる。

この意味を説明すると、 $\frac{f''}{f'} = u(x, y, R) + i v(x, y, R)$, $r = |\delta|$ とおくと、(3) は次に同値：

$$\begin{cases} p \equiv u - \frac{2x}{1-r^2} = 0 \\ q \equiv v + \frac{2y}{1-r^2} = 0 \end{cases}$$

写像 $(x, y) \mapsto (p, q)$ のヤコビ行列 J を計算すると, u, v に対する Cauchy-Riemann 関係式より容易に J が零行列にならない (つまり, $\text{rank}(J) \geq 1$) ことが示される. 従って, 陰関数定理より, x または y のどちらかの変数は消去できる.

次に $\mathbb{R}_p$ は実軸及び虚軸に関して対称とする ($\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -symmetry)

lem. 2 $\ni$ $a \neq \pm 1$. Riemann 写像 f は odd. かつ $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
つまり, Taylor 係数はすべて実.

証明は鏡像原理から従う. すなわち, $\frac{f''(z, R)}{f'(z, R)}$ も odd かつ実係数故, $\delta = 0$ は (3) を満たす. 以下, $\pm a$ 根 0 から a 分岐を調べる. 故に, $\delta = 0$ の近傍で考える. まず, Liapunov-Schmidt reduction を行なう. ヤコビ行列 J は $\delta = 0$ で

$$J(0, R) = \begin{bmatrix} 2 - u_x(0, R) & -u_y(0, R) \\ -v_x(0, R) & -(2 + v_y(0, R)) \end{bmatrix}$$

実係数故, $u(0, y, R) \equiv 0$, $v(x, 0, R) \equiv 0$ 及び v' . Cauchy-Riemann より,

$$J(0, R) = \begin{bmatrix} 2 - u_{x(0, R)} & 0 \\ 0 & -(2 + u_{x(0, R)}) \end{bmatrix}.$$

$R = R_0$ を $u_{x(0, R_0)} = \pm 2$ を満たすものとする。 $u_{x(0, R_0)} = 2$ とする。 -2 のときは同様に扱える。 $\frac{\partial g}{\partial y}(0, R_0) = -4 \neq 0$ 故陰関数定理より $g = 0$ は $y = 0$ として解けるが $y = 0$ ならば $g = 0$ 故 $g = 0$ から $y = 0$ が従う。よって実軸上で考えればよい。 $S = x$ とおいて (3) と同値な方程式

$$(4) \quad h(x, R) \equiv 2xf'(x, R) - (1-x^2)f''(x, R) = 0$$

を考える。 $f(S, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}(R)}{(2k+1)!} S^{2k+1}$ とおくと (4) は

$$0 = (2a_1 - a_3)x + (2a_3 - \frac{a_5}{6})x^3 + O(x^5)$$

となり $u_{x(0, R_0)} = 2$ は $2a_1(R_0) = a_3(R_0)$ と表わされる。

Th. 1 次の仮定する:

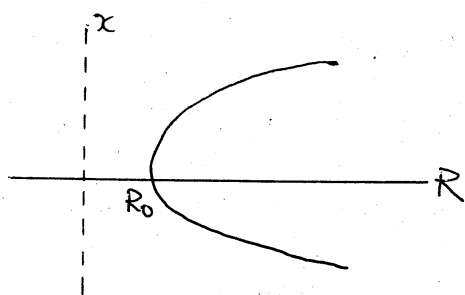
$$(A.1) \quad C_1(R_0) \equiv 2a_1'(R_0) - a_3'(R_0) \neq 0.$$

$$(A.2) \quad C_2(R_0) \equiv 2a_3(R_0) - \frac{1}{6}a_5(R_0) \neq 0$$

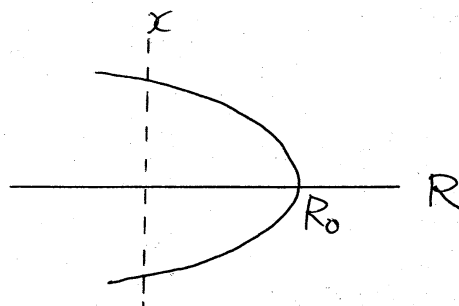
すると (3) (従って (4)) の根 0 は $R = R_0$ で pitchfork bifurcation する。

pitchfork bifurcation の標準形は $x^3 \pm Rx = 0$ である。

これを図示すると次のようになる:



$$(C_1 C_2 < 0)$$



$$(C_1 C_2 > 0)$$

Weston-Moseley の理論では、更に2つの条件を課す必要がある。その1つは、(3)の根 δ に対し、

$$D(\delta, R) \equiv |f'(\delta)| - \frac{1}{2} |f'''(\delta)(1-\delta R)^2 - 6\delta^2 f'(\delta)| \neq 0$$

我々の場合、 $\delta = x$ として、上の絶対値をはずすことができる。(A.1), (A.2) から、

$$D(x, R_0) = (2a_3(R_0) - \frac{1}{6}a_5(R_0))x^2 + O(x^4)$$

が得る。故に $D(0, R_0) = 0$ だが、 $0 < |x| \ll 1$, $|R - R_0| \ll 1$ ならば $D(x, R) \neq 0$ となる。

もう1つの条件も、係数のことばで書くこともできるが、複雑になるので省略する。

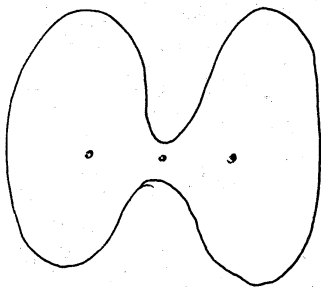
以上の結果は、"generalized pitchfork bifurcation" とも言うべき。次のような標準形の場合にも拡張できる: $x^{2k+1} \pm Rx = 0$ 。

例 (Gustafsson [5])

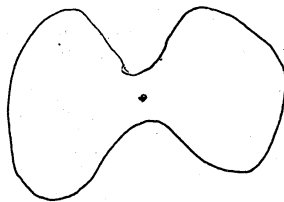
$$f(z, R) = \frac{1-R^2}{2} \left(\frac{1}{z-R} + \frac{1}{z+R} \right) \quad (R > 1)$$

$$\mathcal{D}_R = f(D, R)$$

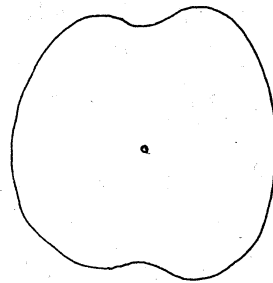
このとき $\mathcal{D}_R$ は starshaped 故、 f は univalent。(3) の根は $R_0 = \sqrt{3}$ で pitchfork bifurcation する。 $\mathcal{D}_R$ の形状を図示すると以下のようなになる。点 (3) の根を表す。



$R \approx 1$



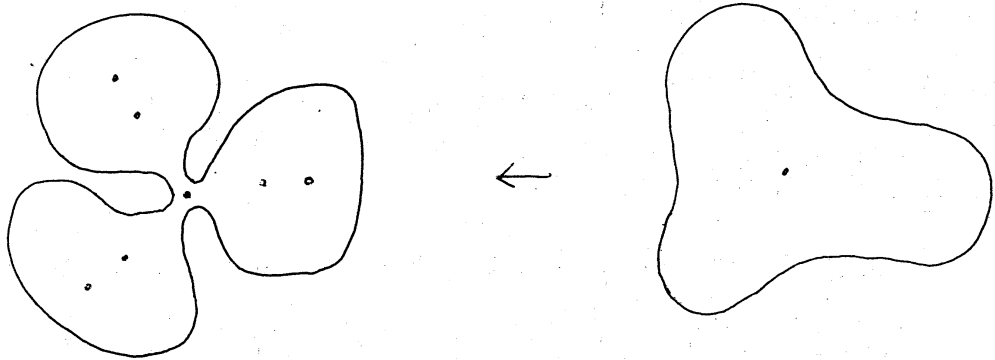
$R = \sqrt{3}$



$R \approx \infty$

今までは、対称軸が2本であったが、対称軸の数を増やすとどうなるだろうか。例えば、 $\mathcal{D}_R$ が、 k 本の直線 $\theta = \pm \frac{\pi}{k}j$ ($0 \leq j \leq k-1$) に関して対称とする。このとき $\delta = 0$ はやはり (3) の根に存ることがわかるが、 $k \geq 3$ のときは、この根から分岐が生じることは決してないことが容易に示される。

しかし、この対称性を保ったまま $\mathcal{D}$ を上図のように変形していくと、根 $\delta = 0$ は独立に新たな根が生じることがある。図示すると次のようになる ($k=3$ とした)。



これは "saddle-node bifurcation" (Golubitsky-Schaeffer は "limit type" と呼んでいる) に相当する。標準形は $x^2 \pm R = 0$ ($x^{2k} \pm R = 0$) である。この場合を formulate すると次のようになる。とにかく実軸上で考えることにして、先の $h(x, R)$ を考える。

Th 2. (x_0, R_0) で次をみたすとする、

$$(A.3) \quad \frac{\partial^j h}{\partial x^j} (x_0, R_0) = 0 \quad (j < 2k)$$

$$(A.4) \quad \frac{\partial^{2k} h}{\partial x^{2k}} (x_0, R_0) \neq 0$$

$$(A.5) \quad \frac{\partial h}{\partial R} (x_0, R_0) \neq 0$$

このとき $h = 0$ は $x^{2k} \pm R = 0$ に同値になる。更に、

$D(x, R)$ 上 $(x, R) = (x_0, R_0)$ を除いて 0 にならない。

References

- [1] 鈴木賢・非線形固有値問題 $-\Delta u = \lambda e^u$ について。
数学若手の会会報 41号, 49-62.
- [2] V.H. Weston: On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal. 9 (1978) 1030-1053
- [3] J.L. Moseley: Asymptotic solutions for a Dirichlet problem with exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) 719-735.
- [4] T. Suzuki and K. Nagasaki: On the nonlinear eigenvalue problem. $\Delta u + \lambda e^u = 0$, preprint.
- [5] B. Gustafsson: On the motion of a vortex in two-dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains, preprint.
- [6] M. Golubitsky and D. Schaeffer: Singularities and groups in bifurcation theory, vol. 1, Springer 1985.
- [7] 亀高惟倫: 非線形偏微分方程式. 産業図書